Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

INVESTIGATION, COMMUNICATION ET SYNTHÈSE DANS UN TRAVAIL MATHÉMATIQUE : UN DISPOSITIF EN LYCEE

Jean-baptiste LAGRANGE[1], Roselyne HALBERT[2], Christine LE BIHAN[2], Bernard LE FEUVRE[2], Marie Catherine MANENS[2], Xavier MEYRIER[2], Minh TRAN KIEM[3]

Résumé – Cet article présente une évolution du cadre théorique et de la mise en œuvre de démarches d'investigations en lycée par le groupe Casyopée. Les différents domaines de modélisation des fonctions, précédemment organisés dans un « cycle de modélisation fonctionnelle » sont ici décrits comme des espaces de travails fonctionnels. Ceci conduit à un dispositif investigation, communication, synthèse (ICS) pour la résolution d'un problème en classe, permettant une dialectique médias-milieux efficace. Sur l'exemple de la modélisation des câbles du pont du Golden Gate, une mise en œuvre du dispositif en Terminale est comparée à une autre, inspirée du cycle de modélisation.

Mots-clefs : Investigation, Modélisation, Casyopée, Dialectique Médias-milieux, Espaces de Travail Fonctionnels

Abstract – This paper presents an evolution of the Casyopée group's theoretical framework and implementation of investigation approaches at high school level. Domains for functional modelling previously organised in a "functional modelling cycle" are here described as "functional work spaces". This leads to an investigation, communication and synthesis scheme for designing a problem solving classroom situation, allowing an effective medias-milieux dialectic. In the example of modelling the Golden Gate Bridge cables, an implementation of this scheme is compared to another, inspired by the modelling cycle.

Keywords: Investigation, Modelling, Casyopée, Medias-milieux dialectic, Fonctionnal Work Spaces.

I. CONTEXTE ET TRAVAUX ANTERIEURS

Le groupe Casyopée de l'IREM de Rennes situe sa réflexion autour de l'apprentissage des fonctions de la Troisième à la Terminale, et de l'apport d'un logiciel développé à cet effet. Comme nous l'expliquons (Halbert, Lagrange, Le Bihan, Le Feuvre, Manens, Meyrier 2013), nous voyons un double enjeu à cet apprentissage : comprendre l'aspect « dépendance » qui sous-tend les fonctions et s'approprier le formalisme fonctionnel, de façon à les faire fonctionner dans la résolution de problèmes. Nous proposons de répondre à ces enjeux par la mise en place, l'expérimentation de situations de résolution de problèmes de « modélisation fonctionnelle » en classe ainsi que par l'élaboration d'un cadre théorique, permettant l'analyse de ces situations et leur diffusion.

1 LDAR, Université Paris-Diderot et Université de Reims – France - jb.lagrange@casyopee.eu.
2 Groupe Casyopée, IREM de Rennes.
3 College of Education, Hue University, Vietnam.

Lagrange J-B., Halbert R (2015) Investigation, communication, synthèse dans un travail mathématique : un dispositif en lycée. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 881-890.

Le cadre théorique développé Minh (2012) et Halbert et al. (2013) considère les différents domaines de connaissance où une même dépendance fonctionnelle intervient, comme des cadres au sens de Douady (1986), à l'intérieur desquels interviennent différents systèmes de représentation dont certains sont des registres au sens de Duval (1999). Le cadre théorique s'inspire de travaux sur la modélisation (Blum, Galbraith, Henn & Niss 2007) pour orienter, sur un problème donné, les travaux des élèves selon un « cycle de modélisation fonctionnelle » parcourant ces domaines (Figure 1).

Dans un exemple développé par Halbert et al. (2013) et analysé du point de vue des démarches d'investigation par Gueudet et Lebaud (2014), un premier domaine est constitué d'un système physique (un montage avec roue, cordes et masse) où une question relative au déplacement d'une masse est posée. Le second domaine est celui de la géométrie dynamique dans laquelle la réalisation d'une figure plane dynamique qui représente les éléments essentiels du système physique et de leurs relations est une première étape de modélisation. Dans ce domaine, la dépendance entre éléments physiques se modélise par une dépendance géométrique : on tire un point et la figure « bouge ». La troisième étape, de quantification, modélise la dépendance par une relation entre grandeurs. C'est dans ce domaine des mesures et grandeurs, que les élèves identifient les éléments constitutifs d'une fonction : variable et valeur. Le troisième domaine est celui des fonctions mathématiques où un traitement algébrique donne des éléments sur la question posée. Finalement, le retour dans le Système Physique a pour objectif d'interpréter et de vérifier l'adéquation du modèle mathématique.

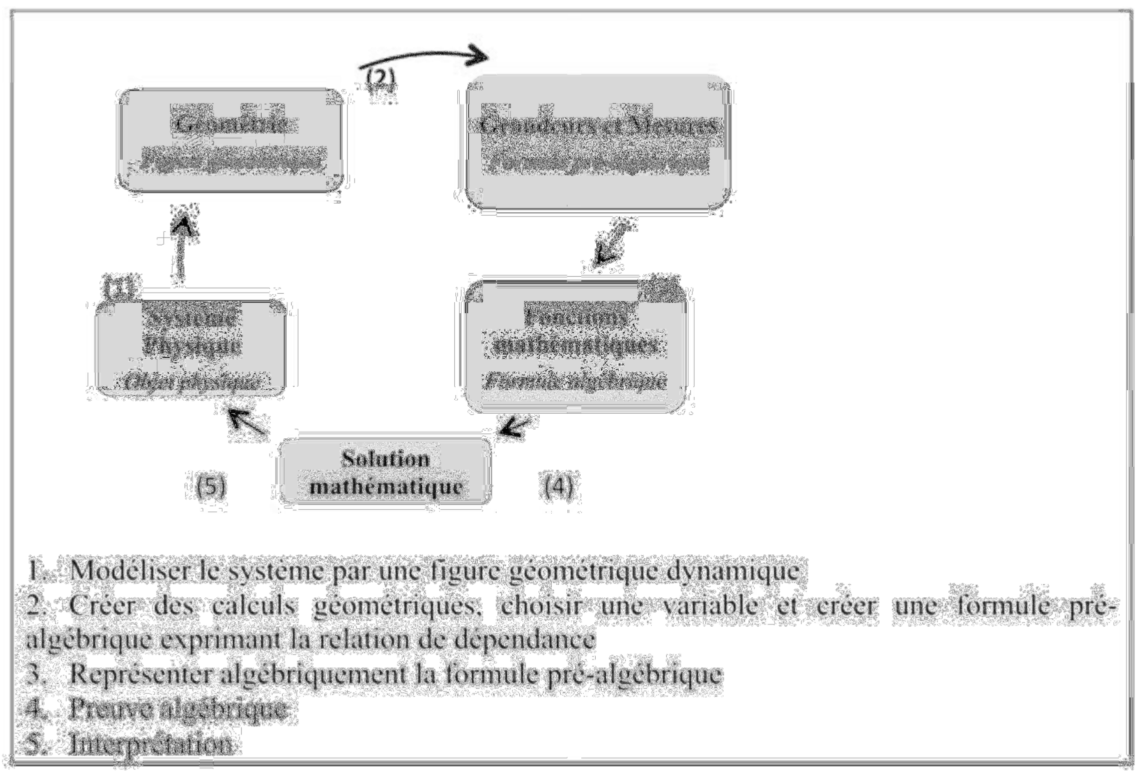

Figure 15 *– Le cycle de modélisation fonctionnelle*

En reprenant les termes de Douady (1986), les différents passages d'un domaine à l'autre sont des « changements de cadres » susceptibles de « faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves » relativement à un problème de dépendance fonctionnelle. Au cours du cycle, les élèves rencontrent différentes représentations et formalismes d'une même dépendance, certains liés au système physique, d'autres à la géométrie et aux grandeurs, et *in fine* au symbolisme mathématique. Assistés par le professeur ils donnent sens à ces différentes représentations ou formalismes et s'initient à leur fonctionnement. La présence du dispositif physique ou d'une maquette permet aux élèves d'expérimenter et de comprendre la question. Le logiciel Casyopée est conçu pour soutenir le travail des élèves dans les trois autres domaines, avec des fenêtres spécifiques pour chaque domaine permettant de bien l'identifier, ainsi que pour faciliter le passage d'un domaine à l'autre4.

Ce cadre s'est avéré très utile. Notamment, il a permis à Minh (2012) de rendre compte de la genèse instrumentale d'élèves au long des deux années de Première et Terminale. Cependant nous en voyons des limites, tant d'un point de vue purement théorique que de celui des situations que nous expérimentons. D'un point de vue théorique, une analyse en termes de cadres et de registres rend compte partiellement des spécificités de chaque domaine. Les cadres mettent l'accent sur les éléments théoriques propres au domaine, laissant de côté la spécificité des objets non théoriques sur lesquels le travail s'exerce et des artefacts qui permettent ce travail. Une approche en termes de registres comporte le risque de ne voir dans les objets manipulés dans les différents domaines que des « représentations » d'un même objet idéal, la représentation comme fonction mathématique étant dominante et les autres jouant le rôle de « faire valoir » ou de « motivation ». Du point de vue des situations, nous sommes « interpellés » par l'accent croissant mis tant par la recherche que par les curricula sur les démarches d'investigation, ce qui nous conduit à tenter de dépasser la problématique de la « résolution de problème par modélisation » qui a été la nôtre jusqu'à présent.

II. EVOLUTION DU CADRE THEORIQUE

1. La dialectique des medias et des milieux

« Investiguer » peut être pris dans deux significations. (1) S'informer de solutions déjà obtenues ou d'approches déjà mises en œuvre. (2) Construire soi-même des éléments de solution en mobilisant des capacités de représentation, de modélisation et de raisonnement pour se confronter aux éléments du problème. Il est généralement admis que des « démarches d'investigation » bien conduites associent les deux significations. Depuis Chevallard (2007) cette dualité est décrite comme la dialectique des médias et des milieux. Le terme « milieu » est pris dans le sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD). La TSD donne une place centrale à cette notion : un système antagoniste dénué d'intentions didactiques, mais organisé par l'enseignant dans l'intention de provoquer l'apprentissage. Dans les situations que nous considérons, le milieu est constitué des éléments auxquels l'individu se confronte dans sa recherche d'éléments de solution.

Pour Chevallard (2007),

> l'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au recopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société.

Nous ne nous situons pas quant à nous dans une perspective de processus tels que cet auteur les a formalisés sous l'appellation « parcours d'étude et de recherche ». Tout en retenant la nécessité d'une dialectique efficace, nous nous orientons plutôt vers la mise en place de

[4] « L'environnement de Casyopée prend en charge les activités de traitement à l'intérieur de chaque registre utilisé : écriture de la fonction, calcul de sa dérivée, représentation graphique. Par contre, il laisse les activités de changements de registres à la charge de l'élève comme la modélisation par une fonction. Ainsi le lien entre la situation de départ et la fonction étudiée fait sens pour l'élève. Il s'agit ici spécifiquement d'un logiciel dédié à l'apprentissage des fonctions qui libère les élèves d'une partie calculatoire, assez lourde, pouvant cacher la notion que l'enseignant souhaite faire découvrir » (Gueudet, Lebaud 2014).

moments de travail des élèves s'inscrivant dans l'écologie habituelle d'une classe de lycée, et plus particulièrement dans l'exemple que nous allons traiter, d'une classe de Terminale Scientifique à trois mois du baccalauréat. Pour préparer une dialectique efficace, nous pensons qu'il faut enrichir le milieu par des éléments d'information préparés à l'avance. Ces éléments doivent pouvoir aisément être reconnus par les élèves comme de même nature que ceux qu'ils seraient allés chercher s'ils étaient dans un processus donnant suffisamment de temps pour une démarche à leur propre initiative. Ils doivent aussi participer aux potentialités d'action et de rétroaction du milieu ; c'est pourquoi ils doivent être conçus pour permettre aux élèves une sélection, une analyse et une interprétation faisant intervenir les autres éléments du milieu. Ces éléments peuvent être des informations textuelles, mais aussi des « résultats » obtenus par le biais d'artefacts de calcul, notamment Casyopée que nous privilégions. L'utilisation du calcul formel que permet ce logiciel participe à une dialectique medias-milieux efficace[5].

2. *Les espaces de travail fonctionnels*

Le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques nous est apparu comme pertinent pour rendre compte de notre approche de situations de « modélisation fonctionnelle » avec un environnement logiciel articulant géométrie dynamique et calcul formel et pour dépasser les limites d'une approche « cycle de modélisation ».

En partant de la géométrie, Kuzniak & Richard (2013) ont proposé l'idée d'espace de travail mathématique comme une façon de concevoir et d'analyser les environnements dans lesquels les travaux mathématiques ont lieu à l'école, en particulier l'identification des objets, artefacts et des règles, et en reliant un niveau épistémologique et un niveau cognitif.

Ceci amène à repenser les composantes du cycle de modélisation comme plusieurs « espaces de travail fonctionnels » (ETF). (Tableau 1). L'idée est que l'étude d'une question mobilise plusieurs espaces de travail autour d'objets, chaque objet dans un domaine pouvant apparaître comme un modèle de l'objet dans un autre[6]. Chaque espace se caractérise par les artefacts qui permettent de travailler sur l'objet et par un cadre de référence ou référentiel théorique. Ceci implique que la question à travailler prend sens dans les différents domaines et donne un sens aux objets, sans qu'un domaine soit privilégié ni qu'il y ait nécessité d'organiser un parcours linéaire des domaines dans un cycle : il est possible d' « investiguer » sans privilégier un domaine ni un parcours.

Par ailleurs Kuzniak & Richard (2013) insistent sur le fait que les ETM ne sont pas donnés, mais se construisent dans les processus d'enseignement apprentissage. Ainsi, des ETM de référence peuvent exister autour de façon standard socialement admises pour formuler des questions et organiser des réponses en privilégiant certains artefacts et certains modes de pensée. Mais ils doivent être aménagé(s) et organisé(s) pour devenir des espaces de travail « idoines » dans une institution d'enseignement donnée avec une fonction définie.

Pôles\ espaces de travail	Dispositif physique	Figure dynamique	Grandeurs	Algèbre
Objet	Dépendance mécanique	Co-variation géométrique	Co-variation entre mesures, variables	Fonctions définies par une formule
Artefacts	Dispositif,	Primitives	Langage,	Symbolisme et

5 Voir note 2
6 Le terme modèle synthétise les deux sens symétriques et opposés de la notion de ressemblance, d'imitation, de représentation (Wikipédia).

	langage	construction, langage géométrique	expressions symboliques spécifiques	langage algébriques
Cadre de reference	Contraintes et lois physiques	Propriétés géométriques	Quantification	Théorèmes d'algèbre et d'analyse

***Tableau 1** – Quatre espaces de travail (adapté de Lagrange 2015)*

Comme le dit Kuzniak (2011)

> les experts concepteurs de la réorganisation didactique des diverses composantes de l'espace de travail (…) aménagent un ETM qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse.

III. QUESTION ET DISPOSITIF

Nous souhaitons jouer, même modestement, le rôle d'expert tel que l'entend Kuzniak (2011), et donc notre questionnement actuel peut s'énoncer ainsi :

Compte tenu des contraintes des classes de lycée, particulièrement de la Terminale, est-il possible de faire vivre aux élèves des situations problématiques, associant plusieurs ETM (« idoines ») avec un contrôle efficace de la dialectique medias-milieux ?

Ceci nous conduit à mettre en place un dispositif original que nous pensons compatible avec les contraintes de classes de lycée. Il amène les élèves à une *investigation* dans plusieurs ETF, et à *communiquer* en vue d'une *synthèse* (ICS) :

- Dans un premier temps, des *investigations* autour d'une même question sont conduites par un ou plusieurs groupes, chacune dans un ETF spécifique.
- Dans un second temps, les groupes sont « mixés », de façon que dans chacun des nouveaux groupes, pour chacun des ETF, le travail dans un des groupes initiaux puisse être *communiqué* par un-e élève.
- Dans un troisième temps, une *synthèse* est élaborée collectivement.

Nous nous inspirons pour ce dispositif de la technique dite de la « Jigsaw Classroom »[7], ainsi décrite par ses concepteurs :

> a cooperative learning technique that reduces racial conflict among school children, promotes better learning, improves student motivation, and increases enjoyment of the learning experience… Just as in a jigsaw puzzle, each piece — each student's part — is essential for the completion and full understanding of the final product.

Cette technique nous a semblé cohérente avec un travail différencié et collaboratif dans des espaces de travail bien spécifiques.

Pour les élèves, les « pièces » sont présentées comme des « approches » d'une même question, impliquant un travail sur les objets du monde physique, sur une figure géométrique, sur les grandeurs, ou sur une ou des fonctions définies par des formules.

IV. LE PONT DU GOLDEN GATE BRIDGE

La question dans cette situation est celle d'une fonction qui modélise, dans un repère donné, la courbe dessinée par un câble principal. Le but est que les élèves comprennent (1) la tension comme une grandeur vectorielle évoluant au long du câble, (2) comment cette évolution

7 https://www.jigsaw.org/

détermine la forme de la courbe et son équation. Sur un plan plus général, la question est choisie pour amener à comprendre comment, dans une modélisation du réel, une fonction « émerge » à partir de relations physiques. Avec cette situation et d'autres précédemment expérimentées (http://www.casyopee.eu/file/Doc/PageMiniSites.htm) nous visons à remédier à ce que nous voyons comme un défaut majeur de l'analyse au lycée : l'absence de motivation du calcul différentiel et intégral comme outil de modélisation.

Dans le cadre du travail du groupe, nous avons opéré deux mises en œuvre :

- La première est inspirée par le cycle de modélisation. Elle fait l'objet d'une présentation sur le site http://casyopee.eu (entrée GoldenGateBridge, menu à gauche).
- La seconde a conduit à la mise en place du dispositif ICS que nous venons d'exposer.

Dans cette seconde mise en œuvre, la partie *investigation* repose sur cinq documents, chacun comportant une partie commune avec des informations générales sur le pont et une partie spécifique. Voici quelques éléments sur ces parties spécifiques et le travail attendu des élèves.

Le document A donne comme consigne de regarder une vidéo et d'en faire un compte-rendu accompagné d'un schéma. La vidéo, enregistrée dans une autre classe, illustre la notion de tension dans une corde, particulièrement le fait que quelle que soit la tension exercée aux extrémités, une force exercée en un des points de la corde suffit pour que la corde « fléchisse ». Un schéma est proposé avec une force verticale s'exerçant en quatre points d'un câble et il est demandé d'indiquer les forces s'exerçant dans le câble entre ces points par référence à la notion de tension. On s'attend à ce que les élèves fassent référence à la première loi de Newton et l'appliquent sur le schéma.

A partir de l'image d'une maquette sous forme d'un câble portant des masses équi-réparties horizontalement, le document B propose une ligne brisée en n segments comme modèle du câble, les abscisses des milieux des segments étant réparties régulièrement sur la longueur du pont, et des poids égaux s'exerçant en chacune des extrémités communes à deux segments. Il est demandé aux élèves de considérer les composantes verticale et horizontale de la tension en chacun de ces points, de façon à trouver des relations de récurrence, puis les valeurs en fonction de la position du point. On s'attend à ce que les élèves montrent que la composante horizontale est constante et que la composante verticale croît comme une suite arithmétique.

Le document C propose un algorithme de tracé itératif d'une ligne brisée. L'algorithme prend en entrée le nombre N de segments, et une variable H. Dans l'itération, l'abscisse du point courant est incrémentée de façon que les points soient répartis régulièrement selon l'axe des x. Une variable V évolue linéairement et l'ordonnée est incrémentée proportionnellement à cette variable. Les élèves doivent donner « une valeur appropriée » pour N et H. On s'attend à ce qu'ils reconnaissent N comme le nombre de segments entre deux câbles de suspension verticaux, prennent conscience de l'influence de H sur la forme de la courbe et donnent à cette variable une valeur telle que cette courbe puisse être reconnue comme un modèle du câble. Les élèves doivent ensuite interpréter le programme sous forme d'une relation de récurrence pour les abscisses et les ordonnées des points et expliquer leur construction. On s'attend à ce que les élèves reconnaissent un algorithme de tracé approché de la courbe d'une primitive d'une fonction (méthode d'Euler), qui a fait l'objet d'un travail antérieur.

Dans le document D, le câble est aussi une ligne brisée, les segments étant les portions entre deux attaches de câbles de suspension verticaux. Le document ne considère pas les tensions, mais donne une expression du coefficient directeur de chaque segment. Ayant indiqué un repère, il demande une expression du coefficient directeur de chaque segment en fonction de l'abscisse du milieu du segment, puis un algorithme pour afficher ces points. Il s'agit pour les élèves de passer du couple (abscisse du milieu ; coefficient directeur) à une relation fonctionnelle et de trouver comment cette relation permet, par itération, de calculer les ordonnées.

Le document E considère le câble comme modélisé par la courbe d'une fonction mathématique *f*. Il indique que la composante horizontale de la tension est une constante *H* et donne la composante verticale sous forme d'une fonction linéaire *V*. Les élèves doivent alors s'aider de Casyopée pour trouver le domaine et la formule définissant *f*. On s'attend à ce que les élèves reconnaissent que la tension en un point s'exerce selon la tangente à la courbe en ce point, en déduisent la dérivée de *f* puis *f* elle-même comme une primitive dépendant du paramètre *H* et d'un paramètre additif, et règlent ces paramètres pour que la courbe de *f* s'ajuste à une image du câble.

Le document pour la phase de *communication* reprend les informations communes à A, B, C, D et E et demande d'

> associer les documents et les études faites de manière à donner le plus d'information possible sur la courbe décrite par un des câbles principaux.

Il nous semble que, conformément à notre cadre théorique, les documents A, B, C, D et E installent des espaces de travail différents, sur des objets modèles les uns des autres. Dans le document A, le travail se fait dans le domaine des forces sur une simple corde, sans quantification. Le document B porte sur un modèle plus proche du câble réel et quantifie les tensions. Le document C permet un travail sur un modèle discret concrétisé par un algorithme. Dans le document D, l'enjeu est une relation fonctionnelle entre abscisse et coefficient directeur, qui permet d'obtenir une relation fonctionnelle entre abscisse et ordonnée. L'enjeu du document E est la fonction mathématique avec les outils algébriques et avec Casyopée. Dans les documents A et B, la première loi de Newton constitue le référentiel théorique, respectivement dans un cadre géométrique et dans un cadre analytique. Pour les documents C et D, il s'agit des relations de récurrence et de leur écriture dans un algorithme itératif et pour le document E, de la relation fonction-dérivée.

Le dispositif prévoit un premier travail d'*investigation* en groupe, chaque groupe travaillant sur un seul des cinq documents A, B, C, D ou E, puis un second travail dans les groupes « mixés » autour du document pour la phase de *communication.* Ainsi, pour un-e élève donné-e, un des espaces est le lieu privilégié d'une confrontation à un milieu dans un domaine dont il devient ainsi « expert ». Ensuite, il-elle s'« informe » auprès d'élèves « experts » dans d'autres domaines et les « informe » de son expertise. Ceci prépare une phase collective de *synthèse* dirigée par le professeur.

V. OBSERVATION ET EVALUATION

La classe est une Terminale scientifique de 35 élèves au début du mois d'avril, soit à quelques semaines du baccalauréat. La technique de « jigsaw teaching » a déjà mise en place dans la classe pour l'élaboration d'un cours sur un chapitre du programme et les élèves ont utilisé Casyopée pour la résolution de problèmes. La séance dure 2h15 dans une salle ordinaire. Un ensemble d'ordinateurs portables, appelé « classe mobile » est à disposition des élèves. Casyopée est installé sur ces ordinateurs ainsi que le film mentionné dans le document A. Les élèves disposent de leurs calculatrices qui constituent leur environnement de programmation habituel. Dans les deux phases, les groupes sont de 4 à 5 élèves. Chacune des phases dure environ 40 minutes.

Les données sont constituées des enregistrements vidéo des travaux de groupes et de la phase de *synthèse*[8], ainsi que des traces écrites des travaux de groupe. L'analyse des données sur les groupes d'*investigation* montre un comportement des élèves globalement conforme aux attentes pour les groupes travaillant sur les documents A et B. Les groupes travaillant sur le document C ont passé une partie du temps à entrer le programme proposé dans leur calculatrice. Ils ont ensuite été bloqués par un bug de la calculatrice qui empêchait de visualiser correctement la courbe et donc de voir l'influence de H. Ils ont ensuite posé les relations de récurrence comme demandé. Les groupes travaillant sur le document D ont eu beaucoup de difficulté à interpréter la formule donnant le coefficient directeur, à trouver une formule pour l'abscisse du milieu et à éliminer l'indice du segment pour trouver la relation fonctionnelle demandée. Les groupes travaillant sur le document E ont trouvé correctement l'ensemble de définition et la fonction V, puis ont essayé de tirer parti de ce que la tension en un point s'exerce selon la tangente en ce point. Bien que la notion de primitive ait été mise en évidence, il y a eu ensuite confusion entre somme vectorielle et somme de nombres réels, et entre l'expression de la fonction et l'équation de la tangente. Les élèves ne semblent pas avoir utilisé réellement Casyopée.

L'analyse des vidéos des groupes de *communication* montre un travail d'explicitation par chaque membre d'un groupe d'investigation donnant lieu à écoute et questionnement par les autres. Les documents rédigés par les groupes témoignent de ce que la réflexion dans chacun des domaines a progressé. Référence est faite à la méthode d'Euler ou à la méthode des rectangles pour l'algorithme. Seule une partie des groupes aborde le calcul mathématique, mais ceux qui le font donnent un calcul correct de la fonction modélisant le câble. Cependant, aucune valeur de H n'est proposée. Les notions de tension, de suites définies par récurrence ou arithmétique, de primitive ainsi que la loi de Newton, et le lien entre dérivée et coefficient directeur de la tangente sont mentionnés.

Dans la phase collective de *synthèse*, l'enseignante fait parcourir aux élèves les 5 documents en insistant sur les points qui lui ont paru importants « à chaud ». A chaque étape un-e élève est au tableau, mais c'est bien l'enseignante qui dirige. Nous prenons les points sur lesquels l'enseignante insiste comme indices de savoirs qu'elle souhaite institutionnaliser. Ils sont de deux ordres : (1) des savoirs en Mathématiques et en Physiques, (2) des éléments relatifs à la question posée et à la méthode pour y répondre.

Parmi les savoirs concernant l'ordre (1), on repère :

- la loi de Newton, l'enseignante insistant sur la construction de l'équilibre de trois forces et la décomposition d'une relation vectorielle sur deux axes,
- la nature des suites et le lien avec les variables dans l'algorithme,
- le coefficient directeur d'une droite connaissant un vecteur directeur, ce point semblant une difficulté pour les élèves, concentrés sur le fait que la droite est une tangente et donc que le coefficient directeur est le nombre dérivé,
- la constante d'intégration dans le calcul d'une primitive et une méthode pour la calculer.

Parmi les savoirs concernant l'ordre (2) on repère :

- le fait que la tension à des points donnés conduit à modéliser le câble comme une ligne brisée,
- le rapport entre le caractère constant de la composante horizontale et le paramètre H dans les différentes formules,

[8] Les vidéos sont visibles à http://casyopee.eu/articles.php?lng=fr&pg=83

- le fait que la forme de la courbe pouvait être conjecturée *a priori*, mais que l'étude permet de la « trouver »,
- la nécessité de trouver H (mais remise à une prochaine séance).

Notons que les savoirs concernant l'ordre (1) interviennent plutôt dans les étapes du parcours (exploitation d'un document) et les savoirs concernant l'ordre (2) plutôt dans les transitions.

VI. ELEMENTS DE BILAN

Rappelons qu'il s'agit d'une première mise en œuvre d'un dispositif novateur et complexe sur un problème lui aussi complexe et qu'il ne faut pas voir dans cette expérimentation une donnée à diffuser, mais plutôt une ouverture sur des questions.

Nous comparons pour cela avec la mise en œuvre « cycle de modélisation » (CM) dont voici quelques éléments. Une première séance collective de 30 minutes a pour but d'exposer le problème et par une étude similaire à celle des documents A et B à présenter la notion de tension dans le câble. Il est admis, sans passer par un modèle discret, que la composante horizontale H est constante et que la composante verticale V en un point croît de façon linéaire en fonction de l'abscisse du point. Une formule est trouvée pour V, et l'égalité $f'(x) = \frac{V(x)}{H}$ est reconnue comme pouvant conduire à déterminer f. Dans une seconde séance d'une heure et quart sur ordinateur, les élèves s'aident de Casyopée avec lequel ils sont familiers : il leur est demandé d'entrer et de placer une image du pont dans le repère de l'écran de géométrie, puis de déterminer la valeur de H et une courbe modélisant le câble ; ils utilisent pour cela des fonctionnalités de Casyopée qu'ils connaissent : entrée d'une fonction avec paramètre, calcul d'une primitive, pilotage du paramètre pour ajuster la courbe à l'image du câble. Dans une troisième séance collective de 30 min le professeur reprend la situation et présente les stratégies rencontrées. Il termine en indiquant les savoirs et connaissances mis en jeu dans cette étude.

Le temps consacré est similaire dans les deux mises en œuvre, mais les différences sont nombreuses. La mise en œuvre du dispositif ICS est plus ambitieuse, puisque l'étude de la tension à la courbe vise à être complète dans le cas discret et inclut un aspect algorithmique. A travers le document D, il y avait aussi l'ambition de lier discret et continu, mais les difficultés de calcul ont masqué la réflexion. Une conséquence est que le travail sur le document E, qui se situe dans l'ETF « mathématique » apparaît peu lié aux précédents dans la synthèse. De façon plus générale, il semble que, à travers la segmentation des ETFs, la question de la valeur de la tension constante H n'arrive pas à s'imposer comme lien entre les investigations.

De façon un peu inattendue pour nous, la mise en œuvre du dispositif ICS minimise fortement l'usage des instruments technologiques en faveur du papier crayon. Certes les groupes C analysent l'algorithme, mais ils n'exploitent pas cet algorithme pour répondre à la question. Les groupes E sont accaparés par le calcul en papier/crayon et ne saisissent pas l'occasion d'utiliser Casyopée. A l'inverse, le dispositif CM installe l'instrument dans une phase spécifique et sur une tâche bien balisée. En cherchant à dépasser un dispositif CM, une ambition des auteurs de cet article est la mise en place, à travers l'usage de la « classe mobile », de séances où le papier/crayon s'accorde avec l'usage de calculatrices et de Casyopée dans des problèmes de modélisation. Le document E aurait pu en être l'occasion, mais l'expérimentation montre que dans un travail de groupe d'une quarantaine de minutes, il est peu réaliste de penser que les élèves vont quitter le papier/crayon avec aussi peu d'indications sur l'usage de Casyopée.

La richesse des échanges dans les groupes de communication, et le fait que les différents aspects de la question ont effectivement été abordés témoignent de l'adhésion des élèves au dispositif et au type de problème malgré la proximité du bac, et indiquent que la dialectique media-milieu fonctionne. La question de l'« idonéité » des ETFs reste posée. Il semble par exemple que le travail prévu dans le document E aurait pu être segmenté, une investigation se faisant en papier/crayon et l'autre dans un travail mieux balisé avec Casyopée. Une autre question est celle du lien entre les investigations. Il serait utile de savoir d'une part ce que les élèves retiennent de la synthèse, et aussi quelles techniques professorales sont efficaces dans la phase de synthèse.

Acknowledgment: This research was supported by Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED), under grant number VI1.99-2012.16.

REFERENCES

Blum W., Galbraith P. L., Henn H-W. & Niss M. (Eds.) (2007) Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10.

Chevallard C. (2007) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux mars 2007 Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* année 2007, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2).

Duval R. (1999) Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, vol 1, pp. 3-26.

Gueudet, G., Lebaud M-P. (2014) Usage des technologies et investigation en mathématiques : quels contrats didactiques possibles ? *Recherches en Éducation* –21.

Halbert R., Lagrange J-B., Le Bihan C., Le Feuvre B., Manens M-C., Meyrier X. (2013) *Les fonctions : Comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale. L'apport d'un logiciel dédié*. I.R.E.M de RENNES – Université de RENNES.

Kuzniak A. (2011) L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak A., Richard P.R. (2013) Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17, Numero Extra. 1*.

Lagrange (2015) Functions in technological environments: from multi-representations to connected functional workspaces. In Gomez-Chacon, I., Escribano, J., Kuzniak A., Richard, P. (Eds.) (2015). *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium*. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matematica Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid. ISBN: 978-84-606-9475-5, pp.317-336. http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf

Tran Kiem M. (2012) Une approche expérimentale des fonctions avec le logiciel Casyopée. *Petit x* 88, 49-74.