Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA DIFFUSION: UN LIEU POUR UNE MATHÉMATIQUE PLUS HUMAINE?

Christian MERCAT*

Résumé – Cet article rend compte de quelques expérimentations de vulgarisation des mathématiques tentant de mettre en œuvre certains aspects kinesthésiques, spatiaux, auditifs et visuels peu exploités dans l'enseignement des mathématiques actuel. Des arguments concernant cet enseignement proposent le terrain de la vulgarisation comme plus propice à de telles expérimentations, visant à modifier l'appréhension du public de la mathématique, la plaçant dans une dimension plus globale et humaine, convoquant plusieurs sens. Nous décrivons sommairement les activités « webcam conforme », « rebond », « clochettes de Galilée » et « danser comme une fonction », ainsi que quelques résultats très partiels, et pour tout dire peu concluants, les concernant.

Mots-clefs : mathématique incarnée, kinesthésique, visuelle, spatiale, tactile

Abstract – This article describes some experimentations in popularization of mathematics attempting to bring certain latent humane capabilities into service such as visual, aural, tactile, kinaesthetic and spatial perceptions, which are under exploited in mathematics teaching nowadays. Some arguments are given hinting at the fact that popularization is better suited than teaching for such an endeavour, aiming at changing public view of mathematics, through a more global and humane apprehension involving several senses. We describe shortly the following activities: “conformal webcam”, “bouncing ball”, “Galileo bells” and “dancing like a function”, together with very partial and inconclusive results about them.

Keywords: embodied mathematics, kinaesthetic, visual, spatial, tactile

I. INTRODUCTION

La manière dont nous enseignons les mathématiques, dirigée en partie par la manière dont nous l'évaluons, en particulier à travers les examens et concours nationaux tels le baccalauréat, le brevet des collèges et les concours aux grandes écoles en France, promeut une certaine conception des mathématiques qui va à l'encontre de nombre de ses intérêts :

- instituée comme outil de sélection, la mathématique est clivante socialement, entrainant dédain, rejet et phobie. Elle n'est en effet ni comprise ni présentée comme, avant tout, un « simple » outil de résolution de problèmes parmi d'autres. S'ensuit un effet de contrat sclérosant sur les « métiers » respectifs des enseignants et des élèves (Brousseau, 1988). Paradoxalement les nombres ou le raisonnement formel sont parfois utilisés dans la cité à contre-sens comme argument d'autorité, pour couper à

* S2HEP EA 4148 – IREM de Lyon – Univ. Claude Bernard Lyon 1 – France – christian.mercat@math.univ-lyon1.fr

Mercat C. (2015) La diffusion : un lieu pour une mathématique plus humaine ? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 934-943.

tout débat et faire sérieux ;

- naturalisée dans une technologie omniprésente, la mathématique, pourtant au cœur de plus en plus d'activités dématérialisées et numérisées, est rendue invisible et transparente par des interfaces « intuitives » prenant à leur charge les aspects techniques. Cette naturalisation est à l'œuvre pour le grand public mais aussi pour les enseignants qui peinent à reconnaître dans la technologie quoi que ce soit de familier pour eux ou d'exploitable dans la classe, ou inversement dans ce qui est enseigné des outils effectifs pour appréhender le monde ;
- cantonnée souvent à la maîtrise de techniques de manipulations d'expressions écrites, la mathématique enseignée est pauvre d'un point de vue esthétique, sensoriel, dynamique et créatif, donnant une fausse image du travail du mathématicien. En conséquence, elle attire trop peu les élèves talentueux, qui n'envisagent pas sa maîtrise comme une corde à leur arc créatif.

Le champ de l'enseignement des mathématiques est donc *a priori* un lieu peu propice à mettre en œuvre les potentialités humaines latentes favorisant une mathématique plus globalement humaine. J'entends par là une mathématique plus proche de l'expérience du chercheur, convoquant tous ses sens, s'appuyant sur les outils conceptuels et sensoriels que nous ont légués des centaines de milliers d'années d'évolution humaine (Lakoff, Núñez, 2000) :

- une appréciation spatiale,
- une liberté de mouvement pour explorer,
- une vision de chasseur-cueilleur extraordinairement efficace,
- des capacités de manipulation et de sensation bien supérieures à la maîtrise d'une craie, d'un clavier ou d'un stylo,
- une audition et un système d'énonciation verbale riche et complexe.

C'est peu de dire que l'enseignement contemporain des mathématiques ne convoque pas tous les sens : il s'agit essentiellement, comme le dit Victor Bret (2014), de manipuler des symboles, dessinés sur un rectangle, d'ardoise, de verre ou de papier. La technologie actuelle, même « tactile » et « intelligente », permettant une plus grande efficacité de quelques moyens d'expressions très restreints mais fonctionnels dans la relation homme-machine, contraint et formate la relation homme-homme, et ainsi accélère cet appauvrissement de l'expressivité humaine pour la réduire à la manipulation de symboles. Même si la maîtrise de l'abstraction et la capacité de généraliser sont visées, enseigner uniquement par ce moyen laisse sur le côté bon nombre d'élèves.

Bien-sûr l'enseignant « gesticule », s'exprime et donne chair à ces symboles par son jeu d'acteur et de chef d'orchestre de la classe. Les affects dont l'élève investit son professeur et son groupe-classe sont dans ces conditions primordiaux pour que l'expérience cognitive laisse des traces tangibles dans cette merveille de la sélection naturelle qu'est notre mémoire, tirant sans cesse et à notre insu des corrélations, des analogies et des conclusions entre les expériences tentées, présentes et passées, pour peu qu'elles nous impliquent personnellement et émotionnellement.

Il s'ensuit que de nombreux élèves, dont l'esprit n'est pas formaté pour ces formes étroites d'apprentissage, et qui auraient besoin qui de mouvement, qui de couleurs, qui de sensations tactiles, olfactives ou auditives pour mémoriser, sont astreints à inventer des stratégies de contournement compliquées et peu efficaces, gratouillant un doudou, traçant des lettres dans l'air, chantonnant pendant leurs leçons, ou passent carrément à côté des apprentissages : « les maths, ça ne me concerne pas » portent-ils, fièrement ou pas, à leur boutonnière.

Une hypothèse structure les quelques activités que nous allons décrire dans le présent article : convoquer des capacités sensorielles et des stratégies peu utilisées dans l'enseignement mathématique contemporain peut contribuer à rapprocher le participant de l'expérience multi-sensorielle et pleinement humaine du chercheur. Nous présentons quelques éléments de résultats de nos expérimentations sur certaines activités, mais admettons dès maintenant que ceux-ci ne permettent pas de conclure sur la validité de notre hypothèse, et que de plus amples études systématiques sont nécessaires. En effet, pris dans la position réflexive d'animateur scientifique, je ne me suis pas donné les moyens de mesurer cet aspect, qui ne m'est apparu comme essentiel qu'après coup. Par exemple, au cours d'opérations de vulgarisation ponctuelles dans des établissements, j'ai pu mener des entrevues avec des élèves brillants et motivés et même si elles permettent d'établir que les activités proposées les ont intéressés et qu'ils ont, au moins sommairement et localement, compris quelque-chose, je ne peux conclure ni pour la motivation ou le savoir à moyen terme, ni pour un public moins motivé d'emblée, qui ne serait pas resté assez longtemps autour des animations. Je proposerai donc, plutôt que des conclusions mal étayées, des perspectives d'observations futures.

II. LES ACTIVITES

Ces activités ont été conçues pour être réutilisables. Leur contenu, en particulier logiciel, est ouvert et disponible au téléchargement. Elles se veulent d'un niveau technologique assez peu élevé, ne requérant presque[1] rien qui ne soit déjà présent dans une salle de classe. L'analyse didactique de ces activités est assez faible et demande à être précisée. Leur intérêt est de composer un ensemble cohérent sur lequel des questions de recherches ont été développées et peuvent maintenant être testées. L'hypothèse principale à tester sera : « convoquer des modes d'appréhension du réel plus sensoriels permet de réduire la distance entre la réalité présentée et sa modélisation dans l'esprit des participants » mais des études sur des aspects plus ciblés de cette distance pourront porter sur la motivation et l'attention continue, l'imagination et la compréhension (quelles perceptions, quelles images, quel codage du phénomène?), la mémorisation et la réflexion concernant l'activité expérimentée.

1. *Webcam conforme*

L'activité « webcam conforme » prend sa source dans mon travail au sein de l'équipe de géométrie discrète de l'université technique de Berlin, autour des professeurs Alexander Bobenko et Ulrich Pinkall. Issue d'un travail de recherche, cette installation est utilisée comme une machine à fabriquer des images interactives, afin de forger des icônes visuelles pour des objets tels que « les zéros du polynôme », « la spirale logarithmique », « l'inversion de Möbius », « la tête au carré », « le polynôme de Taylor », « la trompe d'éléphant de la série », dans l'espoir qu'elles pourraient être des jalons conceptuels habitant l'imaginaire des participants ; des jalons vers lesquels progresser lors de leurs études, des destinations, lointaines, exotiques et pourquoi pas désirables et attrayantes du savoir mathématique, qui ne sont communément jamais convoquées, ou illustrées seulement par des formules angoissantes et des photos noir et blanc fanées d'hommes barbus. Ces images étant interactives, elles demandent au public de « jouer » avec, de faire des gestes, des grimaces, des mouvements de bras, et les convoquent : « c'est de moi dont il s'agit »... Cette installation a été expérimentée à de très nombreuses reprises dans des contextes de diffusion des mathématiques, telles les fêtes

[1] Un ordinateur muni d'une webcam est courant dans la classe, mais une Kinect® l'est moins...

de la science, à Montpellier et Lyon, comme installation dans des lieux d'exposition, bibliothèque, hall, en préalable à une conférence sur le sujet de la multiplication comme transformation géométrique ou plus en profondeur des applications conformes. Son objectif va de la simple interpellation visuelle des participants, qui voient leur image captée et déformée de manière singulière, à l'utilisation en tant qu'outil pédagogique pour enseigner la théorie de l'analyse complexe à l'université. En tant qu'installation, elle est le plus souvent accompagnée d'un poster qui explique son fonctionnement et la théorie qui la sous-tend. Les curieux s'étonnent quand ils prennent conscience que c'est leur image qui est déformée, ces images les concernent, parlent d'eux ! Ils commencent à chercher la caméra, à saluer, se pointer du doigt, de manière interpersonnelle ou réflexive, se déplacer et tentent de se positionner pour obtenir des effets visuellement intéressants, s'appuyant sur une forme spatiale de compréhension fondée sur la rétroaction de leur exploration. Quand un animateur est présent, les participants peuvent demander le fichier image, de leur « tête au carré » ou de la répétition spiralée hypnotique d'une singularité logarithmique. Certains sont franchement dérangés de voir leur image transformée et malmenée mais la plupart sont amusés et peuvent rester longtemps à modifier les paramètres à la recherche d'un effet visuel précis. L'analyse *a priori* de cette activité est trop complexe pour être décrite dans le présent article, je renvoie à mon article sur le site *Images des mathématiques*[2] pour une description détaillée. Disons simplement que, de même qu'une carte météo permet de lire la température en chaque point du domaine en coloriant *l'espace d'arrivée*, chaque point z de l'écran est colorié par la couleur du point image $f(z)$ qui est un point de l'image captée par la caméra. Ainsi, localement, on comprend dans le même regard la valeur de la fonction par la couleur du point mais également la valeur de sa dérivée par la raison de la similitude locale, qui y opère un agrandissement ou une réduction. En particulier les points où la dérivée est nulle sautent aux yeux. Les données les plus consistantes que je présente ici décrivent l'interaction avec un groupe d'élèves d'un établissement très favorisé de Lyon lors de la semaine des mathématiques 2013. Je fais découvrir à un groupe de quatre filles en première scientifique la notion de similitude, de monôme (surtout $z \longmapsto z^2$) et de polynôme. Je leur attribue à chacune un rôle que nous avons défini sur les exemples précédents : la gardienne du zéro a une cible colorée dont elle cherche les images, la spécialiste des endroits où la dérivée s'annule aime faire des grimaces, la compteuse du degré a le bras long et la « réelle » n'observe que la fine droite au milieu de l'écran. Je leur présente un nouveau polynôme, $z \longmapsto z^3 - z$ et leur demande de me le décrire.

- Alors, où sont les zéros ?
- (E1 bougeant légèrement sa cible pour bien la centrer à l'origine, montrant du doigt à l'écran les trois images de cette cible) : là, là et là.
- C'est-à-dire ?
- (E1) -1, 0 et 1.
- Où la dérivée s'annule-t-elle ?
- (E2 bougeant la tête jusqu'à être horriblement déformée avec deux bouches et quatre yeux) : ici la tête au carré et... (tâchant de bouger en même temps sa main droite pour que son doigt s'éclate en une croix) là !
- C'est où ça ?
- (E2) Entre -1 et 0 et 1, vers -1/2 et +1/2.
- Et le degré ?
- (E3) On voit là [sur la formule] bon, il y a un trois, mais... [elle tourne lentement son bras, sa main tournant autour de la limite de l'image, fixant des yeux une des images de sa main] un quart, un demi, un, un et demi, ah la moitié, deux, deux et demi, trois, j'ai fait le tour complet une fois et il m'en a fallu trois ! Et on se voit en tout trois fois ; [en agitant une main et en la pointant sur l'écran de l'autre] un, deux, trois, tout est triplé. C'est de degré trois.
- Et comme fonction réelle ?

2 http://images.math.cnrs.fr/Applications-conformes.html

- (E4 tenant son index levé et le bougeant de gauche à droite) À gauche on est la tête en haut puis en bas jusque là, puis de nouveau en haut.
- Et ça veut dire quoi ?
- En bas, ça descend ; en haut, on est multiplié par un nombre positif, la dérivée est positive, ça monte.
Elle est d'abord croissante puis, décroissante tout ici, puis croissante à partir de là.

Les arguments que ces élèves donnaient faisaient sens pour elles, étaient fondés sur l'expérience personnelle directe, leurs mouvements et leurs sensations corporelles et visuelles plutôt que sur des preuves statiques et rhétoriques.

Figure 1 *– Des enfants jouent avec la webcam conforme*

Ce groupe est resté avec moi plus de vingt minutes, chacune a compris son rôle mais il est difficile d'estimer si ces différents rôles faisaient vraiment sens pour elles, étaient coordonnés en une compréhension globale de ce polynôme en particulier, de la notion de polynôme en général, ou ce qu'il a pu rester de leur expérience. Encore une fois, l'intérêt premier de cet atelier dans ce cadre était surtout de montrer de belles images, des jalons visuels, accrochées à des jalons verbaux tels que « polynôme », « spirale logarithmique », « exponentielle », « fraction rationnelle », de faire interagir physiquement les élèves avec des mathématiques, qui leur demandent de bouger, qui opèrent sur eux (enfin sur leur image). Même si, en marge il était également question de faire passer la notion de dérivée comme taux d'accroissement, ici facteur de « zoom », d'agrandissement ou de réduction, il serait intéressant de savoir si ces jalons visuels ont aidé les jalons verbaux à persister jusqu'à ce qu'un enseignement traditionnel leur donne consistance. Je ne me suis pas donné les moyens d'étudier cette question. Parmi les participants à cette installation, combien retiendront comme icône pour la fonction carrée, à la place de la parabole réelle, leur tête au carré, monstre à quatre yeux et deux bouches ?

2. *Rebond*

L'activité « rebond » a été expérimentée pendant trois années consécutives dans le contexte de stages MathC2+ conduits à l'IREM de Lyon, à l'Institut Camille Jordan de l'Université Claude Bernard Lyon 1, en coopération avec l'association Plaisir Maths, notamment son président Nicolas Pelay et des animatrices et animateur scientifiques, Laura Pallez, Damien Lucas, Alix Boissière et Alix Laubez. Il s'agissait de l'activité « fil rouge » conduite dans ce stage de quelques jours (3 ou 4) d'initiation à la recherche autour de la thématique des mathématiques et du cinéma. Le public était composé d'élèves de seconde de l'Académie de Lyon. Ceux-ci ne se connaissaient pas et sont sélectionnés par leurs professeurs pour leur potentiel en mathématique mais pas nécessairement issus d'un milieu socio-culturel favorisant la poursuite d'études scientifiques. Ces stages étaient structurés autour d'exposés de chercheurs éclairant le sujet du cinéma et des mathématiques et apportant des éléments théoriques et pratiques qui étaient réinvestis dans l'activité « rebond ». Celle-ci se déroulait sur trois séances d'une heure et demie sur le stage. Son but était de fabriquer un petit film de synthèse du rebond d'une balle. Cette synthèse était le résultat de l'analyse puis de la modélisation du mouvement d'une balle physique lors de son rebond. Il ne s'agissait nullement d'expliquer les raisons physiques du mouvement, mais simplement, de manière phénoménologique, de décrire la trajectoire.

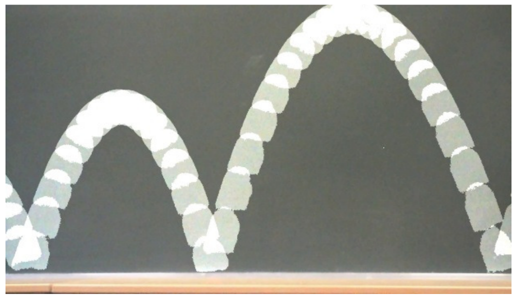

Figure 2 *– Une prise de vue fondue du rebond d'une balle*

Nous rapportons en particulier ce qui s'est passé dans le deuxième stage, en juin 2013, pour lequel nous avons le plus de données fiables, mais les autres stages étaient essentiellement similaires. Répartis par groupe de 4 ou 5, les élèves ont à tourner quelques séquences filmées du rebond d'une balle donnée, puis à les analyser à l'aide d'un logiciel de vision par ordinateur qui enregistre les données de position et de temps. Ces données sont ensuite transférées, exploitées et modélisées sur des calculatrices puissantes offrant des capacités d'analyse de données tabulaires, de représentation graphique et d'interpolation (FX Casio 35+ offertes par le fabricant), et un logiciel d'analyse et de visualisation de données (Geogebra) disponible sur les ordinateurs portables sur lesquels la séquence a été tournée. Les élèves sont libres de prendre une nouvelle prise pour avoir de nouvelles données si elles s'avèrent corrompues ou trop peu typiques. Un ordinateur effectue la prise de vue, par l'intermédiaire d'une webcam, et l'analyse se passe en direct : des points rouges sont surimposés à l'image, permettant de comprendre de quoi les données produites sont les coordonnées. Des essais avec la main ou le visage dans le champ de la caméra amènent des rires parmi les élèves (de nombreux points rouges émaillent l'image), mais participent à construire une relation d'intégrité et de proximité par rapport aux données : « ces données, c'est moi qui les ai produites, elles n'ont pas été nettoyées ». La production directe de données personnelles, dépendantes du contexte concret et immédiat de la prise de vue, permet que l'écrémage des points de bruits par exemple, ou des bouffées de points parasites, ait un sens, quasiment kinesthésique, dans tous les groupes, en témoignent leurs gestes fréquents à propos de la trajectoire de la balle devant des tableaux de nombres. De plus, les données, pourtant à distance dans le temps et l'espace (sur leur calculatrice, plusieurs minutes plus tard), sont analysées dans ce contexte et continuent à faire sens, s'aidant des données brutes de la visualisation du film pour déterminer les circonstances d'un événement dont ils observent la trace dans les données, au contraire de données « mortes » qui, sorties de leur contexte, ne signifient pas grand-chose pour les élèves.

Les procédures attendues étaient les suivantes :

- identifier les traces comme des portions de paraboles ;
- se placer dans un repère facilitant l'écriture (où le plan de rebond est d'ordonnée nulle) ;
- déterminer les paramètres des paraboles (le choix de la balle et le cadrage influent) ;

- choisir le paramétrage le plus adapté (sous la forme $a(x\text{-}s)^2+h$, où s est l'abscisse du sommet, h son ordonnée) et identifier ces paramètres comme ceux pertinents à déterminer ;
- remarquer que le paramètre a peut être considéré comme constant : *via* des comparaisons entre les groupes, à orchestrer par les animateurs, on met en évidence sa dépendance aux conditions initiales, en particulier la vitesse horizontale, mais sa relative constance à l'intérieur d'une séquence ;
- remarquer, et c'est le point crucial mathématiquement, que les hauteurs successives décroissent, à peu de choses près multipliées par une constante, de rebond en rebond. Un travail préalable sur tableur autour de « trouver l'élément manquant de la suite » sur des suites géométriques pures ou brouillées, induisait les élèves à cette conclusion, la notion de suite géométrique n'étant vue qu'en classe de première. Cette constante dépend de la balle et de la surface de rebond ;
- en déduire numériquement une formule pour les positions successives du sommet.

Nous avons récupéré les fichiers produits sur les ordinateurs portables pour chaque groupe et quelques fichiers sur calculatrices. L'utilisation sur la calculatrice de l'outil de régression quadratique, donnant les paramètres d'une parabole interpolant des données, est la différence la plus notable entre le travail individuel sur calculatrices et le travail plus collectif sur ordinateur. En effet, avec le logiciel de géométrie interactive, une première stratégie consistait à prendre les points extrémaux et médian des données, afin d'estimer le sommet et les autres paramètres de la fonction quadratique, mais le résultat était souvent assez mauvais. La plupart des groupes ont alors évolué vers le choix de modifier à la main trois paramètres de manière à définir une fonction quadratique qui soit visuellement au plus près des données. Aucune stratégie comparable de détermination par approximation manuelle des paramètres n'était apparue sur calculatrice jusqu'à ce que la découverte de la fonction de régression quadratique se répande parmi les groupes. Cette découverte entraina alors la recherche de son équivalent dans le logiciel sur ordinateur, amenant à des résultats numériquement plus satisfaisants, soit par l'interpolation quadratique de trois points libres soit par l'interpolation de la liste toute entière. Pour autant, la trop grande confiance dans les valeurs données par l'interpolation s'est avérée un frein à la modélisation : relativement peu d'élèves avaient assez de maturité pour évaluer comme pertinent le fait de modéliser un paramètre numériquement fluctuant par une constante. Prendre conscience de l'ordre de grandeur (faible!) de la fluctuation ne s'est imposé qu'après une mise en commun des résultats des différents groupes et un débat où il y avait de la résistance. Étant donné qu'il s'agissait de reproduire en un film de synthèse le mouvement de la balle, l'intérêt de la modélisation, avec ses paramètres modifiables à volonté, pas seulement reproduisant les données mais générant de nouvelles familles de courbes, n'est apparu à certains élèves clairement qu'à la fin, quand les données brutes numérisées ne cadraient pas avec les choix scéniques et graphiques de l'animation.

La conclusion de cette expérimentation, hormis son relatif succès parmi les participants, est l'impression, à confirmer par une analyse plus fine et détaillée, d'un bon degré de conscientisation par les élèves du sens et de l'intégrité des données analysées, permis par une production *in vivo* de ces données, comparées à des données *in vitro*, suspectées d'être nettoyées et simplifiées, obtenues par un procédé plus long ou complexe et non directement compréhensible *via* une rétroaction simple validant ou invalidant des conceptions naissantes. Un protocole expérimental serait à mettre au point pour mesurer cette distance entre le sens et les données pour les élèves, afin de comparer différentes situations de modélisations, allant de données dynamiques, très proches du concret, d'une intégrité vérifiée directement par le contexte personnel et sensible de l'élève, puis abstraites peu à peu dans une modélisation très progressive, comme ce que nous avons tenté de faire ici, à des données statiques, *Deus ex machina,* imposées par l'enseignant et dont le sens n'est basé que sur des explications discursives.

a) Clochettes de Galilée

L'activité « clochettes de Galilée » est relativement similaire pour une partie à l'activité rebond, car elle s'appuie sur la vision par ordinateur, mais elle sollicite également l'ouïe comme élément essentiel de décision. Sur le plan notionnel, elle tente également de mettre en place une abstraction progressive menant à une modélisation de plus en plus générale autour de la notion d'alignement, dans des espaces allant du concret des positions physiques des billes à l'abstrait de la vitesse en fonction du temps et des accélérations en fonction des pentes.

Cette activité, développée dans le cadre du projet européen mcSquared, reproduit l'expérience célèbre de Galilée qui, souhaitant étudier la chute d'une bille le long d'un plan incliné, se voit limité dans sa capacité à objectiver cette expérience, car la bille roule trop vite ! Il a alors l'excellente idée de disposer des clochettes le long du trajet, assez légères pour ne pas perturber la bille, mais assez sonores pour être clairement distinguées. Il dispose alors ces clochettes de manière à obtenir des sons à intervalles très courts, à un rythme régulier, ce que l'oreille est tout à fait capable de reconnaitre. Il est pédagogiquement intéressant de montrer qu'il est légitime de s'appuyer ainsi sur l'acuité particulière d'un sens disponible à l'humain pour faire de la science ! Nous avons tourné des petites séquences filmées de la bille glissant le long d'une pente à différentes inclinaisons, et la bille tombe effectivement si vite qu'il est bien difficile de la voir plan par plan! La reconnaissance visuelle par ordinateur peut cependant numériser ces séquences et procurer des données. Cela ne sauve pas les élèves de la frustration de Galilée car ces données sont assez « traditionnelles » : du fait de sa fugacité, l'expérience est moins prégnante que dans l'activité « rebond ». Mais la version « clochettes » de cette activité emporte beaucoup mieux l'assentiment ! Les données qui en sont issues font *a priori* sens. Cependant, notre expérience est qu'il est techniquement assez difficile de mettre en œuvre l'activité « clochettes » réellement dans la classe. Nous avons ainsi développé une version numérique de celle-ci, qui complète l'acquisition vidéo d'une bille réelle présentée dans un premier temps. Une simulation informatique avec le logiciel Cinderella permet de positionner des points le long d'un segment pentu, de lancer une bille virtuelle dessus. Les points émettent alors des sons de clochette quand la bille les approche. On peut ainsi positionner les points jusqu'à être satisfait de la régularité du rythme entendu et commencer à raisonner sur les mesures donnant les positions des « clochettes ».

Tout d'abord chaque groupe d'élèves est sensé travailler sur une vidéo avec une pente donnée. La première constatation est que les points images de la bille sont alignés dans l'espace physique (ils sont sur un segment). Une formule de la droite est trouvée, soit en prenant deux points libres qu'on manipule jusqu'à visuellement être satisfait, soit en introduisant l'outil « boîte noire » de régression linéaire. La pente de cette droite est ainsi estimée. On constate ensuite que le mouvement est accéléré. On calcule les vitesses entre deux images successives à l'aide du tableur. On constate que ces vitesses augmentent toujours approximativement de la même quantité : il est raisonnable de les modéliser par une suite arithmétique ou encore, géométriquement (mais dans un espace abstrait), de modéliser les points (temps, vitesse) comme alignés. Encore une fois, on estime numériquement la pente de cette droite, c'est l'accélération a. La distance physique entre deux points à deux instants différents est comprise comme l'aire sous le graphe des vitesses, qui est un triangle, ce qui permet d'obtenir la formule de la position $\frac{1}{2} a t^2$. Le travail de tous les groupes est collecté, l'ensemble des points (pente, accélération) est dressé et là encore un alignement est proposé comme modélisation. C'est de plus une fonction linéaire, l'accélération est proportionnelle à la pente.

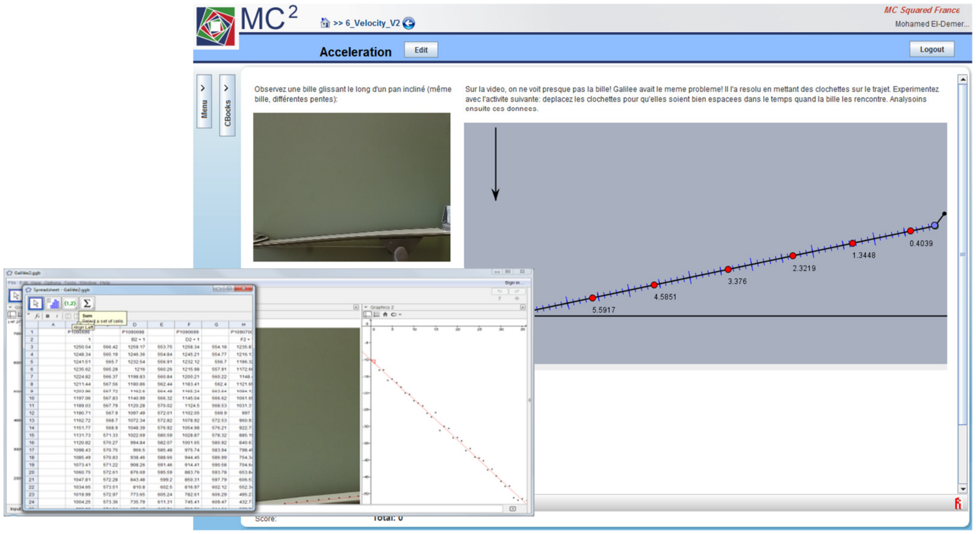

Figure 3 *– L'activité «Clochettes de Galilée»*

Dans un second temps, l'expérience est conduite avec l'activité clochette. Une progression quadratique des distances parcourues pour un temps donné est mise en évidence de la même manière, mais cette activité est plus intégratrice : plutôt que des données numériques, la preuve est fondée sur une disposition spatiale des clochettes et un rythme constant estimé à l'oreille. De plus, la pente n'influe sur le rythme qu'en modifiant sa vitesse mais pas sa régularité. Ainsi la proportionnalité entre la pente et l'accélération est concrètement estimée.

Il serait intéressant de mesurer la profondeur du sens que les élèves confèrent aux données dans ces différentes situations : les clochettes réelles, les clochettes simulées, l'expérience réelle (inexploitable numériquement), les vidéos (peu exploitables) et les vidéos numérisées par reconnaissance optique.

b) Danser comme une fonction

Cette activité, développée dans le cadre du projet européen mcSquared, provient en substance de l'exposition du Mathematikum de Gießen en Allemagne.

Le graphe d'une fonction est affiché sur un écran, avec un compte à rebours. Passé ce temps, un point est affiché, dont l'abscisse est le temps et l'ordonnée est la distance du participant à l'écran. Le participant voit ce point et sa trace et doit se déplacer de telle manière que l'ensemble des points décrivant son mouvement soit aussi proche que possible du graphe cible. Un score est alors affiché. Les stratégies attendues dévoilant de fausses conceptions et la difficulté à identifier variables spatiales et temporelles sont des tentatives de contrôler la variable temps, l'inversion avant/arrière pour une fonction croissante/décroissante, la prise en compte trop peu fine de la pente pour le contrôle de la vitesse.

Cette activité a été expérimentée principalement trois fois, à la fête de la science 2014 à l'université Claude Bernard Lyon 1, à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique et au forum des mathématiques 2015 d'Aix en Provence.

Les participants doivent tout d'abord prendre conscience que la variété de leurs mouvements est réduite à un seul nombre et que c'est la distance à l'écran. Pendant les premiers jeux, certains participants continuent à confondre le temps, qui n'est pas une variable libre, et leur position gauche/droite, tentant de « revenir en arrière » en se déplaçant sur la gauche pour réparer un mauvais début. Modéliser, c'est choisir certaines caractéristiques et en éliminer d'autres, comprendre et vivre cette réduction dans son corps n'est pas une chose évidente dans un monde où les interfaces tactiles intuitives prennent effectivement en compte, à notre insu, un nombre conséquent de paramètres. Ici, la modélisation est pauvre à dessein. L'ajustement de la vitesse en fonction de la pente se fait assez rapidement et une pente forte met le participant dans une tension de préparation où la galopade en arrière ou en avant s'affine avec les parties successives. De très bons scores après trois ou quatre parties sont la norme pour des fonctions relativement simples. Ce choix du catalogue de fonctions est la variable didactique principale, ajustée en fonction du public.

III. CONCLUSION

Ma pratique d'enseignant et de vulgarisateur m'a amené à tenter de prendre en compte dans les activités que je mets en œuvre des aspects peu présents dans l'enseignement des mathématiques comme le mouvement, l'ouïe et la vue. La vulgarisation semble un lieu où un contrat didactique et ludique est probablement plus facile à établir que dans la salle de classe, « réconciliant » à peu de frais le public avec les mathématiques. Cependant l'évaluation des apprentissages ou du changement de perception des mathématiques nécessiterait des études plus approfondies que celle-ci. L'hypothèse principale que je me propose d'explorer ultérieurement est que la perception directe d'un phénomène aide à réduire la distance avec sa modélisation : des données « près » du phénomène sensoriel entrainent une meilleure modélisation de celui-ci. La question de l'opportunité et de la facilité de la transposition dans la classe d'activités convoquant les sens *avant* la raison reste ouverte.

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été partiellement financée par le septième programme cadre de l'Union Européenne (FP7/2007-2013) dans le cadre du projet n° 610467 « M C Squared ». Cette publication ne reflète que les opinions de l'auteur et l'Union n'est pas responsable de l'utilisation qui pourrait être faite des informations qui y sont exprimées.

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CÉRÉN-CRDP.

Bret V. (2014) Humane Representation of Thought : A Trail Map for the 21st Century. *SPLASH Keynote ACM SIGPLAN* doi 10.1145/2660252.2661746

Brousseau G. (1988) Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Daskolia, M., Kynigos, C. (2012) Applying a Constructionist Frame to Learning about Sustainability. *Creative Education* 3, 818-823.

Lakoff G., Núñez R. E. (2000) *Where Mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books.

Mercat Ch. (2015) *Modelling and mathematics*. TEDxINSA May 2015.