Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE CHANGEMENT DE LANGAGE DANS L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Judith NJOMGANG NGANSOP[*] – Patrick TCHONANG YOUKAP[**]

Résumé – Le travail que nous présentons porte sur le changement de langage en mathématiques. Dans l'enseignement supérieur, la plupart des théorèmes et des définitions sont donnés dans la langue naturelle. Ils sont facilement compréhensibles, mais pas opératoires. Pour les utiliser dans les démonstrations, les étudiants doivent pouvoir les écrire dans le langage formel. Nous présentons brièvement des résultats de deux enquêtes auprès des étudiants de première et de deuxième année de licence de mathématiques, qui montrent que cette activité est source de difficulté pour cette population. Un travail exploratoire nous conduit à faire l'hypothèse que la pratique des langues locales peut avoir des interférences dans le langage mathématique

Mots-clefs : didactique des mathématiques, logique, langage, quantification, implication.

Abstract – The work we present is about the change of language in mathematics. In the higher education, the most of theorems and definitions are given in the natural language. They are easy understandable, but not operating. To use it in the demonstrations, students must be able to write it in the formal language. We briefly present the results of two surveys of undergraduate and graduate students, which show that this activity is a source of difficulty for them. An exploratory work leads us to hypothesize that the practice of local languages may interfere in the mathematics' language.

Keywords: didactic of mathematics, logic, language, quantification, implication.

I. INTRODUCTION

En mathématiques, à l'université, la plupart des théorèmes et définitions sont donnés dans la langue naturelle, ce qui cache la structure logique des énoncés. A ce niveau d'étude, les démonstrations sont généralement construites dans le langage mixte ou formel. Il est donc essentiel de pouvoir identifier la structure logique des énoncés à prouver en les réécrivant dans le langage formel. En effet, l'écriture formelle d'un énoncé apporte des informations dans des activités de preuve :

- comment prouver cet énoncé ;
- comment utiliser l'énoncé dans une preuve.

Ce point de vue est renforcé par les résultats des travaux de Selden & Selden (1995) qui montrent que la capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels[1]

[*] Université de Yaoundé I, École Normale Supérieure de Yaoundé – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr
[**] Université de Yaoundé I, École Doctorale – Cameroun – patricktchonang@yahoo.fr ;
[1] Enoncés donnés dans le langage courant

Njomgang Ngansop J., Tchonang Youkap P. (2015) Le changement de langage dans l'activité mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 752-764.

participe fortement de la construction de la structure de la preuve de ces énoncés et a une part importante dans la construction et la validation des preuves.

Or, les activités de changement de langage sont pour beaucoup d'étudiants une source de difficultés (Duval 1988).

Nous faisons l'hypothèse que dans le contexte universitaire camerounais, les résultats de ces auteurs restent actuels, l'apprentissage du langage du calcul des prédicats n'étant effectué ni dans le secondaire, ni dans l'enseignement supérieur. À ceci s'ajoutent les difficultés éventuelles liées à l'apprentissage des mathématiques dans une langue autre que la langue maternelle (Durand-Guerrier & al. 2014).

Dans notre travail, nous nous intéressons au changement de langage (du langage courant au langage formel) pour les énoncés quantifiés. Nous présentons brièvement dans une première partie, quelques résultats d'une étude épistémologique des concepts de quantification et d'implication. Dans une deuxième partie, nous exposons les raisons pour s'intéresser à la question du changement de langage et dans une troisième partie, nous présentons et analysons les résultats d'une enquête conduite auprès des étudiants de deuxième année de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé[2].

Nous avons choisi comme cadre théorique de notre travail, le calcul des prédicats, cadre idoine pour l'analyse du discours mathématique (Durand-Guerrier 1996 ; Durand-Guerrier & Arsac 2003).

II. LA QUANTIFICATION ET L'IMPLICATION

La notion de quantification est une formalisation de la notion de quantité dans la langue naturelle.

1. *La quantification et le calcul des prédicats*

Dans le langage du calcul des prédicats standard, il existe deux quantificateurs : le quantificateur universel noté $\forall$ dont la signification dans la langue parlée est *tous*, et le quantificateur existentiel noté $\exists$ dont la signification dans la langue parlée est *il existe au moins un*.

Dans la langue naturelle, plusieurs mots et expressions expriment la notion de quantité : *pour tout*, *quel que soit*, *chaque*, qui sont synonymes de *tous* ; *certains*, *plusieurs* qui sont synonymes de *il existe au moins un*, puis, *il existe un unique*, *aucun*, qui ne sont pas modélisés, mais se traduisent par des formules complexes. Dans le langage courant, le mot *un(e)* est très utilisé. Il rentre dans le groupe de déterminants que F. Corblin (1996) appelle les indéfinis au sens étroit. Il en donne plusieurs interprétations :

- dans le cadre de la logique des prédicats, il cite Russell qui donne la traduction canonique du mot anglais *a* par le quantificateur existentiel ;
- dans le cadre de la Théorie de la Quantification Généralisée (TQG), il est considéré comme un quantificateur universel ;
- dans la Théorie des représentations du discours (DRT), *un* introduit une variable d'individu, c'est-à-dire, un générique.

Étant donné un domaine d'interprétation, le quantificateur universel transforme une phrase ouverte en une proposition vraie lorsque tous les objets de l'univers du discours satisfont la

[2] Ecole de formation des professeurs de lycées d'enseignement général et de professeurs de collèges

phrase ouverte, sinon, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé universellement quantifié est « $\forall x, P(x)$ » où x est une variable et P une fonction propositionnelle.

Un énoncé universellement quantifié est faux dès qu'il existe une instance de la phrase ouverte qui est fausse. Il se peut dans certains cas, que toutes les instances soient fausses.

La prise en compte du domaine de quantification est essentielle pour déterminer la valeur de vérité d'un énoncé quantifié.

Le quantificateur existentiel, quant à lui, transforme une phrase ouverte en une proposition vraie si au moins un élément de l'univers du discours satisfait la phrase ouverte. Dans le cas où aucun objet de l'univers du discours ne satisfait la phrase ouverte, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé existentiel est « $\exists x, P(x)$ » où P et x sont définis comme précédemment.

Il faut signaler que dans le langage courant, le quantificateur existentiel n'est pas souvent explicité. Pour traduire une phrase donnée dans le langage courant dans le langage du calcul des prédicats, on est amené à éclaircir son sens. C'est le cas par exemple de la phrase « *Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 a un diviseur premier* », où n'apparait pas le quantificateur existentiel. Cette phrase se formalise ainsi :

$\forall n, (((n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq 2)) \Rightarrow \exists p, R(p) \wedge (p/n))$, R étant le prédicat « être premier ».

Tant pour la quantification universelle qu'existentielle, on voit l'importance de l'univers du discours sur lequel porte cette quantification.

On peut à partir des formules atomiques, des connecteurs logiques et des quantificateurs, construire des énoncés complexes. Mais la détermination de la valeur de vérité de ces énoncés n'obéit plus pour la plupart, au principe de vérifonctionnalité comme c'était le cas dans le calcul des propositions, du fait que dans le calcul des prédicats, « les propositions complexes ne sont pas des agrégats de propositions plus simples » (Tarski, 1950, 1972). En effet, beaucoup d'énoncés complexes sont constitués d'énoncés imbriqués les uns dans les autres, comme le montre cet exemple :

$\forall f\ \forall a[(\forall u\ (F(u,a)\ \Rightarrow\ G(f,u,a))\ \Rightarrow H(f,a)]$, où F, G et H sont des relations.

C'est la notion de *satisfaction* qui va permettre d'étendre les connecteurs logiques propositionnels au calcul des prédicats, qui de ce fait est vu comme une extension du calcul des propositions.

5. L'IMPLICATION

Dans le calcul des propositions, l'implication est un connecteur binaire qui relie deux variables p et q pour donner la formule notée $p \Rightarrow q$ qui modélise un énoncé conditionnel. On l'appelle implication matérielle ou conditionnel matériel. p et q sont respectivement appelés antécédent et conséquent.

Un tel énoncé n'est faux que dans le cas où son antécédent est vrai et son conséquent est faux. Il est donc vrai dans les trois autres cas.

Dans le langage naturel (ou langage courant), l'implication qu'on retrouve sous la forme « *si …, alors…* » n'engage généralement le locuteur que si l'antécédent est vrai. C'est ce que Quine (1950) a appelé le conditionnel courant. L'utilisation de « *si …, alors…* » dans le langage courant peut induire chez les élèves la *propriété-en-acte de causalité*[3] (Deloustal-Jorrand 2000-2001) selon laquelle il y a un lien de causalité évident entre l'antécédent et le conséquent.

Dans le calcul des prédicats, une formule du type $P(x) \Rightarrow Q(x)$, où P et Q sont des prédicats est interprétée par une phrase ouverte. Pour tout élément a de l'univers du discours, $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est une implication matérielle. Elle n'est fausse que si $P(a)$ est vraie et $Q(a)$ est fausse. Dans les autres cas elle est vraie. On dira alors que a satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$. On définit ainsi le connecteur $\Rightarrow$ dans le calcul des prédicats à partir de l'implication matérielle, et on l'appelle l'*implication ouverte*.

La formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ étant interprétée dans une structure par une phrase ouverte, on peut la clore à l'aide du quantificateur universel ou existentiel.

On obtient pour la clôture universelle, la proposition $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ appelée *implication formelle* (Russel, 1903, 1910) ou *faisceau de conditionnel* (Quine, 1950, 1972). Cette proposition est vraie lorsque pour chaque instance de x l'implication matérielle obtenue est vraie. On voit donc que pour définir l'implication formelle $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, on doit introduire chaque implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$, définie pour une certaine classe d'objets.

Il est à noter que les théorèmes en mathématiques sont généralement donnés sous la forme d'une implication formelle, mais le plus souvent, le quantificateur est omis.
On définit également la clôture existentielle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ qui est $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Elle est vraie s'il existe un élément de l'univers du discours qui satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

III. LE LANGAGE ET L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

1. *Le langage de la quantification*

Susanna Epp (1999) présente une variété d'énoncés quantifiés que nous manipulons d'ordinaire dans l'activité mathématique. L'utilisation de ces énoncés nécessite qu'ils aient du sens pour les étudiants. Par exemple, quelles sont les différentes expressions qui marquent la quantification universelle ? Pour un énoncé universel, à quel moment est-il vrai ? Quand doit-on dire qu'il est faux ? À partir d'un énoncé vrai, que peut-on déduire ? Ces questions sont fondamentales du point de vue didactique. En effet, la multiplicité des mots de la langue et des formes d'expressions ne facilite pas toujours la compréhension des phrases. L'auteure souligne le cas des énoncés universellement quantifiés de la forme « All A are B »[4] qui peuvent se mettre sous la forme conditionnelle « if-then »[5] :

All squares are rectangles[6] » peut être transformé en la forme équivalente « *for all x, if x is a square, then x is a rectangle*[7].

Transformer un énoncé de la forme « tout A est B » en son équivalent dans le langage formel mobilise le concept d'implication dans le calcul des prédicats.

Concernant les énoncés existentiels donnés sous la forme « Some A are B »[8], ils peuvent être reformulés avec l'expression « *il existe au moins un* » :

---

[3] « $A \Rightarrow B$ n'a de raison d'être que lorsque A et B ont un lien de causalité (évident) entre elles », A et B étant des propositions.
[4] Tous les A sont B
[5] Si-alors
[6] Tous les carrés sont des rectangles
[7] Pour tout x, si x est un carré, alors il est un rectangle

Some Rational numbers are integers »[9] peut être écrit « *there exists a rational number x such that x is an integer*[10].

Selon l'auteure, la maîtrise de ces différentes formes langagières facilite la manipulation des énoncés dans les registres de la langue naturelle et formelle. En effet, d'une part, le passage d'un langage à un autre passe par une paraphrase correcte des énoncés, et de ce fait, le choix des expressions justes, et d'autre part, l'identification des objets à partir de leurs formulations variées devient plus aisée.

Les travaux montrent que ces compétences ne s'acquièrent pas spontanément :

> The ability to rephrase statements in alternate, equivalent ways, to recognize that other attractive-looking reformulations are not equivalent, and to have a feeling for truth and falsity of universal and existential statements are crucial in mathematical problem-solving tools. Yet numerous studies show that students do not acquire these abilities spontaneously[11]. (Epp 1999, p.2)

L'usage du langage courant va stabiliser les pratiques langagières et générer de nombreuses erreurs au cours de l'activité mathématique.

2. *Le changement de langage et la preuve en mathématiques*

Dans leur article publié en 1995, intitulé *Unpacking the logic of mathematical statements,* Annie Selden et John Selden soutiennent que les étudiants qui n'arrivent pas à déterminer correctement la structure logique des théorèmes, ne peuvent pas non plus déterminer la validité de leurs preuves (p. 125).

Ces auteurs définissent un énoncé *informel* comme un énoncé qui s'écarte d'une version dans le langage du calcul des prédicats, c'est-à-dire, qui n'utilise pas les expressions telles que « pour tout », « il existe », « et », « ou », « si… alors, … », « si et seulement si », avec leurs variantes.

Ils prennent les exemples suivants :

- « differentiable functions are continuous[12] » : par convention, le quantificateur universel est sous-entendu.
- « a function is continuous whenever it is differentiable[13] » : elle s'exprime sans le « si … alors … » qui traduit le conditionnel.

D'après les auteurs, ces formulations sont très courantes en mathématiques, et ne sont pas considérées comme ambigües ou mal construites, dans la mesure où elles sont comprises par un grand nombre de personnes. Elles sont rarement clarifiées, les conventions permettant leur interprétation précise par les mathématiciens, mais pas nécessairement par les étudiants.

Les auteurs désignent par « expliciter la structure logique d'un énoncé informel », le fait d'associer à cet énoncé informel un énoncé formel d'où ressortent les éléments logiques y compris ceux qui, par convention, sont sous-entendus.

Les auteurs illustrent cette définition par un exemple :

---

[8] Certains A sont B
[9] Certains nombres rationnels sont des entiers
[10] Il existe au moins un nombre rationnel x, tel que x soit un entier
[11] La capacité de reformuler, de reconnaître que des reformulations d'apparence attractive de ne sont pas équivalente, et d'avoir le sentiment de vérité ou de fausseté pour les énoncés universellement et existentiellement quantifiés sont des outils cruciaux pour résoudre les problèmes mathématiques. De nombreuses études montrent que les étudiants n'acquièrent pas spontanément ces capacités.
[12] Les fonctions différentiables sont continues
[13] Une fonction est continue si elle est dérivable

(1) "In a compact semigroup every group is contained in its own maximal group which is closed"(p.128)[14]

Un exemple d'explicitation logique est :

(2) "For every semigroup S and every group G, if S is compact and G is a subgroup of S, then, there is a group H such that H is a subgroup of S, G is a subgroup of H, and H is maximal and closed"[15]

D'après leur expérience, pour les besoins de l'enseignement, les énoncés informels de type (1) sont beaucoup plus compréhensibles que les énoncés formels de type (2), car ils sont plus faciles à appréhender, tandis que les énoncés de type (2) sont utiles pour les preuves.

En effet, un énoncé formel fait ressortir la structure logique cachée de l'énoncé informel qui lui est associé, et donne des indications sur la manière dont on peut engager la démonstration de l'énoncé.

3. *Des résultats d'une expérimentation*

Au mois de décembre de l'année 2010, nous avons soumis 68 étudiants camerounais de première année de licence de mathématiques à un questionnaire portant sur la logique.

Le questionnaire que nous avons proposé aux étudiants comportait 11 questions, la dixième portant sur le changement de langage ; il s'agissait d'écrire la conjecture de Goldbach énoncée en langue naturelle, dans le langage formel :

« *Tout entier naturel pair* n*, supérieur ou égal à* 4 *est la somme de deux nombres premiers* »

Dans notre communication, nous ne nous intéressons qu'aux résultats de cet item.

<u>Présentation du contexte camerounais</u>

Le Cameroun possède deux langues officielles : le français et l'anglais. Le système d'enseignement francophone est différent du système d'enseignement anglophone. Le choix du système d'enseignement pour un enfant s'opère dès la maternelle, et il est difficile de changer de système en cours de cycle primaire ou secondaire. Dans l'enseignement supérieur, les cours sont donnés indifféremment en français et en anglais dans la zone francophone, alors que dans la zone anglophone, ils sont donnés exclusivement en anglais.

En dehors des deux langues officielles, on rencontre environ deux cent trente langues locales[16] qui sont classées en six grands groupes au sein desquels on observe des variations linguistiques plus ou moins grandes. Comme l'a montré Françoise Tsoungui (1980) pour la langue Ewondo, ces langues locales déteignent sur la pratique du français, ce qui n'est en général pas pris en compte dans le cours de mathématiques.

Dans le secondaire comme dans le supérieur, le cours de mathématique est porté par la langue naturelle qui est le français ou l'anglais. Nous avons choisi de nous intéresser exclusivement aux enseignements faits en français.

<u>Brève analyse logique de la conjecture de Goldbach</u>

La conjecture de Goldbach est un problème ouvert, en ce sens que sa démonstration n'est pas encore établie. C'est un énoncé de la forme « tout A est B ».

---

[14] Dans un semi groupe compact, tout groupe est contenu dans son propre groupe maximal qui est fermé.

[15] Pour tout semi groupe S et tout groupe G, si S est compact et G est un sous-groupe de S, alors il existe un groupe H tel que H est un sous-groupe de S, G est un sous-groupe de H, et H est maximal et fermé.

[16] Source : Institut National de la Cartographie (Yaoundé, Cameroun)

Sa formalisation nécessité que soient levés les implicites inhérents à la langue naturelle. La première paraphrase permet la suppression de la quantification bornée (Durand-Guerrier (1996), Durand-Guerrier et Arsac (2003), Chellougui (2004)) et l'introduction d'une variable :

($P1$) « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur ou égal à 4 alors, n est la somme de deux nombres premiers* ».
On obtient une implication formelle où la quantification universelle porte sur la variable n.
La deuxième paraphrase permet d'expliciter le conséquent. On introduit deux lettres de variables qui désignent les deux nombres premiers dont n est la somme :
($P2$) : « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur à 4, alors il existe deux nombres*

premiers p et q tels que leur somme soit égale à n ».

Pour la formalisation de cet énoncé, on note :

R la propriété qui s'interprète par « être premier » ;
$\mathcal{P}$ la propriété qui s'interprète par « être pair » ;
Q la propriété qui s'interprète par « être supérieur ou égal à 4 » ;
S la relation ternaire qui s'interprète par « être la somme de … et de … »

On obtient l'écriture formelle :

(P3) $\forall n\ ((\mathcal{P}(n) \wedge Q(n)) \Rightarrow (\exists p, \exists q, (R(p) \wedge R(q) \wedge S(n, p, q)))$

On obtient un énoncé conditionnel universellement quantifié. Son antécédent est une conjonction de deux formules atomiques et sont conséquent est un énoncé existentiel.

<u>Présentation des résultats</u>

L'explicitation de l'antécédent et du conséquent mettent en évidence plusieurs niveaux de formalisations possibles de cet énoncé, et nous amène à considérer les réponses possibles suivant deux axes :

Suivant le premier axe :

1) Structure globale de la phrase et domaine explicite de quantification en tête de phrase ou non. On distingue :
   a) des énoncés conditionnels universellement quantifiés ou non, où l'antécédent et le conséquent sont respectivement l'expression correcte ou non dans le langage formalisé de « n est un entier naturel pair, plus grand que 4 », et de « n peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » ;
   b) une équivalence ;
   c) des formulations qui ne sont pas des énoncés conditionnels, et que nous avons appelés « linéaires ». C'est une suite de conjonctions ou d'énoncés séparés par une virgule ;
2) Traduction des propriétés et introduction des variables (avec ou sans quantificateur).

Nous adoptons le codage *<u>suivant le premier axe</u>* :

ECQ : énoncé conditionnel universellement quantifié
ECnonQ : énoncé conditionnel non quantifié
EquQ : équivalence universellement quantifiée
Equ*non*Q : équivalence non quantifiée
ELQ : énoncé linéaire universellement quantifié
ELnonQ : énoncé linéaire non quantifié

Suivant le second axe :

Vlib : variable libre

Nous ne signalons pas les variables liées car toutes doivent l'être étant donné qu'on a un énoncé clos.

Exemple :

$\forall n \in \mathbb{N}, (((\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k)\ et\ n \geq 4) \Rightarrow (\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n = p + q)),$
avec p et q premiers

Cette formalisation a une structure ECQ, l'antécédent est correctement énoncé et dans le conséquent, les nombres premiers sont introduits par le QE mais la propriété *être premier* est énoncée à la fin.

Sur les 68 étudiants interrogés, seuls 25 ont proposé une écriture formelle de la conjecture. Les productions sont différentes les unes des autres, mais on retrouve des structures semblables

ECQ conditionnel universellement quantifié	ECnonQ conditionnel non quantifié	EquQ équivalence universellement quantifiée	ELQ linéaire universellement quantifié
10	1	1	13
E02*, E05, E15, E16, E24, E45, E30, E43, E44, E67	E29	E32	E20, E25, E26, E27, E28, E31, E33, E39, E40, E41, E42, E50, E68

***Tableau 1** - Répartition des réponses suivant la structure*

	$\boldsymbol{k}$ **Vlib**	$\boldsymbol{p, q}$ **Vlib**	$\boldsymbol{k, p, q}$ **Vlib**	$\boldsymbol{n}$ **Vlib**	**Enoncés clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels	E16	E24, E43, E45	E44, E67	E29	E05, E15, E30, E02	11
Les énoncés linéaires	E27, E42, E68	E26, E39	E20, E40, E41		E25, E28, E31, E33, E50	13
L'équivalence	E32					1

***Tableau 2** –Répartition des réponses suivant le second axe : traduction des propriétés et introduction des variables*

Quelques exemples de réponses :

E15 : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 4)\ \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k \Rightarrow \exists p_1, p_2 \in P / n = p_{1+}p_2$
Cette réponse est un énoncé clos de type ECQ. Dans l'antécédent, on devrait avoir les énoncés « n pair » et « $n \geq 4$ » liés par le connecteur « et ».
E27 : $\forall n, n = 2k\ (k \in \mathbb{Z}_+^2) n > 4, \exists n_1\ et\ n_2$ premiers tels que $n = n_1 +\ n_2$

La réponse de **E27** est un énoncé linéaire de type ELQ, dans lequel k est une variable libre. Par ailleurs, on y retrouve la traduction littérale de « tout entier n pair, suppérieur ou égal à 4 ».

Notons qu'en toute rigueur, l'énoncé sur lequel porte le quantificateur universel devrait être entre les parenthèses. Nous pouvons attribuer l'absence des parenthèses aux pratiques enseignantes.

Ces résultats montrent que :

- la transformation d'un énoncé de la forme « tout A est B » en un énoncé de la forme « $\forall x, (A(x) \Rightarrow B(x))$ » ne va pas de soi ; les réponses des étudiants sont proches des énoncés congruents à l'énoncé de départ, surtout pour ce qui concerne l'antécédent : lorsque le domaine est $\mathbb{N}$, la formalisation de l'expression de « n pair et supérieur à 4 » n'est pas faite sous la forme une conjonction (hormis **E43**). Chellougui (2004, 2009) a montré que ceci était également présent chez certains auteurs de manuels universitaires ;
- aucun énoncé conditionnel qui a été proposé n'est correct ;
- la syntaxe dans l'usage des symboles est approximative et le phénomène d'imitation repéré chez les étudiants (Gueudet, 2008) est bien présent ;
- le statut des variables n'est pas toujours pris en compte. Certains étudiants ont donné en formulation symbolique un énoncé ouvert, où apparaissaient souvent plusieurs variables libres. La nature de ces variables est précisée, mais dans une syntaxe incorrecte du point de vue logique. On peut penser que pour les étudiants il s'agit d'éléments génériques ;
- l'absence du quantificateur existentiel produit des énoncés congruents à l'énoncé de départ, qui ne traduisent pas cet énoncé.
- Nous retrouvons dans les productions des étudiants, les mêmes phénomènes repérés par Selden & Selden (1995), à savoir, la faible capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels.

Nous pouvons alors conclure que le changement de langage en mathématiques représente une réelle difficulté chez ces étudiants et que cette activité devrait être intégrée dans l'enseignement des mathématiques.

IV. LANGAGE ET CULTURE

Les travaux de Moschkovich (2005), Barwell & al (2007), Njomgang et Durand-Guerrier (2011) montrent l'importance de la prise en compte du multilinguisme dans la recherche en didactiques des mathématiques.

> There are more and more students with an increasing variety of linguistic backgrounds present in classrooms all over the world. Their very presence forces teachers and mathematics educators to ask previously unasked questions: is mathematics 'language-free'; which languages do students use; which should they be encouraged to use; when; why; for how long; what are the consequences for resources and assessment of mathematics? (Barwell & al. 2007, p. 113)

Concernant les étudiants camerounais, nous parlerons de multilinguisme dans les salles de classe dans la mesure où chaque étudiant possède et pratique sa langue maternelle qui n'est ni le français, ni l'anglais comme nous l'avons précisé en amont.

A l'université, dans les filières mathématiques, on constate une prédominance des étudiants de la région de l'ouest du Cameroun (50 à 60%). Nous nous sommes intéressés au langage de la quantification dans deux départements de cette région dont nous sommes originaires, les Hauts-Plateaux et le Nkou-Khi. En nous appuyant sur cette citation de Maurice Houis & al. (1977) :

> Même là où il y a une véritable multiplicité de langues, où aucune ne domine par le nombre de locuteurs, par le prestige ou par l'efficacité pratique, il est fréquent que ces langues, dans une zone déterminée, soient étroitement parentes, que leurs systèmes et leurs structures soient les mêmes d'un point de vue typologique. […] La conséquence est qu'une économie certaine peut être réalisée puisque ces langues entre lesquelles il n'y a pas intercompréhension opèrent néanmoins selon le même type de fonctionnement. » (in Tsoungui 1980, p. 92)

Nous pouvons regrouper les langues de ces départements dont les locuteurs se comprennent généralement, pour présenter des résultats d'une enquête que nous avons conduite auprès des étudiants de niveau 2 de la filière « Mathématiques » de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, et auprès d'un enseignant de cette même école, qui s'exprime correctement dans la langue française et dans la langue Batoufam, une langue pratiquée dans le Nkou-Khi.

1. Résultats d'un test avec des étudiants de niveau 2 de la filière « mathématiques »

En janvier 2015, nous avons demandé à 26 étudiants volontaires que nous avons présentés ci-dessus, d'écrire dans le langage formel la conjecture de Goldbach énoncée dans le langage courant.

Nous avons porté notre choix sur cette population du fait que son séjour d'une année à l'université l'aurait familiarisée avec le langage formel.

En nous référant à la grille d'analyse de la section III-3, nous obtenons les tableaux suivants :

ECQ Conditionnel quantifié	EquQ équivalence universellement quantifiée	ELQ énoncé linéaire universellement quantifié	ELnQ
13	1	11	1
E3 ; E1 ; E4 ; E5; E6 ; E7 ; E8 ; E9 ; E10 ; E11 ; E12 ; E13 ; E14	E2	E15 ; E16 ; E17 ; E18 ; E19 ; E21 ; E22 ; E23 ; E24 ; E25 ; E26	E20

Tableau 3 *- répartition des réponses suivant la structure*

	k Vlib	**p, q Vlib**	***n*, p, q Vlib**	***n* Vlib**	**Enoncé clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels		E3	E6 ; E7 ; E9 ;		E13 ; E1; E4; E5; E6 ; E8; E10; E11 ; E12; E14	13
Les énoncés linéaires	E17 ; E22	E26		E20	E15 ; E16 ; E18 ; E19 ; E21 ; E23 ; E24 ; E25	12
L'équivalence	E2					1

Tableau 4- *classification des réponses des étudiants selon leur structure et les différentes variables libres qui y sont contenues.*

Nous obtenons 13 énoncés quantifiés, une équivalence et 12 énoncés linéaires.

Il faut noter qu'aucun étudiant n'a donné une écriture correcte dans le langage formel.

Par ailleurs, parmi les 12 étudiants qui ont donné des énoncés linéaires, 7 sont de l'ouest et parmi les 13 qui ont donné des énoncés conditionnels, 7 sont de l'ouest.

Quelques exemples de productions :

E1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4 / \exists p \in \mathbb{N} / n = 2p \Rightarrow \exists q_1, q_2\ nombres\ premiers\ / \ n = q_1 + q_2$ (EQC)
E2 : $\forall x \in \mathbb{N}\ \ / \ x = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*, x \geq 4 \Leftrightarrow \exists (y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \ y, z \in P\ x = y + z$ (EquQ et kVlib)
E17 : $\forall n \in \mathbb{N} / \ n = 2k\ ,\ k \in \mathbb{N}\ \ et\ n \geq 4\ \ \exists (p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2\ \ p_1, p_2\ premiers\ / \ n = p_1 + p_2$ (ELQ, k Vlib)

D'une manière générale, le résultat du test que nous avons proposé aux étudiants montre que le niveau d'étude n'a pas une grande influence sur leur capacité à pouvoir effectuer de façon satisfaisante le changement de langage. On retrouve pratiquement les mêmes formulations que celles des étudiants de première année, alors que l'usage du formalisme pendant une année académique aurait pu laisser croire qu'ils seraient plus aptes à le manipuler.

2. Langue maternelle et explicitation du quantificateur

Dans sa thèse de doctorat, Françoise Tsoungui (1980) a identifié des interférences de la langue *ewondo* dans le français chez des élèves de la classe de sixième au Cameroun. Les observations naturalistes nous conduisent à faire l'hypothèse que la pratique de la langue batoufam et en général des langues de la région de l'ouest peut avoir un impact sur la pratique des mathématiques en français. Nous avons choisi cette langue parce que nous sommes originaires de cette partie du pays et que nous la pratiquons.

Pour notre enquête, nous avons rencontré un enseignant de Biologie de l'École Normale Supérieure de Yaoundé, en raison de sa bonne maîtrise du français et du Batoufam. L'objectif de l'entretien était de savoir si en Batoufam on établit un lien entre les énoncés de la forme « tout A est B » et ceux de la forme « pour tout x, si x est A, alors x est B ».

L'entretien a duré 30 mn, mais l'enseignant n'en a pas autorisé l'enregistrement. Notre corpus est constitué de quelques notes écrites.

Nous lui avons proposé de travailler sur l'énoncé « Tous les enfants du village qui sont dans la concession de Mbo[17] sont des jumeaux » (P).
Nous désignons par **E** l'enquêteur et par **Ens** l'enseignant. Nous présentons les points importants de cet entretien :

> E : Pouvez-vous traduire la phrase en Batoufam ?
> Ens : *Pô la'a wo la'a Mbo meu Ngne*
> E : Peut-on mettre cette phrase sous la forme conditionnelle, c'est-à-dire sous la forme « si … alors » *?*
> Ens : *Pô la'a peu la'a Mbo, meu woup Ngne[18]* (1). J'avoue que c'est un exercice que je n'ai pas encore fait, pourtant je pense que j'ai dit la même chose que précédemment !

Notre commentaire : La phrase (1) est linéaire. Le verbe est le mot « *peu* » (être). Il est utilisé au conditionnel et signifie « *s'ils sont* ». Lorsqu'on le prononce, l'intonation est montante.
Le mot « *meu* » signifie *alors*.

> E : on ne voit pas bien le « si … alors … ».

[17] Nom du propriétaire de la concession
[18] Si les enfants du village sont dans la concession de Mbo, alors ils sont des jumeaux

Ens : Cette forme est très peu utilisée. C'est surtout la forme et l'intonation des verbes qui renvoient au conditionnel. Le conditionnel explicite existe mais c'est très lourd, c'est pourquoi on ne l'utilise pratiquement pas.

E : Comment va donc se dire cette phrase ?
Ens : On peut aussi dire *Yé pi gue pô la'a pi la'a Mbo, meu woup Ngne* (2). Le groupe de mots *Yé pi gue* signifie *si*. On a ainsi un conditionnel explicite. Je dirais que l'expression *Yé pi gue* a plus la signification « *s'il est vrai que* ».

Notre commentaire : On peut croire que le conditionnel explicite renvoie au conditionnel courant. En effet, la conclusion n'engage le locuteur que si l'antécédent est vrai.

En conclusion, on peut faire l'hypothèse que le fait d'utiliser très souvent les formes linéaires et rarement le conditionnel explicite est une pratique qui peut se répercuter sur la pratique du français, car ils ont généralement tendance à traduire littéralement la langue maternelle[19].

V. CONCLUSION

Les résultats des deux enquêtes que nous avons présentés indiquent que le passage de la langue naturelle au langage formel de langage en mathématiques reste, même pour des étudiants d'un niveau avancé, une source de difficultés. Compte tenu de la place du langage dans l'activité mathématique –aide à la conceptualisation, ces difficultés doivent être prises en compte dans la classe de mathématiques, bien avant l'arrivée des étudiants dans l'enseignement supérieur.

Par ailleurs, la pratique du français rencontre de nos jours, beaucoup de difficultés dans le secondaire comme à l'université. D'après Onguene Essono (2003), le français apparaît comme une langue apprise et utilisée à l'école et par l'école ; l'exclusion de langue culturelle de l'apprenant à l'école induit des difficultés énormes propres aux activités inhérentes à la scolarisation qui peuvent retarder la compréhension.

Une perspective de recherche serait d'approfondir notre travail sur les pratiques langagières locales afin d'identifier celles qui entrent en conflit avec le français, langue d'apprentissage dans l'espace francophone. Une autre perspective de recherche consisterait, en restant dans la perspective du changement de langage, à conduire un travail sur la transformation des énoncés donnés dans le langage formel en langue naturelle, qui représente un enjeu important en mathématiques. Cela permettra de développer des modalités de travail sur la logique et le langage en relation avec l'activité mathématique.

REFERENCES

Barwell R., Barton B., Setati M (2007) Multilingual issues in mathematics education: introduction. *Educational Studies in Mathematics* 64, 113-119.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, Thèse en cotutelle, diplôme de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, Université de Tunis.

Corblin F. (1997) Les indéfinis : variables et quantificateurs. *Langue française* 116(1), 8-32.

Deloustal-Jorrand V. (2000-2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit X 55*, 35-70.

[19] Il est important de souligner que ce ne sont pas seulement chez les étudiants de l'ouest qu'on retrouve les traductions littérales de leur langue en français.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, octobre 1996.

Durand-Guerrier V., Kazima M., Libbrecht P., Njomgang Ngansop J., Salekhova L., Tuktamyshov N., Winsløw C. (2014) Challenges and opportunities for second language learners in undergraduate mathematics. In *ICMI Study 21 Book*. Springer

Duval R. (1988) Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* 1, 7-23.

Epp S. (1999) The language of Quantification in mathematics Instruction. *Developping Mathematical Reasoning in Grades K-12*, chapitre 16.

Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiairy transition. *Educational Studies in Mathematics* 67, 237-254.

Houis M., Bole-Richard R. (1977) *Intégration des langues africaines dans une politique d'enseignement*. AGECOP, UNESCO.

Moschkovich J. (2005) Using two languages when learning mathematics, in *Educational Studies in Mathematics* 64*,* 121-144.

Njomgang Ngansop J., Durand-Guerrier V. (2014) Negation of Mathematical Statements In French In Multilingual Contexts – *An example in Cameroon. Actes du colloque ICMI 21.*

Onguéné Essono C. (2003) Les productions écrites d'adolescents des cycles d'éveil et d'orientation en français langue seconde au Cameroun : une interlangue marquée. *Langues et Communication* 2(3), 175-194.

Quine W. V. O. (1950) *Methods of Logic*. New York : Holy, Rinehart & Winston.

Russell B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique*. PUF : Paris 1989

Russell B. (1910) *Principia Mathematica* traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique.* PUF : Paris 1989

Selden J., Selden A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements, in *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151

Tsoungui F. (1980) *Le français écrit en classe de 6ème à Yaoundé. Recherches des interférences de l'Ewondo dans le français et proposition pédagogiques*. Thèse de 3ème cycle, Université de la Sorbonne Nouvelle.