Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

VULGARISATION ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LE JEU DOBBLE

Nicolas PELAY* – Alix BOISSIERE**

Résumé – Les processus de vulgarisation et d'enseignement sont des processus souvent articulés, et nous défendons l'idée d'un modèle théorique commun pour l'analyse d'une action de diffusion des mathématiques. Nous présentons le jeu Dobble, un jeu grand public très populaire, actuellement prisé par les vulgarisateurs, et nous montrons comment il est utilisé de façon variée et comment il peut être l'objet d'un processus de vulgarisation ou d'enseignement plus ou moins marqué selon les actions.

Abstract – The process of popularization and teaching are often articulated processes, and we claim for a common theoretical model for the analysis of an action of diffusion of mathematics. We present the game Dobble, very popular and very appreciated by the popularizers. We show how it is used in a varied way and how it can be precisely the object of a process of popularization or teaching, more or less marked according to the actions.

Mots-clefs : vulgarisation, Dobble, raisonnement, contrat didactique et ludique, action de diffusion

Keywords: popularization, Dobble, reasoning, didactic and ludic contract

I. INTRODUCTION

Dans le contexte actuel d'évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent. C'est pourquoi nous cherchons à caractériser les pratiques de vulgarisation des mathématiques qui peuvent être très différentes selon le type d'action (articles, vidéos, médiation humaine, atelier, conférences, etc.), le vulgarisateur, ses objectif, son public, etc.

Nous avons choisi de traiter cette question en étudiant un jeu actuellement très prisé des vulgarisateurs mathématiques : le jeu « Dobble ». Il s'agit d'un jeu de cartes grand public qui connait un succès important, et dont les cartes sont organisées en une structure liée à la géométrie projective. Nous allons montrer dans cette communication comment un même jeu peut être l'objet de différentes vulgarisation, et nous tenterons de caractériser ces différences.

Nous adoptons pour cela une démarche didactique, en accordant une attention particulière aux connaissances et savoirs mathématiques en jeu dans les processus de diffusion. Notre communication s'inscrit en continuité de celle de Pelay et Mercat (2012) lors de la première

* Laboratoire de didactique André Revuz – France – nicolas.pelay@univ-paris-diderot.fr
** Plaisir Maths – France – alix.boissiere@plaisir-maths.fr

Pelay N., Boissière A. (2015) Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 944-956.

édition du groupe spécial « vulgarisation » du colloque EMF, dans laquelle est proposée une approche théorique pour étudier les actions de diffusion des mathématiques.

La thèse que nous défendons est que les processus de vulgarisation et d'enseignement sont des processus souvent articulés, et nous défendons l'idée d'un modèle théorique commun pour leur analyse, sans pour autant nier leurs différences.

Après avoir présenté le jeu dans une 1re partie, nous présenterons dans une 2e partie les éléments théoriques qui vont servir de base à notre analyse. Nous y verrons que le même jeu Dobble peut être l'objet de processus de transposition didactique différents et conduire à des actions de diffusion très variées :

- La 3e partie proposera ainsi des éléments qui nous permettront d'analyser deux articles de vulgarisation sur le jeu Dobble, accessibles sur internet, et d'y pointer des différences significatives en ce qui a trait aux enjeux d'enseignement et de vulgarisation.
- La 4e partie étudiera la mise en place d'un atelier sur le jeu Dobble au sein d'une structure de diffusion des mathématiques à laquelle appartiennent les auteurs du présent article. Nous verrons comment Dobble, utilisé dans un contexte de vulgarisation, est utilisé non pas pour transmettre des contenus notionnels mais des contenus transversaux liés à la preuve.

II. PRESENTATION DE DOBBLE

1. Le principe du jeu

Dobble est un jeu de discrimination visuelle[1] constitué de 55 cartes sur chacune desquelles sont dessinés 8 dessins. La particularité en est que **deux cartes quelconques ont toujours un, et un seul, symbole en commun**. Trouver le plus vite possible le symbole commun entre deux cartes est le principe de base sur lequel reposent les différentes façons de jouer à Dobble : se débarrasser le plus vite de toutes ses cartes, ou au contraire en collecter le plus possible.

Figure 1 *– Cartes du jeu Dobble*

[1] Il a été créé par Igor Polouchine, Denis Blanchot, Guillaume Gille-Naves et Jean-François Andreani, et il est édité par Asmodee. http://www.asmodee.com/ressources/jeux_versions/dobble.php, consulté le 31/01/2015

2. *Les mathématiques dans Dobble*

Le caractère remarquable de Dobble est lié à cette propriété du jeu : « *deux cartes quelconques ont toujours un, et un seul, symbole en commun* », et cette caractéristique est le fondement d'un questionnement mathématique : quelle est la nature mathématique de cette propriété ? Quelle est la structure du jeu pour réaliser cette propriété ? Existe-t-il un nombre fini ou infini de cartes réalisant cette propriété et s'il est fini, combien y a-t-il de cartes ? Peut-on construire un jeu Dobble avec un nombre prédéterminé de symboles, toujours dans le cas où il y a le même nombre de symboles par carte ?

Ce sont ces questions qui sont abordées dans les articles de vulgarisation qui ont fleuri sur le net ces dernières années. Tous sont très liés aux notions mathématiques de géométrie projective, et nous allons nous-mêmes donner quelques éléments de vulgarisation mathématique avant de poursuivre notre étude.

La propriété du Dobble ressemble à deux énoncés de géométrie dans le plan affine réel :

- P1 : Par deux points du plan passe une et une seule droite.
- P2 : Deux droites distinctes, non parallèles, ont un et un seul point d'intersection.

Deux droites parallèles distinctes n'ont pas de point d'intersection en géométrie affine, mais si l'on considère que deux droites parallèles distinctes se coupent à l'infini, ce qui est l'hypothèse de la géométrie projective, on peut alors modifier le deuxième énoncé en :

- P2' : Deux droites distinctes ont un et un seul point d'intersection.

En ajoutant à chaque droite un point à l'infini, ce point étant commun aux droites de même direction, on construit ce qui est appelé le *plan projectif réel*. Deux droites parallèles étant deux droites de même direction, dans le *plan projectif réel* deux droites parallèles se croisent à l'infini. L'énoncé P2' y est donc vérifié, l'énoncé P1 restant vrai.

L'analogie de la propriété du Dobble avec les énoncés P1 et P2' permet de considérer les symboles du Dobble comme des points et les cartes comme des droites (ou les symboles comme des droites et les cartes comme des points). Par ailleurs, comme le dobble n'a qu'un nombre fini de cartes, on ne considère qu'un nombre fini de points plutôt que l'ensemble des points du plan, et on se trouve alors dans le domaine de la géométrie finie.

On peut alors appliquer les théorèmes de géométrie projective finie et parvenir à répondre aux questions mathématiques posées par le jeu, et comprendre finement la construction du Dobble et les liens entre le nombre de cartes, le nombre de symboles et le nombre de symboles par cartes.

III. MODELISATION D'UNE ACTION DE DIFFUSION DES MATHEMATIQUES

Une action de diffusion des mathématiques sera ici définie comme la mise en place d'un *dispositif mathématique* dans un *contexte* donné, par un *acteur de la diffusion* et pour un *public donné*.

Cette définition assez large permet de se donner les moyens d'étudier avec un même cadre théorique une action d'enseignement et une action de vulgarisation : un article, une vidéo, ou une animation menée par un médiateur avec un public donné, etc.

Bien sûr, il est évident qu'il existe des différences profondes entre le processus de *vulgarisation* et le processus *d'enseignement*, mais plutôt que de les opposer *a priori*, l'approche théorique consiste à développer un cadre commun pour étudier les phénomènes d'enseignement et de vulgarisation.

L'hypothèse sous-jacente est qu'il existe des éléments de vulgarisation dans le processus d'enseignement, et des éléments d'enseignement dans le processus de vulgarisation. Ce sont la priorité donnée à certains enjeux plutôt qu'à d'autres, les choix réalisés dans les activités proposées, le discours et le langage utilisé dans les textes et les échanges avec le public, qui vont permettre de caractériser les processus d'enseignement et de vulgarisation mis en œuvre. Aussi, une action de diffusion va pouvoir être étudiée avec une approche théorique globale.

1. *Enjeux, intentions et rôle*

Toute action de diffusion présente des *enjeux* et *intentions* qui viennent des acteurs de la diffusion et du dispositif choisi. Le public lui-même a ses propres intentions et enjeux.

En reprenant le modèle de Sousa Do Nascimento (1999), on considère qu'une action de diffusion des mathématiques est susceptible de répondre à différents types d'enjeux.

INTENTIONS	ENJEUX	ROLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant
Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 1 - *Les modèles d'analyse de l'animation scientifique*

On voit dans ce tableau que les composantes « *enseignement* » et « *vulgarisation* » sont des enjeux parmi d'autres, et que c'est bien la priorité donnée à l'un ou l'autre des enjeux qui détermine la nature principale de l'action.

Dans une action d'enseignement, la priorité est donnée à la transmission de connaissances et de savoirs mathématiques, c'est le rôle « instructeur » qui est privilégié. Dans une action de vulgarisation au contraire, les enjeux sont beaucoup plus variés, et le rôle « instructeur » est en général beaucoup moins important. L'objectif de médiation est important, car les aspects culturels, historiques y sont généralement très présents, de même que l'intention « loisir » est aussi prise en compte : le vulgarisateur cherche aussi à partager un certain plaisir, et à faire vivre un bon moment à son public. Le témoignage d'un médiateur mathématique professionnel interrogé en 2012 montre très bien la priorité donnée au plaisir par rapport au contenu :

> *L'essentiel, c'est d'essayer au maximum que les gens passent un bon moment. […] A la limite en étant extrémiste, je dirais que le contenu passe après. C'est-à-dire que déjà, si les gens passent un bon moment, évidemment en ayant entendu parler de maths, […] si ils sentent que vraiment il y a des maths là où ils sont, et qu'ils se sentent bien, pour beaucoup c'est déjà énorme. Et donc quelque part, je considère que c'est de notre responsabilité, c'est d'essayer de faire en sorte que ça se passe bien. […] Donc je ne me fixe jamais d'objectif de contenu, il passera ce qui passera.*

2. Le concept de contrat didactique et ludique

Etudier une action de diffusion des mathématiques et ses enjeux peut aussi être décrit d'un point de vue théorique par la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place et son évolution au cours du temps. Ce concept a été défini dans la thèse de Pelay (2011) en prolongement du concept de contrat didactique de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998).

Il est défini comme l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants" dans un projet, qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné.

Ce concept permet de se donner l'outillage théorique pour décrire et analyser la façon dont évoluent les intentions et les enjeux dans une action de diffusion. Il permet ainsi de repérer des moments où un contrat didactique se met en place en lien avec la transmission d'un savoir mathématique précis, des moments où un contrat ludique d'instaure pour faire jouer les participants, ou leur raconter une anecdote amusante, et des moments où le contrat didactique et ludique se stabilise pour faire vivre simultanément des enjeux didactiques et ludiques.

Sans qu'elle soit obligatoire ou systématique, il apparaît à l'observation de nombreuses actions de vulgarisation que l'intention de divertissement et de plaisir est très souvent présente sous une forme ou une autre, et que cela engendre des choix dans le déroulement d'une conférence, d'un atelier ou d'un article. Ainsi, le conférencier, médiateur ou animateur sera souvent à la recherche du « bon équilibre » et en particulier de la bonne adaptation au niveau mathématique de son public.

3. La trajectoire d'une action de diffusion

L'adaptation au public est directement liée à l'adéquation de la nature des connaissances et savoirs mathématiques entre le public est les informations qu'il reçoit. Nous distinguons trois zones :

- la **zone magique** est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut pas faire de référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magiques pour le public. Le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci n'a aucune prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée : elle lui est même invisible, incompréhensible, inaccessible.
- la **zone maîtrisée** est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone.
- la **zone didactique** est la zone où une compréhension et un approfondissement sont possibles autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc.

Ces zones étant définies, nous considérons qu'un dispositif de diffusion des mathématiques est comme un vaste territoire mathématique que l'intervenant peut exploiter différemment en fonction du contexte et de son public, et en s'appuyant sur différents ressorts (didactiques, ludiques, magiques, etc.) : il peut poser des jalons et des étapes, et organiser temporellement son action pour réaliser les enjeux fixés. Une action de diffusion des mathématiques est alors définie comme une trajectoire qui se réalise dans la zone de diffusion permise par le dispositif.

Le dessin ci-dessous de la figure 6, bien qu'encore schématique à ce stade de nos recherches, permet de donner une représentation de ce que nous cherchons à décrire par cette notion de trajectoire entre les différentes zones. Les axes représentent le niveau des connaissances mathématiques portées par le dispositif et par le participant.

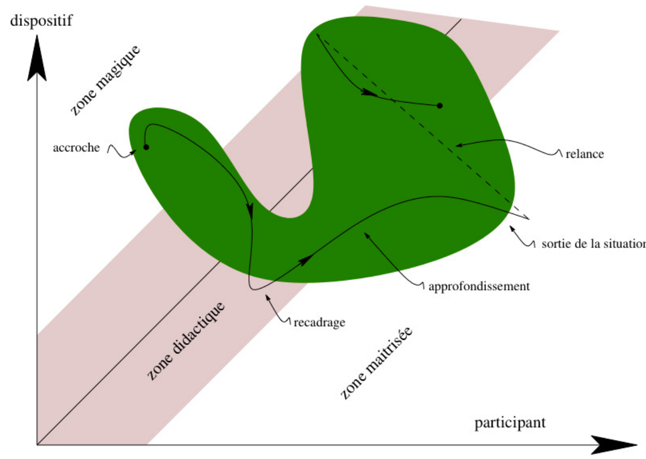


Figure 6 *- Trajectoire individuelle et collective dans l'espace des connaissances*

On peut à nouveau faire un lien avec ce que nous avons vu précédemment : dans une action d'enseignement, l'enseignant évoluera quasiment exclusivement dans la zone didactique, naviguant sur les frontières des zones maîtrisées et des zones magiques. Dans les actions de vulgarisation, les trajectoires sont beaucoup plus variées car le vulgarisateur cherche souvent à rendre accessible un savoir expert et à créer des ponts entre toutes les zones.
Nous allons mettre cela en évidence dans la vulgarisation mathématique du jeu Dobble, d'abord dans les articles de vulgarisation, puis dans un atelier mathématique.

IV. DES ARTICLES DE VULGARISATION SUR LE DOBBLE

1. Dobble : rendre accessible des mathématiques complexes

De nombreux mathématiciens se sont intéressés ces dernières années au jeu Dobble, comme en témoigne le nombre important d'articles et de forum de discussion auxquels on peut accéder en entrant « Dobble et mathématiques » dans un moteur de recherche. Chaque article, par les choix opérés par l'auteur, correspond alors à une trajectoire particulière dans la zone de diffusion permise par le Dobble.

La **zone magique** du Dobble est directement liée à la structure mathématique du jeu, aux éléments de géométrie finie et de géométrie projective mis en jeu dans celle-ci. Elle se manifeste pour le public par une série d'interrogations tels que : comment se fait-il qu'il y ait toujours un symbole en commun ? Existe-t-il une infinité de cartes possibles pour un nombre donné de symbole par carte ? Comment se fait-il que le nombre de cartes soit égal au nombre de symboles, etc. ? Ces notions mathématiques sont tellement éloignées des connaissances du public non expert qu'en pratique la zone magique est indépendante du public concerné (élèves du secondaire, adultes).

La **zone maîtrisée** du Dobble varie en fonction du public concerné. Comme cela est visible dans le paragraphe I.2, les connaissances sur lesquelles s'appuie la vulgarisation sont principalement relatives au domaine de la géométrie affine réelle. Il faut maîtriser deux énoncés fondamentaux de la géométrie telle qu'elle est enseignée au secondaire :

- P1 : Par deux points du plan passe une et une seule droite.
- P2 : Deux droites distinctes, non parallèles, ont un et un seul point d'intersection.

Ces notions font en général partie de la zone maîtrisée dès le secondaire. Par contre la maîtrise de mécanismes de raisonnement et d'élaboration de preuve n'apparaît qu'au lycée (secondaire 2), et les rudiments d'algèbre et d'arithmétique modulaire qui peuvent être utilisés ne sont maîtrisés que dans les premières années universitaires.

La **zone didactique** du Dobble est plus difficile à définir, car elle dépend directement du public et des enjeux de l'action de diffusion. C'est au vulgarisateur de créer – ou non – un espace didactique propice où des savoirs vont pouvoir être transmis et compris par le public.

Nous avons choisi d'analyser deux articles aux trajectoires très différentes dans chacune des trois zones :

- un article tiré du site de diffusion des mathématiques Images des Maths, *Dobble et la géométrie finie*, de Bourrigan (Bourrigan 2011), qui est un des premiers articles sur le sujet et qui est régulièrement cité dans les autres articles ;
- un article de Deléglise publié sur sa page personnelle, *Plans projectifs, arithmétique modulaire et Dobble* (Deléglise 2013).

2. *Article de Bourrigan*

L'article de Bourrigan, publié dans Images des Mathématiques[2], présente la structure mathématique que cache le Dobble. Il s'adresse à un public non expert d'adultes et d'élèves du secondaire[3], et cherche à expliquer comment construire un Dobble simplifié à trois symboles par carte à l'aide des mathématiques. Pour cela, il introduit des rudiments de géométrie finie puis de géométrie projective, et s'appuie sur de nombreuses figures pour illustrer ses propos.

Le point d'accroche de l'article se situe selon nous au niveau des enjeux de la construction du Dobble :

> […] il a fallu que les concepteurs du jeu respectent un principe important : Deux cartes quelconques du jeu Dobble ont toujours exactement un symbole en commun. On va essayer d'expliquer comment les mathématiques peuvent nous aider à construire un tel jeu, en essayant de construire notre propre version de Dobble, en modèle réduit.

L'article opère un recadrage en ramenant le problème à la zone maîtrisée et à des notions de géométrie : l'énoncé P1 et les coordonnées cartésiennes.

On entre ensuite dans la zone didactique du Dobble avec l'introduction de la géométrie finie en deuxième et troisième parties de l'article, et l'élaboration d'un Dobble à trois symboles par cartes.

L'auteur termine la construction du Dobble dans la zone magique en parlant de géométrie projective sans entrer dans les détails :

> On peut encore enrichir notre mini-Dobble en lui ajoutant une droite. Cette idée, qui est la base de ce que les mathématiciens appellent la géométrie projective date en fait des peintres de la Renaissance et consiste à ajouter un point (le point de fuite des peintres) pour chaque famille de droites parallèles. Ce point est alors le point d'intersection de la famille des droites. Les points de fuite sont tous alignés sur une droite, que les mathématiciens appellent « la droite à l'infini » et tous les autres « l'horizon. »

---

[2] http://images.math.cnrs.fr/

[3] Le site *Images des maths* utilise une analogie avce les pistes de ski pour signaler la difficulté de ses articles (verte, bleue, rouge, noire et hors-piste). Celui de Bourrigan est caractérisé comme « piste bleue ».

> Il est possible de définir très rigoureusement ces notions, dont on a déjà parlé çà et là mais nous n'entrerons pas dans les détails ici.

L'article se termine sur une relance du problème intitulé « Retour au « vrai » Dobble ». La relance se trouve elle aussi dans la zone magique du Dobble car l'auteur explique que la construction s'appuie sur un système de nombres plus complexe, mais ne développe pas.

3. *Article de Deléglise*

L'article de Deléglise est plus technique que celui de Bourrigan, en ceci que les objets mathématiques manipulés sont définis plus rigoureusement et les propriétés sont démontrées. Cela est en partie dû au fait que l'auteur se penche sur un Dobble plus complexe que celui présenté dans l'article du site *Images des Maths*, un dobble à 6 symboles par carte, mais surtout au fait que l'auteur pose des enjeux didactiques plus importants :

> Le jeu de Dobble édité par Asmodée est une excellente occasion d'introduire des objets mathématiques importants : les plans projectifs, l'arithmétique modulaire et les nombres premiers. (Déléglise 2013, p.1)

Toutefois, le public visé est semblable à celui de l'article d'*Images des Maths*, comme le signale Deléglise dans le résumé :

> […] texte élémentaire à la portée d'un élève des classes secondaires. (Ibid.)

Pour cet article, il n'y a pas d'accroche dans la zone magique. L'article commence dans la zone maitrisée du public avec des rappels de géométrie affine réelle, puis on entre dans la zone didactique avec la construction du plan projectif réel, le corps des entiers modulo cinq, la géométrie affine sur ce corps et la géométrie projective sur ce corps.

L'auteur effectue deux « écarts » dans la zone magique en généralisant les notions abordées au corps des entiers modulo p (où p est premier) dans les parties 4 et 7 de l'article.

C'est dans le dernier paragraphe, « Application au jeu de Dobble », que l'auteur fait le lien avec la construction du Dobble, qui est alors vu comme une application de ce qui est développé précédemment.

4. *Conclusion*

Ces deux articles sont représentatifs de deux actions de diffusion très différentes. Le premier, l'article de Bourrigan, met l'accent sur le côté magique, étonnant, de la structure du Dobble. L'article n'entre pas dans les détails techniques relatifs à la géométrie finie, ce qui en fait selon nous un article où l'enjeu principal est la vulgarisation.

A l'inverse, le second article, celui de Deléglise, a des enjeux didactiques importants. La structure de l'article se rapproche de la structure d'un cours, avec la construction de nouvelles notions, en partant de connaissances maitrisées, et en terminant par une application. Le Dobble est privé de sa zone magique car il est vu comme une application des notions développées.

Ces deux articles illustrent parfaitement selon nous la façon dont les enjeux de l'action de diffusion influent sur sa trajectoire et sur sa caractérisation en tant qu'action de vulgarisation ou d'enseignement.

V. ETUDE D'UN ATELIER MATHEMATIQUE AUTOUR DU DOBBLE

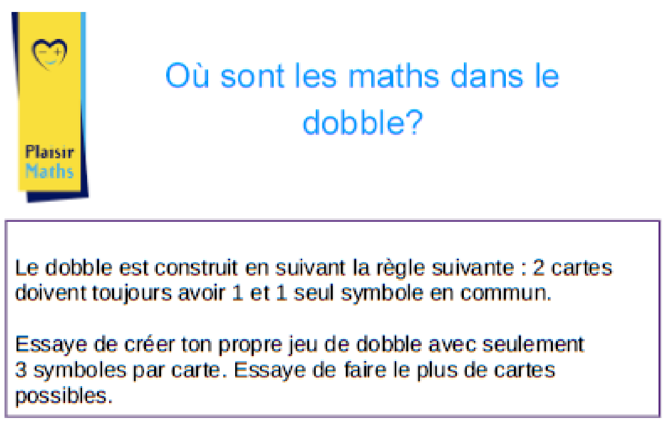
Nous avons pu voir comment la complexité des contenus mathématiques fait de Dobble un jeu très propice à la vulgarisation, avec des possibilités d'enseignement à la fin du secondaire. Nous souhaitons montrer une toute autre possibilité d'utilisation du jeu Dobble où des enjeux d’enseignement peuvent être introduits dès 10 ans pour travailler sur la preuve en mathématique.

1. Contexte

Le jeu Dobble fait partie d’une ludothèque mathématique développée par une structure de diffusion, *Plaisir Maths*[4], qui propose un ensemble de jeux et d'activités ludiques s'adressant à un public varié (de l'élève de primaire à l'adulte) dans différents contextes (intervention en classe, stage mathématique, fête de la science). Les interventions qui découlent de ces jeux ont des modalités très variées, une même activité peut être déclinée de plusieurs façons selon l’âge des élèves, la durée d'intervention et le contexte. Les activités ayant une *épaisseur didactique* importante, au sens de Pelay et Mercat (2012), sont donc privilégiées afin de permettre de les décliner de nombreuses façons.

2. Une nouvelle action de diffusion des mathématiques autour du Dobble

Le jeu de société Dobble a été choisi pour créer une activité accessible pour des enfants à partir de 10 ans, permettant de travailler le raisonnement et l'élaboration d'une démonstration. Le choix d'orienter l'activité vers un travail de raisonnement et d'explication nous paraissait cohérent par rapport aux programmes scolaires du collège qui préconisent une « introduction très progressive à la démonstration » en mettant l'accent sur « la recherche et la production d'une preuve » plutôt que sur « la mise en forme de la preuve ». Nous avons donc construit notre activité pour confronter les élèves à la nécessité de produire une preuve et pour les amener à formuler celle-ci.



La première observation est qu’une variable déterminante du jeu est changée : il s’agit de construire un Dobble à 3 symboles, et non plus à 8 symboles comme le jeu d’origine. Mais le principe du jeu reste inchangé, les règles restent les mêmes, ce sont juste les cartes qui sont modifiées. Bien sûr, l’intérêt ludique diminue considérablement, car jouer avec un Dobble à 3 symboles est relativement peu ludique, mais en revanche, un enjeu mathématique émerge et se trouve propulsé comme enjeu premier : comment sont construites les cartes du Dobble ?

Et alors que cet enjeu mathématique est inaccessible avec 8 symboles, il devient accessible mathématiquement dès l’âge de 10 ans, et la zone didactique peut être abordée systématiquement sur des enjeux mathématiques de raisonnement et de preuve.

[4] www.plaisir-maths.fr

Les élèves ont à leur disposition des feuilles de brouillon, des crayons, des feuilles avec des cartes à remplir puis à découper, des symboles à coller et de la colle. Les élèves ont le droit d'utiliser autant de matériel qu'ils le souhaitent.

Il y a un double travail de raisonnement à faire sur cette activité. Le premier consiste à vérifier que chacune des nouvelles cartes créées respectent les conditions imposées et le deuxième consiste à démontrer qu'on a atteint le nombre maximal de cartes possibles. La difficulté de ces raisonnements est croissante, et chacun d'eux permet d'introduire un type de preuves différent.

3. Vérification de chaque nouvelle carte

Le principe sur lequel s'appuie le Dobble est simple en apparence : « deux cartes, prises au hasard, ont toujours un, et un seul, symbole en commun ». Les élèves en comprennent facilement le sens car l'énoncé est similaire à celui de l'intersection de deux droites non parallèles. Toutefois, ils ont du mal à l'appliquer.

Pour les premières cartes créées, nous guidons les élèves pour qu'ils vérifient qu'elles respectent bien les conditions imposées. Nous cherchons à ce que les élèves mettent en place un mécanisme permettant de valider toute nouvelle carte créée. Pour cela nous nous appuyons sur l'expression « un, et un seul », et essayons d'instaurer une vérification du type « existence et unicité ». Nous insistons aussi sur le fait qu'il faut vérifier que la nouvelle carte fonctionne avec toutes les cartes déjà créées et non pas seulement avec une carte (que les élèves ont choisie au hasard).

4. La huitième carte

Le ressort didactique central de cette activité vient du fait que, si on exclut la solution infinie où un seul symbole est commun à toutes les cartes[5], il n'y a qu'un nombre limité de cartes possibles, et dans ce cas sept cartes. En introduisant la consigne demandant de faire *le plus* de cartes possible, l'objectif est de confronter les élèves à l'impossibilité de faire une huitième carte. C'est ce blocage que l'on exploite pour introduire le travail de la preuve.

a) Un blocage systématique

La façon dont se déroule l'activité mène inévitablement à la confrontation de l'impossible huitième carte. Nous avons fait en sorte que les élèves construisent les cartes une par une et essaient d'en créer le plus possible. Comme les élèves ne savent pas combien de cartes ils sont supposés créer, une fois qu'ils en ont créé sept, ils essaient systématiquement d'en construire une huitième.

Le matériel utilisé pour créer les cartes peut permettre d'accentuer la situation. En effet, nous avons fait le choix de fournir aux élèves un document avec des cartes à remplir, or sur une feuille au format standard se trouvent huit cartes à remplir. Les élèves ont reçu pour consigne de créer le plus de cartes possible et d'utiliser autant de feuilles que nécessaire. Il s'avère que les élèves sont persuadés qu'ils doivent faire au minimum huit cartes. Nous pourrions prédécouper les cartes, mais nous trouvons que la feuille de huit cartes est plus efficace pour confronter les élèves au problème de la huitième carte.

---

[5] La solution infinie (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7) est mathématiquement possible mais n'a pas d'intérêt ludique. En effet, le symbole en commun étant toujours le même, il n'y a pas de jeu à le chercher. Ainsi, lorsque les élèves trouvent cette solution, l'animateur l'accepte car elle est mathématiquement juste, mais relance l'activité de recherche chez les élèves en soulignant son peu d'intérêt ludique.

b) De l'expérimentation à la conjecture

Lorsqu'ils essaient de créer la huitième carte, les élèves procèdent par essais/erreur. Ils créent une carte et appliquent le mécanisme de vérification qu'ils ont développé dans la première partie de l'activité. Ils sont alors dans une démarche d'expérimentation avec un moyen de valider ou d'invalider leur carte hypothétique. Chaque nouvelle carte étant invalidé par leur mécanisme de vérification, les élèves sont amenés à faire l'hypothèse qu'ils ne peuvent pas faire de huitième carte.

Par ailleurs, le nombre de symboles disponibles sur la table est trop important pour que les élèves essaient toutes les combinaisons possibles, les élèves ne peuvent pas vérifier leur conjecture par l'expérience. Ils se trouvent confrontés à la nécessité de démontrer qu'il n'y a pas de huitième carte possible, de se convaincre qu'il n'y a pas de huitième carte possible.

c) Un raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'il n'y a pas de huitième carte possible, le plus simple est de faire un raisonnement par l'absurde en s'aidant d'un tableau répertoriant les cartes créées :

1re étape : Le tableau

Il est utile d'appuyer la démonstration sur un tableau tel que celui-ci après. C'est aussi à ce moment qu'il devient intéressant de modéliser les symboles par des chiffres pour simplifier les explications.

Cartes \symbole	1	2	3	4	5	6	7
Carte 1	X	x	x				
Carte 2	X			x	x		
Carte 3	X					x	x
Carte 4		x		x		x	
Carte 5		x			x		x
Carte 6			x	x			x
Carte 7			x		x	x	

2e étape : La démonstration par l'absurde.

Supposons que l'on puisse faire une 8e carte avec les 7 symboles utilisés.

Tous les symboles sont équivalents (utilisés 3 fois et combinés 1 fois avec tous les autres).

Pour notre huitième carte, nous choisissons un symbole, le 1 par exemple.

A cause de la carte C1 on ne peut utiliser ni le 2 ni le 3.

A cause de la carte C2 on ne peut utiliser ni le 4 ni le 5.

A cause de la carte C3 on ne peut utiliser ni le 6 ni le 7.

On ne peut donc pas former de nouvelle carte avec le 1 en utilisant seulement les 7 symboles.

Comme tous les symboles sont équivalents, on ne peut pas former de nouvelle carte avec les 7 symboles déjà utilisés.

Supposons que l'on puisse faire une 8e carte en ajoutant de nouveaux symboles.

On ajoute le symbole 8.

On crée une carte avec le symbole 8.

Il existe 2 façons de la compléter :

- en ajoutant un des 7 premiers symboles, disons le 1. Dans ce cas on retombe sur la première partie de la preuve et on ne peut utiliser aucune des 6 autres symboles. On doit ajouter un nouveau symbole : le 9. Dans ce cas les cartes numéros 4, 5, 6 et 7 n'ont aucun symbole en commun avec la nouvelle.e
- n ajoutant 2 nouveaux symboles (9 et 10), mais dans ce cas aucune carte n'a de symbole commun avec la nouvelle.

Dans tous les cas il est impossible de former une huitième carte.

VI. CONCLUSION

Il existe de nombreuses manières de vulgariser, mais la façon de définir une trajectoire dans les différentes zones (magique, didactique ou maîtrisée) est déterminante selon nous de la capacité de l'action à réaliser ses objectifs auprès du public. Qu'est-ce que le vulgarisateur donne à comprendre ? A apprendre ? Quels savoirs tente-t-il de rapprocher de son public, ou au contraire, qu'est-ce qu'il laisse –intentionnellement ou non - inatteignable ?

A travers l'étude et la description de plusieurs actions de diffusion des mathématiques autour du Dobble, nous avons cherché à montrer comment les processus de vulgarisation et d'enseignement peuvent être articulés, et qu'il est possible d'étudier une action de diffusion, non pas comme un bloc unique, mais comme une succession de moments où les enjeux et les intentions peuvent évoluer, rendant ainsi possible l'existence de moments d'enseignement dans une action de vulgarisation, et réciproquement des de moments de vulgarisation dans une action d'enseignement.

REFERENCES

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Bourrigan M. (2011) *Dobble et la géométrie finie*, Images des Maths, http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html

Deléglise M. (2013) *Plan projectif, arithmétique modulaire et Dobble.* http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/PDF/dobble.pdf

EL JJ (2014) *Du simple au Dobble.* Choux romaneso, vache qui rit et intégrale curviligne, http://eljjdx.canalblog.com/archives/2014/07/06/30181178.html

Pelay N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Lyon I, Lyon, mai 2011, https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/

Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L. et Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle — Actes du colloques EMF2012* (Spe4, pp. 1914-1925).

Sousa Do Nascimento S. (1999) *L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et de techniques françaises*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.