EXPLOITATION DIDACTIQUE DU DECALAGE CULTUREL EN JEU DANS L'INTEGRATION D'UNE DIMENSION HISTORIQUE EN CLASSE DE MATHEMATIQUES

VERONIQUE BATTIE
Université de Lyon, Université Lyon 1, EA4148 LEPS, France vbattie@univ-lyon1.fr

Résumé. L'enjeu de cet article est double. Dans un premier temps, il s'agit de mettre en évidence l'importance de la prise en compte de la dimension culturelle dans l'analyse de textes historiques. En guise d'exemple, des preuves d'Euclide et de Kummer de l'infinité des nombres premiers sont étudiées. Il s'agit ensuite de pointer l'intérêt didactique de l'exploitation du décalage culturel en jeu dans l'utilisation de textes historiques en classe de mathématiques. Dans cette perspective, une expérimentation menée dans une classe de terminale scientifique (18 ans) et relative à une preuve d'Euclide de l'existence d'un diviseur premier pour tout entier plus grand que 1) est présentée. Toutes les analyses de preuves exposées dans cet article sont fondées sur la distinction entre dimensions organisatrice et opératoire du raisonnement en arithmétique.

Mots-clefs. Arithmétique, Décalage culturel, Dimension organisatrice, Dimension opératoire, Euclide, Kummer, Preuve, Raisonnement, Théorie des nombres.

Introduction

Comme le montrent plusieurs travaux (Fauvel & van Maanen, 2000), l'histoire des mathématiques peut être un outil pertinent à la fois pour étudier le processus de construction des idées mathématiques et pour concevoir des activités pour la classe. Nous identifions deux pistes méthodologiques à la fois distinctes et susceptibles de s'articuler pour penser la dimension historique dans l'enseignement des mathématiques : l'intégration d'une dimension historique dans la classe d'une part, et l'exploitation de l'histoire des mathématiques pour concevoir des activités (au sens le plus large) pour la classe. La distinction entre ces deux pistes méthodologiques réside dans la différence de statut de l'histoire des mathématiques : dans le premier cas, l'histoire des mathématiques est avant tout objet d'étude alors que dans le deuxième elle joue le rôle d'outil didactique. Dans cette contribution, nous proposons la rencontre de ces deux pistes à travers l'exploitation de textes historiques en classe de mathématiques. Ici, l'histoire des mathématiques est à la fois objet d'étude via l'étude de textes historiques et outil didactique via l'exploitation du décalage culturel en jeu.

Dans une première partie, après avoir présenté notre outil d'analyse du raisonnement en arithmétique (Battie, 2007), nous analyserons deux preuves historiques du caractère infini de l'ensemble des nombres premiers : une preuve d'Euclide (IIIème siècle av J.C.) et une preuve de Kummer (1810-1893). L'enjeu dans cette partie est de mettre en évidence la nécessité de prendre en compte le contexte culturel de production d'une preuve historique pour l'analyser. Dans une deuxième partie, à partir d'une expérimentation menée en classe de terminale scientifique (18 ans, grade 12) (Battie, 2008), nous essaierons de montrer en quoi le décalage culturel en jeu dans l'introduction de textes historiques en classe de mathématiques peut être un outil didactique précieux pour l'enseignant.

1. Prise en compte de la dimenson culturelle dans l'analyse de preuves historiques en termes de dimensions organisatrice et operatoire

Dans le raisonnement en arithmétique, nous distinguons deux dimensions qui interagissent. La *dimension organisatrice* s'identifie au raisonnement global qui organise et structure les différentes étapes (on pourrait parler du « squelette » de la démonstration). Par exemple, outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, on identifie au niveau de la composante organisatrice le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation dans le raisonnement de la propriété de bon ordre de l'ensemble N), la disjonction de cas et la recherche exhaustive avec l'idée de ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas, le jeu d'extension-réduction (méthode spécifique aux anneaux factoriels[1]) et le principe local-global[2]. La *dimension opératoire* correspond quant à elle à tout ce qui relève des manipulations calculatoires (au sens le plus large) qui sont opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en oeuvre des différentes étapes de la dimension organisatrice. Nous identifions par exemple les formes de représentation choisies pour les objets, l'utilisation de théorèmes-clefs, les manipulations de nature algébrique et l'ensemble des traitements opératoires relevant de l'articulation entre la structure d'anneau de (Z,+,×) et celle d'ensemble bien ordonné de (N, ≤) relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel. Parmi les nombreux travaux didactiques sur le raisonnement mathématique et la preuve[3], nous pouvons en particulier mettre en perspective notre distinction entre dimension organisatrice et dimension opératoire (dans le raisonnement en arithmétique) avec la structuration des preuves de Leron (1983). Comme nous l'avons montré (Battie, 2007), une analogie est *a priori* possible mais seulement sur certains types de preuves. Comme annoncé en introduction, nous nous intéressons dans cette partie à deux preuves historiques de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers. Nous allons proposer une analyse comparative en termes de dimensions organisatrice et opératoire de ces deux preuves en prenant en compte la dimension culturelle en jeu. Comme le propose Bagni (2008), nous considérons deux quadruplets (énoncé, preuve, théorie, contexte) et non pas seulement l'ensemble formé d'un énoncé unique et deux preuves dépouillées de leur contexte de production. Nous essaierons au cours de cette analyse de mettre en évidence l'importance de la prise en compte de la dimension culturelle pour l'analyse de ces textes historiques.

Le texte d'Euclide (1994) est le suivant:

[1] Lorsqu'il s'agit par exemple de montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément de Z : cet anneau étant factoriel (donc en particulier nœthérien) si l'on montre que la propriété est multiplicative (au sens où si elle vraie pour deux éléments alors elle est encore vraie pour leur produit) et qu'elle est vraie pour tout nombre premier, alors elle sera vraie pour tout entier.

[2] Un exemple élémentaire est donné dans (Harary, 2006): Proposition. Soit m un entier de la forme $m = 4r(8s+7)$ avec r et s entiers strictement positifs. Alors l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = m$ n'a pas de solutions rationnelles. Démonstration. S'il y avait une solution rationnelle, il y aurait une solution entière non triviale (en chassant les dénominateurs) pour l'équation $(8s+7)t^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Quitte à diviser x, y, z, t par un même nombre, on peut alors supposer qu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. On regarde ensuite l'équation modulo 4 : dans Z/4Z, les carrés sont 0 et 1 ; ainsi t ne peut être pair sinon $x^2 + y^2 + z^2$ serait divisible par 4 ce qui impliquerait que x, y, z soient tous pairs, en contradiction avec l'hypothèse. Mais si t est impair, alors $(8s+7)t^2$ est congru à -1 modulo 8 et $x^2 + y^2 + z^2$ aussi, ce qui est impossible car les carrés de Z/8Z sont 0, 1 et 4.

[3] International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof http://www.lettredelapreuve.it

20

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.

Soient les nombres premiers proposés A, B, C. Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C.

En effet, que soit pris le plus petit nombre mesuré par A, B, C, et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. Alors ou bien EF est premier ou bien non. D'abord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, EF, plus nombreux que A, B, C.

Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc mesuré par un certain nombre premier (VII.32). Qu'il soit mesuré par le nombre premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A, B, C. En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A, B, C mesurent DE ; donc G mesurera aussi DE. Mais il mesure aussi EF ; il mesurera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A, B, C. Et il est supposé premier. Donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C. Ce qu'il fallait démontrer.

Le texte de Kummer (1878) est le suivant[4]:

Soit posé que le nombre[5] des nombres premiers, contenus dans une suite infinie de nombres, soit fini, alors le produit de tous les nombres premiers, que je désigne par P, devrait être aussi un nombre[6] fini déterminé :

$$P = 2.3.5.7.11.13 \ldots..p.$$

Mais ce nombre P devrait avoir une propriété tout à fait particulière, à savoir qu'aucun de tous les nombres à notre disposition ne pourrait être premier avec lui, à l'exception de un. Parce qu'en effet tout nombre arbitraire m peut être représenté comme un produit de nombres premiers, alors tous les nombres premiers contenus dans m devraient nécessairement aussi être facteurs communs à m et P. Si l'on considère maintenant seulement tous les nombres qui sont plus petits que P et les nombres premiers avec P, alors, puisque le nombre un serait le seul de ces nombres, on devrait avoir $\varphi(P)=1$, où φ est le signe de Gauss[7] connu pour ce nombre. Mais/maintenant, par des règles élémentaires connues pour la détermination du nombre $\varphi(m)$, on a[8] :

$$\varphi(P) = (2-1)(3-1)(5-1)(7-1)(11-1)(13-1)\ldots..(p-1),$$

donc $\varphi(P)$ n'est pas égal à un. La supposition que le nombre* de tous les nombres premiers soit fini, qui conduit à cette contradiction, est pas conséquent fausse. Donc le nombre* de tous les nombres premiers n'est pas nombre* fini.

[4] Traduction de Pierre Crépel (CNRS - Institut Camille Jordan, Université Lyon 1, Université de Lyon).

[5] *anzahl* : cardinal ; dans la suite du texte nous indiquerons ce sens à l'aide du symbole *.

[6] *zahl* : nombre (entier) ; dans la suite du texte, si on ne précise pas, il s'agit de ce sens-là et non du sens cardinal (*anzhl*).

[7] De nos jours on parle plutôt de l'indicatrice d'Euler φ qui est la fonction de l'ensemble des entiers strictement positifs dans lui-même, qui à n associe le nombre d'entiers positifs inférieurs à n et premiers avec n.

[8] Cette formule a pour origine la propriété multiplicative de la fonction φ et sa valeur dans le cas particulier d'un nombre premier $\varphi(p) = p - 1$.

Du point de vue de la dimension organisatrice, ces deux preuves mettent en scène un raisonnement par l'absurde mais celui-ci n'a pas le même statut. Dans la preuve de Kummer, il est la dimension organisatrice principale : on aboutit à une contradiction sous l'hypothèse de la définition d'un nombre premier et de celle du caractère fini de l'ensemble des nombres premiers. L'énoncé en jeu est bien que l'ensemble des nombres premiers est infini ; Kummer se réfère explicitement au concept d'infini actuel. Lors de la publication de ce travail (1878), le concept d'infini est présent et utilisé dans la pratique mathématique. Dans la preuve d'Euclide, la dimension organisatrice principale est un raisonnement direct au sein duquel est mis en œuvre un raisonnement par l'absurde qui apparaît alors comme sous-dimension organisatrice. L'énoncé d'Euclide exprime le caractère infini de l'ensemble des nombres premiers uniquement en termes d'infini potentiel. Confirmant l'analyse de Bagni (2008), citons Vitrac (Euclide, 1984, 444 – 445) :

> « Cette célèbre proposition établit l' « infinitude » de l'ensemble des nombres premiers comme on le dit souvent. En fait l'énoncé affirme qu'une multitude quelconque (mais bien entendu finie) de nombres premiers n'en épuise pas la « liste » ».

L'élément opératoire associé au raisonnement par l'absurde est l'exploitation d'une propriété de l'ordre divisibilité : si un entier divise deux entiers, il divise aussi leur différence (dans les deux preuves on aboutit à une contradiction car la différence est égale à l'unité). La différence de statut du raisonnement par l'absurde induit un statut différent de cet élément opératoire dans les deux preuves. Selon nous, c'est ce décalage de statut qui conduit Bagni (2008, 221) à conclure : « In Kummer's version, the property[9] cited is the core of the proof. ».

La preuve d'Euclide est plus complexe que celle de Kummer du point de vue de la dimension organisatrice car on identifie trois niveaux au lieu d'un : celui du raisonnement direct principal, celui du raisonnement par l'absurde et celui d'une disjonction des cas premier et non premier associée à l'utilisation explicite de la proposition VII.32. Comme nous le soulignerons dans la deuxième partie, la classification des entiers (entiers naturels autres que 1 et 0) en entiers premiers et entiers non premiers joue un rôle important dans l'arithmétique euclidienne. Le statut du raisonnement par disjonction de cas est prédominant par rapport au raisonnement par l'absurde en termes de dimension organisatrice. Selon nous, cette prédominance fait écho à l'analyse de Vitrac (Euclide, 1984, 444) via l'élément opératoire en jeu : « Elle [proposition IX 20] repose sur le fait que tout nombre est premier ou possède un diviseur premier ». D'un point de vue logique, la disjonction de cas est inutile mais, si l'on prend en compte la spécificité de la pratique arithmétique grecque, il est légitime de la faire apparaître ; nous retrouverons cela dans l'analyse des propositions VII 31 et VII 32. Cette disjonction des cas conduit à une particularité opératoire: la prise en compte de la relation d'ordre naturel (dans le cas premier). Dans la preuve de Kummer, c'est exclusivement via l'utilisation de la fonction indicatrice d'Euler (cf. ci-après) que cette relation d'ordre intervient dans le travail opératoire.

Pour compléter l'analyse en termes de dimension opératoire, on observe que dans la preuve d'Euclide, la spécificité des objets en jeu (nombres premiers) n'est pas utilisée. En particulier, pour l'introduction du nombre-clef du côté opératoire, le « plus petit nombre mesuré par A, B et C », c'est-à-dire le ppcm de ces trois nombres premiers égal au produit ABC, le caractère premier n'est pas exploité. Dans la preuve de Kummer par contre, on construit l'objet-clef directement à partir du produit des différents nombres premiers (ensemble fini par hypothèse)

[9] « If a number divides two consecutive numbers, it divides their difference (i.e. the unit) as well, and this is impossible ».

VERONIQUE BATTIE Université de Lyon, Université Lyon 1, EA4148 LEPS, France vbattie@univ-lyon1.fr

et non de leur ppcm. De plus, il est à souligner une caractéristique opératoire de la preuve de Kummer[10] : l'utilisation de la fonction φ indicatrice d'Euler (appelée dans son texte le signe de Gauss). Cette caractéristique essentielle, qui induit l'utilisation de la notion de nombres premiers entre eux, conduit à prendre en compte le cas particulier de l'image par cette fonction d'un nombre premier qui permet à Kummer d'aboutir à une contradiction. Le caractère essentiel de cette caractéristique opératoire est donc d'autant plus mise en avant qu'elle participe aux interactions entre dimensions organisatrice et opératoire : la contradiction du raisonnement par l'absurde est obtenue par une différence de valeurs de la fonction φ pour un même nombre.

Rowland (2002, 165 – 166), partant de la preuve dite « Euclid's classic proof » propose une preuve constructive du caractère infini de l'ensemble des nombres premiers. Nous donnons ci-après la preuve qu'il attribue à Euclide :

> « we suppose that there is only a finite number, and list them as $p_1, p_2, ..., p_n$. The integer $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$ is then clearly not a multiple of any of the primes listed, yet (being an integer) it must have a prime divisor, so we have a contradiction ».

Remarquons, conformément à notre analyse précédente, qu'il n'est pas pertinent d'attribuer cette preuve à Euclide (parmi les preuves d'Euclide et Kummer, c'est de la preuve de Kummer qu'elle se rapproche le plus, puisque la dimension organisatrice principale est un raisonnement par l'absurde et non un raisonnement direct (contenant un raisonnement par l'absurde)). La preuve constructive proposée par cet auteur est la suivante :

> « Let $p_1 = 2$ (this is arbitrary, it could be any prime), and for every natural number n, define p_{n+1} to be a prime (the least, say), which divides $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$. The existence of p_{n+1} distinct from $p_1, p_2, ..., p_n$ needs to be justified as before. »

L'analyse d'une preuve pose assez naturellement la question de l'identification des ressorts essentiels. Cette recherche d'identification des ressorts est d'autant plus légitime face à plusieurs preuves d'un « même » (les guillemets pour rappeler que cette unicité est toute relative si l'on prend en compte les contextes culturels en jeu) résultat. L'analyse d'une preuve arithmétique en termes de dimensions organisatrice et opératoire aide à l'identification de tels ressorts (Battie, 2007) et l'analyse comparative de plusieurs preuves arithmétiques renforce cette aide (Battie, 2003). Quelque soit la dimension organisatrice principale (raisonnement par l'absurde ou raisonnement direct), dans les trois preuves on observe que le successeur du produit (ou ppcm) des nombres premiers en jeu (en nombre fini) joue un rôle essentiel. Ensuite interviennent deux résultats-clefs : l'existence d'un diviseur premier et une propriété de la relation divisibilité. Suivant la dimension organisatrice principale, un résultat plus que l'autre va apparaître comme essentiel dans le travail.

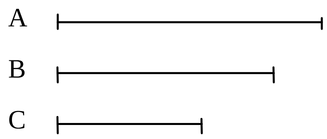
Dans la continuité de cette analyse, nous nous intéressons à l'exploitation didactique du décalage culturel en jeu dans l'utilisation en classe de mathématiques de textes historiques.

2. Des textes historiques dans la classe de mathematiques

Au sein de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Lyon, le groupe « Un chercheur dans la classe » a pour principal objectif de donner aux élèves de lycée une image des mathématiques comme science vivante grâce à des interventions de chercheurs dans leurs classes. Les visites prennent différentes formes : conférences, débats, travaux en groupes pour les élèves. Dans ce contexte, nous avons proposé à une classe de

[10] Caractéristique non mentionnée par Bagni (2008).

terminale scientifique (18 ans, grade 12) de démontrer le théorème fondamental de l'arithmétique (existence et unicité d'une décomposition en produit de nombres premiers pour tout entier égal ou supérieur à 2) à partir de textes historiques dont la proposition 31 du livre VII des *Eléments* d'Euclide (1994) (Battie, 2008). Le texte d'Euclide (1994) fourni aux élèves est reproduit ci-après :

> 31
>
> Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier.
>
> 
>
>
> Soit un nombre composé A. Je dis que A est mesuré par un certain nombre premier.
>
> En effet, puisque A est composé, un certain nombre le mesurera. Qu'il le mesure et que ce soit B. Et si B est premier, ce qui était prescrit aura été fait. S'il est composé, un certain nombre le mesurera. Qu'il le mesure et que ce soit C. Et puisque C mesure B et que B mesure A, le [nombre] C mesure donc aussi A. Et, d'une part si C est premier, ce qui était prescrit aura été fait, d'autre part s'il est composé, un certain nombre le mesurera. Alors l'investigation étant poursuivie de cette façon, un certain nombre premier sera trouvé qui mesurera [A]. Car s'il ne s'en trouvait pas, des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A, dont chacun serait plus petit que le précédent ; ce qui est impossible dans les nombres. Donc un certain nombre premier sera trouvé qui mesurera le [nombre] précédent et qui mesurera aussi A.
>
> Donc tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier. Ce qu'il fallait démontrer.

Les questions accompagnant ce texte étaient les suivantes :

1. Ecrire la preuve d'Euclide avec votre langage mathématique.
2. En utilisant la proposition 31 d'Euclide, démontrer que tout entier naturel strictement plus grand que 1 peut s'écrire comme produit de nombres premiers (résultat qui constitue une partie du théorème fondamental de l'arithmétique).

Pour aider à la lecture du texte historique, nous avions donné par écrit deux éléments de vocabulaire aux élèves :

– Nombre composé : entier naturel qui n'est pas premier.
– Un nombre A est mesuré par un nombre B ou encore B mesure A : A est divisible par B ou encore B divise A.

La spécificité des nombres en jeu n'est explicitée que dans le premier élément. Aux cinq affirmations mathématiquement équivalentes mentionnées par Zazkis (Zazkis, 2002) pour exprimer la relation de divisibilité s'ajoutent les deux précédemment citées.

La représentation des trois nombres A, B et C via des segments de droite ainsi regroupés dans le texte d'Euclide favorise selon nous une lecture en termes de relation d'ordre naturel : A est plus grand que B, qui est lui-même plus grand que C. Et c'est cet ordre-là qui est essentiel pour la dimension organisatrice de la preuve : le raisonnement suivi par Euclide est un raisonnement indirect, par l'absurde, exploitant la propriété que toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie. Et, du côté de la dimension opératoire, c'est la relation d'ordre divisibilité qui prime et en particulier la transitivité de cette relation. La correspondance entre l'ensemble des trois segments A, B et C et les trois nombres A, B et C intervenant dans le texte de la preuve permet de mettre en valeur l'articulation entre la structure d'anneau de $(\mathbb{Z},+,\times)$ et celle d'ensemble bien ordonné $(\mathbb{N},\leq)$ relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel : B mesure A et B est plus petit que A, C mesure B et C plus petit que B. Cette articulation, très insuffisamment mise en valeur dans l'enseignement, est ici essentielle et coïncide avec celle existant entre dimensions organisatrice et opératoire. Comme nous l'avons souligné dans la première partie de l'article, la présence d'une disjonction des cas premier et composé rencontrée du côté de la dimension organisatrice est liée à l'énoncé de la proposition VI.31 qui nous renseigne spécifiquement sur le cas composé. Comme le souligne Samuel (1967), pour démontrer l'existence d'un diviseur premier pour tout entier plus grand que 1 il n'y a pas besoin de séparer les cas premier et non premier. C'est la prise en compte du contexte culturel associé à la proposition VII.31 (et VII.32[11]) qui légitime la mise en valeur de cette disjonction de cas; citons Vitrac (Euclide, 1984) à ce sujet: « Les Propositions VII. 31-32 permettent de préciser le rôle fondamental des nombres premiers comme « générateurs » des nombres, par l'opération de mesure. On peut facilement inclure la Prop. VII 31 dans la suivante pour n'avoir qu'un énoncé, mais les *Eléments* ont préféré isoler l'aspect « technique » (31) et l'aspect « classificatoire » ».

Avec l'énoncé et la preuve de cette proposition d'Euclide, nous avons les éléments-clefs, pour démontrer la partie existence du TFA: la proposition 31 du côté opératoire et le raisonnement indirect, par l'absurde, exploitant la propriété que toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie pour l'élaboration de la dimension organisatrice.

Nous allons à présent, dans un premier temps, étudier les productions écrites finales, reproduites en annexe, de deux groupes d'élèves. Nous disposons d'une preuve de la proposition 31 pour les deux groupes et d'une preuve pour la partie existence du TFA uniquement pour le groupe 2. Du côté de la dimension opératoire, on constate que la transitivité de la relation d'ordre divisibilité est explicitée par les deux groupes dans l'écriture d'une preuve de la proposition 31. Pour le groupe 2, cet élément clef est écrit en premier et il est particulièrement bien mis en valeur. Pour ce qui est de la dimension organisatrice, ils ont adopté un raisonnement direct sans justifier que la démarche amorcée se termine : « [...] et ainsi de suite. » écrit le groupe 1, «[...] et on retrouve nos deux possibilités pour C. » conclue le groupe 2. Ce dernier fait de même pour sa preuve de la partie existence du TFA : « [...] et on reprend les étapes précédentes pour C. ». La spécificité des nombres en jeu est mentionnée une fois par le groupe 1 au début de sa preuve (« soit $A\in\mathbb{N}$ ») et une fois par le groupe 2 dans sa deuxième preuve uniquement (« $A=kB$, $k\in\mathbb{N}^*$ et $k\geq 2$ »). La relation d'ordre naturel existant entre les différents nombres intervenant dans leurs preuves n'est explicitée que par le groupe 2, une seule fois (« $A=kB$, $k\in\mathbb{N}^*$ et $k\geq 2$. $B < A$. ») sans que cela soit repris. La deuxième preuve du groupe 2 exploite judicieusement le résultat de la proposition 31 et sa dimension organisatrice a les mêmes caractéristiques que celle de sa preuve de la proposition 31 : raisonnement direct sans justification du caractère fini de la démarche et disjonctions de cas mises en avant. Du côté de l'opératoire, la relation de divisibilité est traduite en termes de division euclidienne via le mot dividende en faisant la confusion entre dividende et quotient. Le symbole « $|$ » utilisé par convention pour exprimer la relation

[11] « Tout nombre est soit premier soit mesuré par un certain nombre premier. » (Euclide, 1984, 340).

d’ordre divisibilité, et qui se lit divise, est semble-t-il employé par les élèves du groupe 2 en référence à la division euclidienne.

L’analyse de la recherche des élèves nous apporte de nouveaux éléments. Nous souhaitons souligner en premier lieu que ce qui n’est pas justifié par les élèves du côté de la dimension organisatrice dans leurs productions écrites apparaît dans leur recherche comme quelque chose de problématique. Dans le groupe 2, la contradiction soulevée par Euclide est questionnée :

Je vois par pourquoi c'est pas possible dans les nombres que chacun serait plus petit que le précédent.
Parce que t'as forcément un moment.
Non mais à l'époque grecque ils ne considéraient pas encore les nombres négatifs.
Quand tu arriveras à 1 tu arriveras.
Tous les entiers naturels elle a dit donc ouais on peut supposer que pour eux les négatifs ça existe pas.
Ouais.
ça paraîtrait absurde pour eux de mesurer quelque chose de négatif.
Ouais mais c'est pas ça si tu divises chaque fois un nombre par un nombre plus petit c'est pas un négatif mais ça tend vers 0 mais ils avaient pas inventé les nombres à virgule c'est ça ?
Ouais je pense pas.
Ouais ils avaient pas vu les décimaux.
Extrait 2.2

Et, lors de la mise en commun, lorsque nous avons demandé de justifier «pourquoi ça s’arrête ? » en renvoyant à l’écrit d’un autre groupe, un des élèves du groupe 2 a répondu :

Le dividende il est toujours plus petit que A donc il arrive à un moment où on ne peut plus continuer. Ils n'utilisaient pas encore les nombres à virgule.
Extrait 2.10

Ce groupe règle donc le problème de la contradiction soulevée par Euclide en se référant au contexte mathématique historique et non aux besoins intrinsèques de la preuve développée.

Pour le groupe 1 quant à lui, le problème est soulevé :

Oui donc euh, parce que là on peut dire que C s'il est premier ça marche s'il est pas premier il est divisible par plusieurs, enfin j’sais pas il est divisible par d'autres nombres, et il faut montrer que c'est pas infini.
Faut partir avec un petit arbre, on part de A.
Faut montrer que cet arbre-là il est pas infini, qu'à un moment il s'arrête… Que tu ne peux pas le diviser indéfiniment quoi.
Extrait 1.6

Mais à aucun moment de leur recherche, même en prenant connaissance de la preuve du cours (par l'absurde et minimalité) qui ne leur sera d'aucun secours, ils ne résoudront cette question. Comme nous en avions fait l'hypothèse dans notre analyse préalable, la représentation des nombres A, B et C par des segments de droite regroupés est interprétée par ce groupe à l'aide de la relation d'ordre naturel:

C'est quoi ça ?
C'est les nombres.
ça représente les nombres.
ça veut dire que A est plus grand que B et B est plus grand que C.
Extrait 1.1

Dans la recherche de ce groupe, la relation d'ordre naturel est évoquée à la lecture de cette représentation des nombres et à celle de la preuve du cours mais n'est jamais exploitée dans leur recherche. Ainsi, que ce soit pour le groupe 1 ou le groupe 2, l'accès à la dimension organisatrice de la preuve d'Euclide apparaît d'autant plus problématique.

La transitivité de la relation d'ordre divisibilité est bien explicitée dans les productions écrites des deux groupes. L'analyse des échanges montre que les élèves sont particulièrement attentifs à cet élément de l'opératoire et cela dès le début de leurs recherches. Un élève du groupe 2 lui donne le statut de théorème : « Là j'ai l'impression qu'on est en train de revoir le théorème si a divise b et si b divise c alors a divise c. ». Le mot transitivité sera ensuite mentionné. Pendant la première demi heure de la recherche du groupe 1, avant que nous clarifiions la consigne en jeu auprès de lui, une partie de ce groupe pense que la première consigne renvoie exclusivement à l'énoncé de la proposition 31. Dans ce contexte, ce que retiennent certains élèves de cette proposition c'est la relation de transitivité :

Donc écrire la preuve d'Euclide avec votre langage mathématique. Vous avez mis si B divise A et C divise B alors C divise A.
C'est pas la preuve ça.
lecture question 2
Ben c'est ça la preuve d'Euclide.
Extrait 1.2

En gros c'qui dit Euclide c'est que si B divise A et C divise B alors A divise C c'est tout on va pas rentrer dans des raisonnements.
Oui mais on montre.
C'est la deuxième question, démontrer, elle dit écrire la preuve d'Euclide avec votre langage mathématique, c'est ça notre langage mathématique.
Extrait 1.3

L’assurance avec laquelle les élèves utilisent la transitivité et l’importance qu’ils lui accordent contrastent avec la fragilité avec laquelle ils évoluent lorsqu’ils tentent d’utiliser des pensées organisatrices rencontrées en classe. Comme nous l’avions montré dans le cas du théorème de Gauss (Battie, 2007), il y a un déséquilibre dans le travail des élèves en termes de contrôle des deux dimensions organisatrice et opératoire. Ce sont des élèments de la dimension opératoire (en particulier des théorèmes emblématiques de la culture d’enseignement concernée) qui guident prioritairement les élèves dans leur recherche. On en trouve d’ailleurs des traces dans les productions écrites. Nous avions en particulier observé que la transitivité était bien mise en valeur dans la preuve écrite du groupe 2 de la proposition 31, notamment à l’aide d’une numérotation. Lors de leurs échanges, le statut de cette numérotation est précisé: « ça c’est le 1, j’ai mis des étapes. ». Ce qui illustre clairement selon nous l’importance du rôle attribué par les élèves à ce théorème dans la démarche de preuve.

Du côté de l’opératoire, il est important de revenir sur la production écrite du groupe 2 et l’extrait 2.10 où, via la notion de dividende (confusion avec la notion de quotient), les élèves font référence à la division euclidienne. L’extrait suivant nous éclaire sur ce point :

Mais mais attend quand on notait ce symbole C divise A ça veut dire qu'il y avait pas de reste. Quand on mettait ce symbole là il n'y avait pas de reste?
Non
[…]
Si on voit la division euclidienne avec les restes là.
C'est simplement tu te souviens quand tu fais une division ben tu prends un grand nombre tu le divises par un autre, au début tu fais d'abord qu'avec un chiffre et puis tu les rajoutes au fur et à mesure. Par exemple on va prendre j'sais pas, 100 tu le divises par 5 tu vas d'abord prendre le premier nombre tu vas voir que ça fait 2 il va rester 0.
On fait sans reste quoi.
Ensuite il te reste 0, voilà, mais au début c'est vrai que t'as qu'un chiffre et donc ça te donne l'impression qu'il y a un reste en fait non c'est simplement que tu as fait la division.
Extrait 2.4

Dans cet extrait la relation de divisibilité est pensée en référence à la division euclidienne: elle correspond au cas particulier où le reste est nul. Le symbole «$|$» n’évoque pas spécifiquement aux élèves la relation d’ordre divisibilité. Ce symbole se lit « divise » et les élèves lui associent l’action diviser qui appelle un résultat, comme l’explique l’un d’eux qui se situe au niveau de la technique opératoire. Parmi les cinq expressions exprimant la relation de divisibilité entre deux entiers A et B (Zazkis, 2002), « A divise B » est la seule à qui est associé spécifiquement un symbole dont l’utilisation favorise naturellement cette expression par rapport aux autres. En classe de mathématiques, l’emploi de ce symbole peut être source de malentendus entre l’enseignant et les élèves si ces derniers n'utilisent pas ce symbole spécifiquement en référence à la relation divisibilité. Comme cela apparaît dans cet extrait, les élèves peuvent faire tout un détour masqué pour l'interpréter. Le vocabulaire spécifique à Euclide pour exprimer la relation divisibilité est peut-être à l'origine de ce questionnement relatif à une pratique de classe antérieure à cette recherche (« quand on notait »), vocabulaire que certains élèves s'approprient aisément comme en témoigne cet extrait précédant l'extrait 2.4 : « Mais s'il est composé on pourrait considérer que c'est le produit de deux autres nombres. Donc en gros s'il est composé il est forcément mesuré par un nombre qui peut être B ».

Conclusion

Dans la première partie de ce texte, nous avons essayé de montrer sur un exemple que l'analyse mathématique en termes de dimensions organisatrice et opératoire d'une preuve historique ne peut être menée sérieusement que si l'on prend en compte le contexte culturel dans lequel cette preuve a été produite. Nous rejoignons donc la conclusion suivante de Bagni (2008) : « Nous concluons que les exemples historiques doivent être compris dans le cadre de leur contexte culturel et social, et que les standards de symbolisation et de rigueur appliqués dépendent de ce contexte ».

Dans une deuxième partie, en confirmant le décalage important entre ce que donne à voir des productions écrites finales d'élèves et ce que donne à voir la recherche à l'origine de ces productions (Battie, 2007), nous nous sommes intéressée à l'utilisation de textes historiques en classe de terminale scientifique. La première chose à souligner est que les élèves, spontanément, prennent en compte le contexte historique du texte que nous leur avons proposé d'étudier. De plus, le décalage culturel en jeu permet de mettre à jour ce qui ne va pas de soi mathématiquement pour les élèves ; ce décalage peut ainsi aider à soulever des malentendus entre les élèves et l'enseignant. Dans le cadre des journées 2008 de l'APMEP[12], nous avons animé un atelier à partir de la situation décrite ici. Les participants étaient pour la plupart des enseignants de terminale scientifique : il nous est clairement apparu que pour certains il était évident pour les élèves que « des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A, dont chacun serait plus petit que le précédent ; ce qui est impossible dans les nombres ». A partir de cette idée d'exploitation de textes historiques en classe, les participants de cet atelier ont également soulevé le problème général du niveau d'exigence en matière de rigueur à faire vivre dans la classe de mathématiques pour la rédaction de preuves. Nous pensons tout d'abord que le décalage culturel en jeu dans la lecture de textes historiques favorise l'émergence non artificielle de cette question de rigueur au sein de la classe. Et, selon nous, ce niveau d'exigence doit être intimement lié à l'identification des ressorts de la preuve en jeu. Cette identification étant aidée par une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire, nous avons montré que les élèves, centrés sur l'ordre divisibilité, avaient identifié la clef-opératoire mais que du côté de la dimension organisatrice les choses étaient problématiques. Rappelons que la figure accompagnant le texte d'Euclide (représentation des nombres par des segments) est porteuse de la mise en valeur de la relation d'ordre naturel, dont l'articulation avec la relation divisibilité est essentielle ici. En conclusion, nous pensons que l'exploitation du décalage culturel en jeu dans l'utilisation de textes historiques en classe de mathématiques offre de riches potentialités didactiques ; nous avons essayé dans cette contribution d'en pointer quelques-unes.

[12] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

ANNEXE

Production écrite finale du groupe 1

1) Soit $A \in N$, A non premier. Il existe un entier naturel premier B tel que $B \mid A$.
Si B n'est pas premier alors un autre nombre C existe tel que $C \mid B$ et comme $B \mid A$ alors $C \mid A$. Si C est premier, alors A est divisible par un nombre premier et si C n'est pas premier, alors il existe encore un nombre qui divise C et ainsi de suite.
Donc tout nombre non premier est divisible par un nombre premier.
[…]

Production écrite finale du groupe 2

I)

1) Si $B \mid A$ et si $C \mid B$ on obtient $C \mid A$
2) On a BA deux possibilités :
   - Soit B un nombre premier

   $\Rightarrow$ la démonstration est faite
   - On a un nombre C qui divise B et on retrouve nos deux possibilités pour C.

II) Soit A un nombre quelconque :

- Si A est premier, il est divisible par 1 et lui-même.
- Si A est composé, on sait qu'il possède au moins un diviseur premier. Soit k ce diviseur premier.

  On a $k \mid A$ Soit B le dividende de cette division

  Donc $A=kB$. $k \in N^*$ et $k \geq 2$.

  $B<A$.
  - Si B est égal à 1, on a $B=1$. $A=k$. On retrouve la première hypothèse.
  - Si B est premier, on a A le produit de 2 nombres premiers.
  - Si B est composé, alors il possède au moins un diviseur premier et on reprend les étapes précédentes pour C.

Conclusion : tout nombre > 1 est le produit de nombre premier
[…]

Bibliographie

Bagni, G.T. (2008). A theorem and its different proofs: history, mathematics, education, and the semiotic-cultural perspective. *Canadian journal of science, mathematics and technology education*, 8(3), 217 – 232.

Battie, V. (2008). Le théorème fondamental de l'arithmétique: une approche historique et didactique, *Proceedings of the 5th International Colloquium on the didactics of mathematics*, University of Crete, Greece.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(1), 9–44.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique,* Université Paris7, Paris. (Online)

Euclide (1994). *Les Eléments*, Volume 2, Traduit et commenté par Bernard Vitrac, PUF Coll. Bibliothèque d'histoire des sciences, Paris.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.
Harary, D. (2006). Principe local-global en arithmétique, *Gazette des mathématiciens*, 107, 5-17. [en ligne sur le site de la Société Mathématique de France].
Kummer, E. E. (1878). Neuer elementarer Beweis, dass die Anzhal aller Primzahlen eine unendliche ist. *Monatsberichte Akademie der Wissenschaften Berlin, 1878/9*, 777-778.
Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs, *American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-185.
Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In Campbell, S. R., Zazkis, R. (eds.) (2002). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction,* Ablex Publishing, Westport, CT.
Samuel, P. (1967). Sur l'organisation d'un cours d'arithmétique, *Bulletin de l'APMEP* n°253.
Zazkis, R. (2002). Language of number theory: metaphor and rigor. In Campbell, S. R., Zazkis, R. (eds.) (2002). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction,* Ablex Publishing, Westport, CT.

VERONIQUE BATTIE
Université de Lyon, Université Lyon 1, EA4148 LEPS, France
vbattie@univ-lyon1.fr