Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

QUELLE PLACE POUR UNE DÉMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHÉMATIQUES DANS LE CADRE D'UN ATELIER DE RECHERCHE INTERDISCIPLINAIRE ?

Benoît RAY*

Résumé – Dans cette contribution, nous présentons deux exemples d'ateliers scientifiques interdisciplinaires dans lesquels les mathématiques interviennent en relation avec la physique ou avec la philosophie. Après avoir présenté le dispositif dans ses grandes lignes, nous décrivons les travaux effectués par les élèves. En questionnant la place des différents acteurs, nous tentons ensuite de dégager en quoi les conditions de ce dispositif ont permis aux élèves de pratiquer une démarche d'investigation dense et d'entrevoir ce qui est constitutif de l'activité scientifique d'un chercheur.

Mots-clefs : démarche d'investigation en mathématiques, recherche interdisciplinaire, modélisation, ateliers scientifiques, projet « Tous Chercheurs ».

Abstract – In this contribution, we present two examples of scientific cross-disciplinary field experiences in which mathematics interfere with physics or philosophy. After presenting the main features of the workshop, we describe the students 'work. Then, by questioning the different actors, we try to outline in what way this type of organization allows the students to follow a thorough inquiry-based approach and to catch a glimpse of what is at stake in a scientific researcher's activity.

Keywords: inquiry-based mathematics, interdisciplinary research, mathematical modelling, science workshops, "Tous Chercheurs" project.

Dans tous les domaines scientifiques, les actuels programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée préconisent la pratique d'un enseignement tourné vers la démarche d'investigation. Les travaux de recherche en didactique mettent en évidence la pluralité des démarches d'investigation en mathématiques ; elles montrent également que ces pratiques trouvent difficilement leur place dans l'enseignement des mathématiques (nous nous référons aux travaux du groupe de travail n°10 du colloque EMF 2012 et au rapport de la Commission Inter-IREM Lycée). En France, ces démarches semblent plus facilement adoptées par les enseignants des disciplines dites expérimentales (sciences physiques, sciences de la vie et de la terre, technologie). Nous nous posons donc la question suivante : quels moyens se donner pour faire vivre d'authentiques pratiques interdisciplinaires engageant les mathématiques ?

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons expérimenté un dispositif particulier hors de la classe de mathématiques. Notre contribution, qui consiste en un retour sur cette expérience, s'inscrit essentiellement dans l'axe 3 du GT10 : « rôles et responsabilités des élèves ».

---

* Enseignant Expatrié à Mission de Conseil Pédagogique pour le second degré – Lycée Pierre Mendès - France – TUNIS (établissement en gestion directe de l'Agence pour l'Enseignement Français à l'Étranger)

Ray B. (2015) Quelle place pour une démarche d'investigation en mathématiques dans le cadre d'un atelier de recherche interdisciplinaire ? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 891-902.

Après avoir resitué le projet « Tous Chercheurs » dans le cadre des « Actions Pédagogiques Pilotes » en nous interrogeant sur l'implication des mathématiques, nous décrirons les recherches effectuées par nos élèves dans deux ateliers faisant intervenir les mathématiques, les sciences physiques et la philosophie. Nous tenterons ensuite de montrer en quoi une telle activité de recherche est de nature à mettre en valeur des compétences transversales, à développer une vision interdisciplinaire de la recherche scientifique, à s'interroger sur les enjeux épistémologiques des sciences et à pratiquer une démarche d'investigation consistante.

I. LE PROJET « TOUS CHERCHEURS » ET LES « ACTIONS PEDAGOGIQUES PILOTES » ; QUESTION DE L'INTERDISCIPLINARITE ENTRE MATHEMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES

1. *Le projet « Tous Chercheurs » et les « Actions Pédagogiques Pilotes »*

L'opération « Tous Chercheurs » a vu le jour en 2011, sous l'impulsion de l'association du même nom (association loi 1901), qui œuvre pour la promotion de la démarche scientifique auprès du grand public. Par le biais de stages dans lesquels une large part est accordée à l'expérimentation et au débat, elle tente de faire découvrir la pratique actuelle des sciences dans les laboratoires de recherche.

> Notre but est que les citoyens de tous âges puissent faire la différence entre un fait scientifique et une opinion et argumenter leurs prises de position. (http://touschercheurs.fr/)

« Tous Chercheurs » propose dans les établissements scolaires un dispositif permettant de poursuivre les objectifs de l'association :

> L'opération Tous Chercheurs est une initiative de Pédagogie Active par Projets qui aide les professeurs de l'enseignement secondaire à développer dans leurs classes des activités pédagogiques innovantes. Ces activités ont pour but de développer l'esprit critique et l'autonomie des élèves, ainsi que leur habileté expérimentale dans le cadre d'une tâche complexe. (Ibid.)

Il s'agit de mettre en œuvre avec des élèves volontaires de lycée (secondaire, 15 – 18 ans) des projets de recherche sur une durée de trois à cinq mois. Ces projets sont encadrés par des enseignants volontaires, en collaboration avec des chercheurs universitaires. Tout au long du projet, le groupe d'élèves doit maintenir un blog décrivant ses recherches ; le projet s'achève par une conférence en public, durant laquelle les élèves présentent les résultats de leurs recherches.

L'aspect expérimental des travaux est une composante essentielle des projets :

> Le grand enjeu des projets Tous Chercheurs est l'élaboration de protocoles expérimentaux en Physique, en Géographie ou en Philosophie, à travers lesquels les élèves sont amenés à s'interroger de manière critique sur la validation de leurs hypothèses. (Ibid.)

Ces projets sont développés dans des lycées de plusieurs académies en France, ainsi que dans certains établissements français à l'étranger au sein du réseau de l'Agence pour l'Enseignement Français à l'Étranger (http://www.aefe.fr/). Dans ces derniers, après une phase expérimentale en 2012 (au Caire et à Athènes avec deux opérations nommées « Sciences en Jeans »), le projet « Tous Chercheurs » est lancé en 2013 avec le statut d'APP-Monde (Action Pédagogique Pilote : http://www.aefe.fr/pedagogie/actions-pilotes-innovantes/app-monde), qui facilite sa mise en œuvre dans les établissements. Dès la première année, quatorze groupes adhèrent au projet à l'étranger et quatre projets sont menés en France.

2. *Interdisciplinarité et place des mathématiques*

Une des spécificités du dispositif est d'encourager l'intervention de professeurs de disciplines différentes (néanmoins, en 2013-2014, seuls cinq des dix-huit projets sont interdisciplinaires). Si les disciplines traditionnellement qualifiées d'expérimentales sont très majoritaires (physique, chimie, sciences de la vie et de la terre interviennent dans plus de 60 % des projets), quelques projets sont menés par des enseignants de philosophie, français, sciences économiques et sociales.

Les mathématiques interviennent dans trois projets : deux en association avec la physique, un avec la philosophie. La part d'intervention des mathématiques est réduite : faut-il y voir une réticence des enseignants de mathématiques à s'associer à des collègues d'autres disciplines ? L'idée que les mathématiques ne peuvent trouver leur place dans ce dispositif en raison de la dimension expérimentale ?

Les raisons sont certainement plus complexes. Même si l'opération « Tous Chercheurs » n'a pas vocation à servir de modèle de référence aux démarches interdisciplinaires faisant intervenir les mathématiques, quelques faits sont à rappeler.

D'une part, la vision exclusive des mathématiques comme science autonome qui se nourrit elle-même est tenace. Poincaré le signalait en 1904 dans sa « Conférence sur les définitions générales en mathématiques » (*L'enseignement mathématique*, n°6, 1904, p. 253) :

> Ce qu'elles [les mathématiques] ont gagné en rigueur, elles l'ont perdu en objectivité. C'est en s'éloignant de la réalité qu'elles ont acquis cette pureté parfaite. On peut parcourir librement tout leur domaine, autrefois hérissé d'obstacles, mais ces obstacles n'ont pas disparu. Ils ont seulement été transportés à la frontière, et il faudra les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour pénétrer dans le royaume de la pratique.

Par ailleurs, le rôle de l'expérimentation en mathématiques occupe une place pour le moins réduite dans les discours institutionnels, comme le rapport Rocard :

> En réalité, l'enseignement des mathématiques peut facilement utiliser une approche basée sur les problèmes alors que, dans de nombreux cas, l'approche expérimentale s'avère plus difficile. (Rocard & al. 2007, p. 9)

De même, si les programmes incitent les enseignants à la pratique d'une démarche d'investigation et pointent les analogies dans les différentes sciences, ils la restreignent en mathématiques à la résolution de problèmes (*programme de mathématiques de collège, 2008*, p. 4). Cela ne constitue pas une rupture franche avec les instructions antérieures, et donc n'est sans doute pas générateur de réels changements dans les pratiques enseignantes :

> II est essentiel que les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose. Il est tout aussi essentiel qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes. (programme de mathématiques de sixième, 1996, p. 2)

Parallèlement, de nombreux travaux sur les démarches expérimentales en mathématiques sont menés depuis plus de dix ans, qui en montrent la pluralité (Dias & Durand-Guerrier 2005, Perrin 2007, Grenier 2008, Houdement 2012). Les dispositifs de recherche comme les stages Hippocampe (Arnoux & Vaux 2012) ou « Maths En Jeans » (Dubois 2012) mettent également souvent en avant la dimension expérimentale des mathématiques.

Les opérations « Maths En Jeans » (http://www.mathenjeans.fr/), qui rencontrent depuis 1989 un succès croissant en France puis à l'étranger, présentent de nombreux points communs avec les projets « Tous Chercheurs » : volontariat des élèves, adoption d'une position de chercheurs, recherche sur une longue durée, dimension expérimentale des mathématiques, encadrement par un professeur associé à un enseignant-chercheur, communication par une conférence ; elles s'en démarquent par leur aspect presque systématiquement mono-disciplinaire. Une plus grande adhésion des enseignants de mathématiques aux projets « Tous Chercheurs » n'est finalement peut-être qu'une question de diffusion et de temps.

II. DEROULEMENT DE DEUX ACTIONS « TOUS CHERCHEURS »

Dans cette partie, nous détaillons le déroulement de deux projets « Tous Chercheurs », réalisés en 2013-2014 dans notre établissement (lycée Pierre Mendès-France, Tunis, AEFE). Ils associent les mathématiques à la physique (modélisation du mouvement brownien) et à la philosophie (hasard et la prise de décision).

Les deux projets ont été initiés par des discussions entre trois professeurs (Vincent BAUMARD en sciences physiques, Laurent LUQUET en philosophie, Benoît RAY en mathématiques) après que l'AEFE a lancé l'APP-Monde. À leur origine se trouvent des convergences de vue et une motivation pour se lancer dans un projet commun.

Le choix des thématiques de travail a été guidé par le souci d'intégrer une dimension expérimentale dans une réflexion transdisciplinaire, par la volonté d'envisager des projets plus ambitieux que ceux menés en classe, en tentant de mettre en évidence les enjeux épistémologiques de la construction des sciences.

Les projets ont été réalisés par deux groupes d'une dizaine d'élèves volontaires. Ils ont débuté fin novembre 2013 et se sont achevés par une présentation en public le 6 juin 2014. Chaque groupe d'élèves a travaillé en dehors du temps scolaire, à raison de deux à trois séances d'une à deux heures par mois.

1. « Tous Chercheurs » en physique et mathématiques

Le projet concerne onze élèves de première scientifique (secondaire 6ème année, 16-17 ans). Les extraits cités proviennent du blog des élèves (http://stormonateacup.blogspot.com/).

L'atelier débute par la présentation d'une situation déclenchante, l'expérience du « gaz roux », dont voici le compte-rendu des élèves :

> Nous avons deux récipients séparés par une plaque de verre (rendue hermétique grâce à de la graisse) : l'un rempli d'air et l'autre de gaz roux de formule NO_2. Lors du retrait de la plaque, le gaz roux migre vers le récipient d'air et cela forme, après quelques secondes, un mélange homogène. Par ailleurs, l'inclinaison des béchers n'influe en aucune manière sur le déplacement du gaz.

Cette expérience est suivie par l'observation d'une gouttelette de lait au microscope optique :

> Nous remarquons que de minuscules particules de graisse en émulsion dans l'eau ont un mouvement incessant. Nous avons l'impression que ce mouvement est aléatoire et n'obéit à aucune loi physique.

Les enseignants n'ont pas davantage guidé les élèves (ni parlé de « mouvement brownien »), mais attendu qu'ils tentent eux-mêmes de relier ces deux observations et d'en chercher des explications.

Les premières hypothèses ont été rapidement formulées :

- Peut-on associer le déplacement des molécules à une énergie cinétique de ces dernières ?
- La pression et la température influencent-elles le mouvement des molécules ?
- Peut-on associer ce phénomène au mouvement Brownien ?
- Le mouvement aléatoire des particules est-il dû à l'interaction de Van Der Waals ?

Ces hypothèses sont issues de recherches sur Internet réalisées après la première séance, mais aussi de la culture scientifique personnelle des élèves. Nous n'écartons pas les interventions extérieures qui auraient guidé les élèves vers le mouvement brownien.

La suite du travail des élèves a consisté à tenter de valider ou d'infirmer chaque hypothèse. L'interaction de Van Der Waals a été rapidement écartée :

> Si l'interaction de Van Der Waals existe réellement au niveau atomique, à l'échelle de nos « minuscules boules de graisse » son action est quasi inexistante. De plus, cette interaction a lieu dans le cas de molécules polaires […] cette polarité aura tendance à orienter toutes les molécules vers la même direction et assurer la cohésion de celle-ci, à l'inverse de ce que l'on a pu observer.

L'hypothèse sur l'énergie cinétique a mené les élèves sur la piste de la diffusion :

> On peut imaginer que le dioxygène est passé dans le récipient du gaz roux plus rapidement que ce dernier est passé dans le récipient de dioxygène. Et, par effet d'entraînement dû peut être à la pression, une partie du gaz roux passe dans l'autre récipient. Ce phénomène s'appelle la diffusion, qui répond aux lois de Fick et pourrait être un facteur important dans le calcul du mouvement Brownien.

D'autres recherches sur Internet ont confirmé l'hypothèse du mouvement brownien. Les notions théoriques liées à ce phénomène étant hors de portée des élèves, nous avons proposé aux élèves de le modéliser numériquement. Les élèves se sont posé des questions sous-jacentes à la modélisation d'une particule par un point qui, à chaque instant, effectue un déplacement dans une direction aléatoire : comment choisir aléatoirement la direction ? Faut-il faire varier la longueur des déplacements ?

La mise au point d'un algorithme implémenté sur le logiciel Algobox (http://www.xm1math.net/algobox), a duré deux séances. Des questions difficiles ont émergé : géométriques (liées au logiciel qui ne propose que les coordonnées cartésiennes) et probabilistes (quelle loi les « choix aléatoires » doivent-ils respecter ?).

La simulation du mouvement d'une particule a donné des résultats « visuellement satisfaisants » (figure 1)

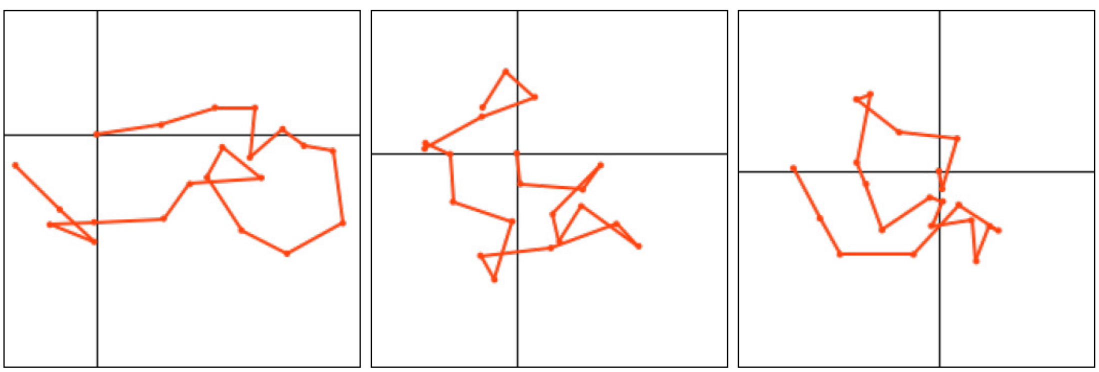

Figure 1 *– Simulations sous Algobox*

qui rappellent les dessins de Jean Perrin en 1912 (http://www.savoirs.essonne.fr/dossiers/la-matiere/physique/de-latome-aux-particules-elementaires/complement/resources/) (figure 2).

Figure 2 *– Dessins de Jean Perrin*

Nous avons alors orienté le travail des élèves vers une tentative de validation de ce modèle. Pour ce faire, il était nécessaire de choisir des critères de validation et de confronter le modèle à des données réelles.

Les vidéos et les observations sous microscope ne permettant pas d'obtenir des données précises et nombreuses, le professeur Hubert Krivine, chercheur associé au projet (voir III.1), a fourni des relevés d'expériences réalisées en laboratoire (distance parcourue depuis l'origine pour 49 particules). L'analyse de ces données a mis en évidence qu'en moyenne, le carré de la distance parcourue depuis l'origine est proportionnel au temps.

Les élèves ont voulu confronter leur modèle à cette relation. Pour cela, ils ont transposé leur modèle algorithmique sur un tableur, permettant de simuler des échantillons de trajets de 49 particules. Les résultats sont très convaincants et montrent une relation similaire à celle observée sur les données de laboratoire.

Le travail s'est arrêté sur ce début de validation de modèle.

2. *« Tous Chercheurs » en mathématiques et philosophie*

Le projet concerne, au final, 8 élèves de Terminale Scientifique (secondaire 7$^{\text{ème}}$ année, 17-18 ans). Les extraits cités proviennent du blog des élèves (http://lesjeuxsontfaits.blogspot.com/).

Le travail a débuté par la présentation d'un jeu :

> Pierre et Paul jouent à pile ou face. Pierre verse à Paul un enjeu *A* aux conditions suivantes : s'il gagne le premier coup, Paul lui verse 2 francs ; s'il ne gagne qu'au deuxième coup, Paul lui verse 4 francs, et ainsi de suite : s'il ne gagne qu'au nième coup après avoir perdu tous les coups précédents, Paul lui verse 2^n francs.

L'énoncé de ce problème, dit « martingale de Pétersbourg », est issu de Bru et al. (1999, p. 190). L'auteur de ce problème est sans doute Nicolas Bernoulli (1713).

L'absence de questions a déstabilisé les élèves, que nous avons encouragés à comprendre la situation et à se poser des questions :

> Deux questions ont été retenues comme pertinentes :
> 1. Pour quelle valeur de *A* le jeu est-il équitable c'est-à-dire pour quel *A* est-ce que *E*(gain)=0 ? *A* doit être égal au gain pour que la partie soit équitable.
> 2. En moyenne combien y a-t-il de lancers au total au cours d'une même partie ?

Les élèves ont effectué des simulations de parties, en utilisant un tableur et un algorithme implémenté sur Algobox. Cette démarche est vraisemblablement induite d'une part par la pratique fréquente de la simulation dans l'enseignement secondaire des probabilités et, d'autre part, par l'absence de limitation du nombre de coups, qui complique *a priori* la situation (la notion de limite, enseignée en classe de Terminale, n'est pas familière des élèves).

Les premiers résultats obtenus par simulations sont partiellement faux : sur 10 000 parties, le gain moyen brut est voisin de 16 (l'espérance théorique est infinie). L'explication, trouvée par la suite, réside dans le caractère exceptionnel de « longues » parties (dont l'influence est d'autant plus grande qu'elles sont rares).

Les simulations suivantes montrent une grande fluctuation du gain moyen pour des échantillons de taille 500 000 (entre 20 et 1100) et une stabilisation de la durée moyenne. Les élèves écrivent néanmoins : « une partie dure en moyenne 2 lancers et la moyenne des gains fluctue autour de 20 ».

Pour dépasser les limites techniques du logiciel (Algobox est limité à 500 000 itérations), un élève a programmé l'algorithme en Java. Ce fut l'occasion de réfléchir aux différents types de variables (« int », limitée à $2{,}15\ 10^9$, donnait des résultats incohérents ; elle a été remplacée par une variable « double »). Les élèves constatent : « une partie dure en moyenne 2 lancers et la moyenne des gains fluctue autour de 30 ».

La fluctuation étant encore très importante, nous avons encouragé les élèves à passer au calcul de l'espérance de gain brut et de la durée moyenne d'une partie. Des rappels du programme de probabilités de première leur ont été fournis (notion de variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs, espérance, écart-type, loi binomiale).

Les calculs, abordables par des élèves de ce niveau (tous obtiennent d'excellents résultats scolaires), ont posé beaucoup de problèmes en raison de l'absence de guidage ; un autre obstacle important est le « passage à la limite » des formules données pour une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Finalement, les résultats obtenus sont :

- l'espérance de gain brut est infinie, donc ce jeu ne peut être équitable (résultat démontré),
- le nombre moyen de lancers dans une partie tend vers 2 (limite d'une somme infinie conjecturée sur tableur).

L'objectif initial des enseignants était d'orienter le travail vers les martingales. Le second problème (« martingale de d'Alembert », Bru & al. p 217), très voisin du premier dans les concepts mathématiques, a été proposé aux élèves :

> Pierre et Paul jouent à pile ou face. Pierre gagne si la pièce tombe sur pile. Pierre mise 1 Franc à la première partie, puis double sa mise en cas de perte jusqu'à ce qu'il gagne. En cas de victoire à une partie Paul lui verse 2 fois sa mise.

Les élèves ont envisagé des questions en lien avec la situation :

> Ce jeu est- il équitable si Pierre a une fortune infinie ?
> Et si la fortune de Pierre est finie, auquel cas on décide de la longueur de la partie avant de débuter ?

Le travail effectué sur le premier problème a rapidement orienté les élèves vers des calculs, dont voici les conclusions :

> Le jeu auquel on s'intéresse à travers ce problème est une martingale : si l'on ne fixe pas le nombre de parties à l'avance, le gain est constant (1 Franc). Pierre ne peut que finir par gagner aux dépens de Paul. […]
> En revanche, si le nombre de parties est fixé à l'avance, alors un calcul de l'espérance de gain indique que celui-ci est de 0 : les gains tendent vers l'équilibre et aucun ni de Pierre ni de Paul n'est gagnant à la fin du jeu. Le jeu est donc équitable.

Le projet s'est ensuite tourné vers des questions liées à l'engagement du joueur (aspects psychologique, social, culturel) ainsi qu'à l'émergence historique des concepts probabilistes.

L'apport philosophique a d'abord consisté à marquer la spécificité du concept mathématique de probabilité au regard de la catégorie du « probable ». Pour cette dernière, c'est en remontant à Aristote que les élèves ont été sensibilisés à la différence de statut entre les énoncés seulement probables et les énoncés susceptibles de démonstration. Une première occasion leur a ainsi été donnée de réfléchir sur une délimitation possible entre opinion et science, notamment au travers de la différence entre syllogisme dialectique et syllogisme démonstratif.

L'émergence des probabilités fait certes référence à des obstacles socio-culturels parfois liés à des interdits religieux, mais tant qu'une situation n'est pas modélisée, il ne peut y avoir de calcul de probabilités. Les élèves ont été davantage intéressés par la différence de modèles qui transparaît au travers des textes de Pacioli, Tartaglia et Pascal (Cléro, 1998) : des trois solutions au « problème des parties », seule celle de Pascal fait émerger un raisonnement novateur consistant à prendre en compte tous les futurs possibles. La comparaison du raisonnement de Pascal avec les notions de probabilités « modernes » connues des élèves (arbres pondérés notamment) a été l'occasion d'approfondir ces questions de modélisation.

Les échanges entre mathématique et philosophie sont ainsi l'occasion de présenter sur un cas concret le calcul des probabilités et, dans une perspective bachelardienne, la notion d'obstacle épistémologique. En comparant les textes de Pascal avec ceux de ses prédécesseurs, les élèves prennent conscience que la construction du concept de probabilité est moins affaire de technique que de changement de point de vue.

Le projet s'est achevé par des recherches sur la notion de paradoxe, notion à peine effleurée lors d'une séance (illustrant la similitude des modes de raisonnements en mathématiques et philosophie) : l'ouverture vers ce domaine a suffisamment passionné certains élèves pour qu'ils l'approfondissent en autonomie et l'exposent dans leur conférence.

3. *Communications*

La consultation des blogs des élèves montre un certain délitement dans leur entretien, réalisé hors-séances. En raison des échéances des examens de fin d'année, le choix a été fait (en concertation avec les élèves) de mettre l'accent sur la conférence finale. On constate ainsi une grande différence de densité entre les blogs et les conférences (http://www.ert.tn/pmf/spip.php?article51).

Le défi des élèves était le suivant : rendre accessible à un public varié (parents, professeurs, membres de la direction, professeur Krivine) deux objets de recherche pointus. La préparation des conférences s'est déroulée hors-séances, chaque groupe ayant pu présenter sa conférence aux professeurs à deux reprises pour affiner le contenu puis améliorer l'orchestration des prises de paroles.

Si certaines approximations subsistent, la spontanéité de la prise de parole des élèves ainsi que leur responsabilité, leurs connaissances et la qualité de leur investissement ont été soulignées et honorées.

III. NATURE DE L'ACTIVITE DES ELEVES ET POSITIONS RESPECTIVES DES DIFFERENTS ACTEURS

Dans cette partie, en analysant les rôles joués par les différents acteurs dans les deux projets, nous tenterons de préciser en quoi les élèves ont pratiqué une démarche d'investigation en mathématiques. Le cadre théorique utilisé est celui des ESFI (Enseignements Scientifiques Fondés sur l'Investigation, Grangeat 2013, pp 155–184).

1. *Interventions du chercheur*

Le professeur Hubert Krivine (Université Pierre et Marie Curie, membre du conseil scientifique de l'association « Tous Chercheurs ») a accepté de soutenir les trois enseignants impliqués dans ces projets.

Il a suivi l'avancée du travail des élèves à distance pendant toute la durée des projets, via les blogs des élèves et par échanges de mails avec les enseignants. Ces échanges fréquents ont été un soutien précieux tout au long des projets. Il a fourni des films ainsi que les données expérimentales sur le mouvement brownien, ainsi que des apports théoriques à destination des professeurs sur les deux sujets.

Le professeur Krivine est intervenu à deux reprises au lycée : pour un bilan à mi-parcours puis pour la présentation en public. Ces moments d'interaction sont importants pour encourager les élèves, recadrer leurs travaux et les aider à faire ressortir l'essentiel lors de leur présentation en public. Les échanges vont bien au-delà des projets eux-mêmes : il a été question de la recherche scientifique et de l'activité professionnelle d'un chercheur. Le professeur Hubert Krivine a par ailleurs présenté deux conférences sur le hasard et sur la construction historique d'un savoir, auxquelles ont assisté de nombreux élèves du lycée.

2. *Engagement des élèves*

Le recrutement des élèves s'est fait sur la base du volontariat. En raison de diverses contraintes d'emplois du temps, les projets ont été proposés aux six classes de première S et à deux des cinq classes de terminale S. Tous les élèves volontaires ont été retenus mais leur nombre a sensiblement diminué dans le groupe de terminale (qui est passé de 12 à 8 élèves) en raison de la préparation au baccalauréat et d'autres engagements péri-éducatifs ; l'effectif du groupe d'élèves de première est resté stable. Cette relative évaporation montre bien l'implication requise par ce type de recherche.

3. *Rôle des enseignants, effets sur l'activité des élèves*

Nous avons voulu respecter un des objectifs majeurs de « Tous Chercheurs » : « montrer la science telle qu'elle se construit »[293], donc mettre les élèves au plus près de la position de chercheurs. Dans les deux projets, le choix a été fait dès le départ de laisser une très grande liberté aux élèves, en adoptant une position très en retrait par rapport aux cours traditionnels et en guidant les élèves au minimum.

L'étalement des recherches dans le temps nous a permis de laisser les élèves travailler parfois longuement autour d'hypothèses ou de conjectures erronées (espérance du gain brut dans le premier problème de probabilités, interaction de Van Der Waals pour le mouvement brownien), ce qui est difficile dans le temps contraint de la classe. En responsabilisant les élèves sans intervenir pour leur indiquer des erreurs, nous les avons laissés eux-mêmes trouver des moyens de valider ou d'invalider leurs hypothèses. En référence à la dimension 3 du modèle ESFI, on se situe sans doute « au-delà » du mode 4.

Le travail de préparation en amont nous avait permis de prévoir la plupart des problématiques abordées par les élèves (les situations choisies étaient « faites pour ça »), mais pas d'anticiper toutes les difficultés rencontrées ou de prédire toutes les pistes que les élèves allaient suivre. Pour les enseignants, la phase préparatoire a été très délicate : elle a consisté à échafauder, pour chaque sujet, un ensemble de trames suffisamment vagues, jalonnées de

[293] http://www.aefe.fr/pedagogie/actions-pilotes-innovantes/app-monde/tous-chercheurs

points de convergence préétablis, trames assez vastes pour contenir les pistes envisageables par les élèves et assez souples pour rendre possibles des bifurcations au cours du projet.

Pour le mouvement brownien, les phases initialement prévues ont été suivies globalement : observations et hypothèses, construction d'un modèle, validation du modèle selon des critères réfléchis.

En mathématiques et philosophie, les difficultés rencontrées pour résoudre le premier problème nous ont surpris (le problème est suffisamment ouvert pour que d'excellents élèves n'utilisent pas spontanément les notions adéquates qu'ils maîtrisent en situation « scolaire »). Le temps passé sur le premier problème nous a conduits à restreindre le travail prévu sur les martingales. En revanche, la réflexion sur les notions philosophiques du probable et sur les textes historiques a été très efficace, d'où l'ouverture vers les domaines du raisonnement et des paradoxes. Le choix fait par les élèves d'approfondir ce dernier sujet montre le degré d'autonomie auquel ils ont accédé.

Les questionnements des élèves, leurs choix de sujets, traduisent une position très avancée dans la dimension 1 du modèle ESFI. Il faut cependant noter que si un travail d'analyse a priori est d'usage dans la recherche de problèmes ouverts en mathématiques (Arsac & Mante 2007), il est beaucoup plus complexe dans le cadre du dispositif « Tous Chercheurs » : d'une part, les domaines d'étude sont très peu balisés, d'autre part en raison d'éventuelles « perturbations » (apports extérieurs, sujets partiellement connus par un élève[294], etc).

Dans les deux projets, le *topo* des élèves est très important : on se situe à l'extrémité de l'axe « dimension 2 » du modèle ESFI :

> le problème est ouvert et les élèves ont à déterminer leur protocole et à choisir le matériel pour tester leurs hypothèses.

Enfin, les échanges oraux et productions écrites ont eu une place importante dans trois moments bien identifiés : échanges oraux lors des séances (entre pairs, avec les enseignants), productions écrites (pour la tenue du blog et la préparation du diaporama), explicitations orales (lors de la conférence et des réactions aux questions). En référence au modèle ESFI (dimension 5), l'engagement des élèves dans les activités de communication est poussé à son maximum :

> le mode ultime consiste à leur permettre de justifier leur point de vue en référence à des résultats ou à des savoirs.

4. *Limites du modèle ESFI pour l'analyse d'un tel dispositif*

Le modèle ESFI propose six dimensions, dont quatre ont été examinées. Les deux autres ne sont pas adaptées à notre expérience.

D'une part, la dimension 4 (diversité des élèves) ne peut être interrogée : l'hétérogénéité n'est pas celle que l'on peut rencontrer dans une classe ordinaire : les élèves des deux groupes sont tous d'un excellent niveau et sont restés motivés pendant toute la durée des projets (excepté les abandons).

D'autre part, faire référence à la dimension 6 (niveau d'explicitation des savoirs visés par l'enseignant) est complexe, car aucun savoir n'était visé *a priori*. L'objectif concernait davantage l'acquisition de méthodes, la découverte d'une activité de recherche dense et interdisciplinaire et, finalement, la construction de processus métacognitifs difficilement mesurables.

[294] L'ouverture de la boîte de Pandore du mouvement brownien a sans doute accéléré les recherches, sans pour autant compromettre le projet

IV. CONCLUSION

La très grande liberté laissée aux élèves dans l'élaboration des problématiques, dans les méthodes utilisées pour s'en emparer, l'absence de guidage strict de la part des enseignants, l'étalement des recherches dans le temps, le rôle joué par l'expérimentation, questionnent les méthodes d'enseignement habituelles. Par ailleurs, responsabiliser les élèves et orienter leur travail vers la recherche, non pas vers les résultats, et ceci en dehors de tout processus d'évaluation traditionnelle, a provoqué chez les élèves une réflexion importante sur la valeur de vérité des résultats énoncés et a permis de mettre en avant le fait que, dans une activité de recherche, les échecs importent autant que les réussites. Il ressort de cette expérience que les résultats obtenus par les élèves, sans être excessivement ambitieux, sont d'une grande solidité (éprouvée lors de la présentation en public) et nous faisons l'hypothèse que les méthodes utilisées pour chercher, émettre des conjectures, tenter de les (in)valider, seront mobilisables dans la scolarité future des élèves.

La confrontation de ces deux expériences au modèle ESFI montre, d'une part, que les élèves sont entrés dans une démarche d'investigation très consistante et, d'autre part, questionne la construction des savoirs, des attitudes et des compétences.

Dans l'expérimentation décrite ici, nous avons pu observer que l'immersion dans les problèmes historiques, la réflexion sur les questions sociales et épistémologiques dans le projet sur la prise de décision, le travail d'un processus de modélisation dans toute sa globalité dans le projet sur le mouvement brownien ont permis de « montrer la science telle qu'elle se construit ». Plus généralement, nous faisons l'hypothèse qu'un tel dispositif constitue une possibilité de favoriser la formation de l'esprit à la recherche et participe activement au décloisonnement disciplinaire.

Nous nous sommes limités à un rapport *a posteriori* d'une expérience ; une recherche approfondie portant sur ce dispositif permettrait d'étayer nos hypothèses. Outre la question des compétences construites dans le cadre de ce dispositif, reste ouverte celle de la possibilité de transposer certaines caractéristiques au cadre de la classe ordinaire, et en cohérence avec les recommandations des programmes de mathématiques.

REFERENCES

Arnoux P., Vaux L. (2012) Recherche en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1282–1294), http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/GT10-pdf/EMF2012GT10ARNOUX.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*, Lyon : Scéren CRDP de Lyon

Bru B., Bru M.F., Chung K.L. (1999) *Borel et la martingale de Saint-Petersbourg*. In *Revue d'histoire des mathématiques*, n° 5, pp. 181–247., http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/5/pdf/smf_rhm_5_181-247.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Cléro J.-P. (1998) *Épistémologie des mathématiques*, Nathan

Commission Inter-Irem Lycée (2012) *Démarches d'investigation et résolution de problèmes : quelle place dans les travaux des IREM ?*, http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Rapport_DI_et_RPB_pour_C2i.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* n°60, p. 61-78, http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/60_article_416.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Dubois I. (2012) Démarche d'investigation en mathématiques : l'exemple des ateliers MATh.en.JEANS. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1319–1329), http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/GT10-pdf/EMF2012GT10DUBOIS.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Grangeat, M. (2013) Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. In M. Grangeat (dir.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble, pp. 155−184.

Grenier D. (2008) Expérimentation et preuve en mathématiques. In *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, Presses universitaires de France.

Houdement C. (2012) Démarche expérimentale en résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1389-1399), http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/GT10-pdf/EMF2012GT10HOUDEMENT.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

L'enseignement mathématique, n°6, 1904, http://retro.seals.ch/digbib/view?pid=ensmat-001:1904:6::492, consulté le 20 janvier 2015.

MEN (1996) Programmes de mathématiques de la classe de sixième, BO n° 25 du 20 juin 1996, http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/MO/IMO96005/IMO96005.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

MEN (2008) Programmes des enseignements de mathématiques, Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* n° 73, pp. 6-34, http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/73/73x1.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Rocard M., Cesrmley P., Jorde D., Lenzen, D., Walberg-Herniksson H., Hemmo V. (2007) *Science education NOW : A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Retrieved March 2010, from http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf, consulté le 20 janvier 2015.