Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

EVOLUTION DU PROCESSUS DE CONSTRUCTION DE LA SIGNIFICATION MATHÉMATIQUE DE LA FONCTION « COSINUS » À TRAVERS L'ÉTUDE DES SIGNES LANGAGIERS UTILISÉS

Faten KHALLOUFI-MOUHA*

Résumé – En se plaçant dans le cadre de l'approche théorique de la médiation sémiotique et en admettant l'hypothèse que le langage est l'outil le plus important pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra- psychologique, nous étudions dans ce travail l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus », à travers l'étude de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri.

Mots-clefs : Théorie de la médiation sémiotique, signes langagiers, outil de médiation sémiotique, signification mathématique, discussion collective, artefact technologique.

Abstract – Using the theoretical approach of the semiotic mediation, this work is aimed to study the evolution from students' personal meanings to mathematically shared meanings in a teaching experiment integrating a technological artefact. We focus on the evolution of linguistic signs elaborated and used by the students and the teacher in order to identify the evolution the constructional process of significance of trigonometric function among the pupils.

Keywords: theory of the semiotic mediation, verbal signs, the construction of mathematical significance, collective discussions, the technological artefact.

I. INTRODUCTION

Les fonctions trigonométriques sont les premières fonctions périodiques et transcendantes enseignées au niveau du secondaire. L'une des sources de difficultés relative à l'enseignement et l'apprentissage de cette notion est la complexité épistémologique due à son introduction comme objet mathématique faisant partie du cadre de l'analyse en omettant ses liens avec le cadre géométrique de la trigonométrie (Khalloufi-Mouha & Smida 2012, p. 207). C'est ce qui nous a motivé à construire une ingénierie didactique permettant aux élèves d'appréhender le lien entre les aspects géométrique et fonctionnel de cette notion, en nous appuyant sur des travaux portant sur la notion de fonction (Sierpinska 1992 ; Falcade 2006 ; Falcade, Laborde et Mariotti 2007 ; Tall 1996). Nous avons choisi d'approcher les fonctions trigonométriques en tant que *covariation* c'est-à-dire en tant que *relation dynamique et asymétrique entre deux variations l'une dépendante de l'autre*. Cette approche nécessite la mise en place d'une expérience qualitative de la dépendance fonctionnelle en trigonométrie, qui fait appel aux

* Faculté des Sciences de Bizerte – TUNISIE – fkhalloufi@yahoo.fr

Khalloufi-Mouha F. (2015) Évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers l'étude des signes langagiers utilisés. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 741-751.

lignes trigonométriques, et à l'idée de mouvement, première représentation de la variation dans l'espace et dans le temps. Dans cette perspective, certains travaux (Falcade, Laborde et Mariotti 2007, Tall 1996) considèrent qu'il est important de faire appel à un environnement de géométrie dynamique, qui permet d'analyser les relations géométriques en termes de relations de dépendance fonctionnelle.

En nous plaçant dans la lignée de ces travaux, nous avons construit une séquence expérimentale d'enseignement intégrant l'environnement de géométrie dynamique Cabri, dans le but d'étudier l'impact de cette intégration sur le processus de construction des connaissances mathématiques mises en jeu et sur les stratégies de communication utilisées par l'enseignant pour guider les élèves dans cette construction. La conception de cette expérimentation s'inscrit dans le cadre d'une perspective vygotskienne de médiation sémiotique, laquelle stipule que le langage est l'outil le plus important pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra-psychologique. En effet, d'après Vygotsky (1938) le langage, en tant que système sémiotique de représentation, ne permet pas seulement de représenter la pensée comme fonction psychique supérieure, mais aussi de la maîtriser.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des phases de travail par binômes et de discussions collectives (Bartolini-Bussi 1996) dans le processus de construction de la signification mathématique de la fonction cosinus par des élèves de 2^{e} année de l'enseignement secondaire tunisien (16-17 ans)

II. NOS APPUIS THEORIQUES

Cet article se place dans le cadre théorique de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008). C'est une approche d'inspiration vygotskienne, reposant sur l'hypothèse que l'activité d'enseignement est une activité médiatisée. Cette approche vise la transposition du concept de médiation sémiotique dans le domaine de la didactique (Bartolini Bussi & al. 2003) et considère le processus de construction des connaissances comme une conséquence d'une activité instrumentée où différents types de signes (langagiers, gestuels, symboliques, etc.) émergent et évoluent à travers les interactions sociales. Elle offre un cadre théorique qui permet l'étude de l'utilisation des artefacts dans le domaine de l'enseignement en tant qu'instruments de médiation sémiotique. En effet, un artefact peut être exploité par l'enseignant comme un outil de médiation sémiotique permettant de développer les signes mathématiques à partir de signes qui se détachent de l'utilisation de l'artefact, mais qui maintiennent néanmoins avec l'artefact un lien sémiotique (Mariotti 2009). Le potentiel sémiotique d'un artefact représente le double lien qui peut s'établir, d'une part, entre l'artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation et, d'autre part, entre cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissables comme telles par un expert (Mariotti & Maracci 2010). Selon cette théorie, l'artefact entretient donc un double lien sémiotique : un premier lien *artefact/tâche* et un deuxième lien *artefact/connaissance mathématique*. Le lien entre *artefact/tâche* concerne le fait qu'un artefact permet d'accomplir une tâche spécifique. Cela favorise l'émergence des significations personnelles qui s'expriment essentiellement par des signes artefact (Bartolini Bussi & Mariotti 2008), constitués majoritairement de mots et d'expressions langagières. Le lien *artefact/connaissance mathématique* s'exprime par les signes mathématiques et revient à ce que tout artefact utilisé dans un objectif d'apprentissage est relié à une connaissance mathématique spécifique. La construction d'un lien entre les signes artefact et les signes mathématiques n'est ni spontanée ni triviale pour les élèves et peut constituer un objectif d'enseignement.

Selon la théorie de la médiation sémiotique, ce processus sémiotique de l'émergence et de l'évolution des signifiés personnels vers la signification mathématique visée par l'enseignement est réalisable à travers la construction et la mise en place d'une organisation didactique spécifique appelée le cycle didactique (Bartolini-Bussi & Mariotti 2008). C'est un cycle articulant trois types d'activités. Des activités faisant appel à l'artefact pour la résolution par les élèves (regroupés par binômes ou en petits groupes) de tâches spécifiques. La rédaction de rapports individuels à propos des activités élaborées dans la classe, favorisant la production individuelle des signes. Des discussions collectives orchestrées par l'enseignant qui constituent un contexte social favorisant la confrontation entre les différents signifiés personnels des élèves, en vue d'aboutir à la construction de la signification mathématique visée. Ces discussions peuvent atteindre le statut de discussions mathématiques au sens de Bartolini Bussi (1996).

III. PRESENTATION DE LA SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

1. *Présentation et objectifs de la séquence*

Dans l'objectif d'introduire les fonctions trigonométriques à travers une articulation entre le cadre géométrique de la trigonométrie et le cadre fonctionnel, nous avons choisi de faire appel aux lignes trigonométriques et à l'idée de mouvement, première représentation de la variation dans l'espace et dans le temps, en faisant appel à l'environnement Cabri qui permet d'interpréter les relations géométriques en termes de relations de dépendance fonctionnelle.

Dans la construction de la séquence d'enseignement, nous avons cherché à organiser un milieu d'apprentissage permettant de construire des fonctions géométriques, à l'aide des outils déplacement et trace de l'environnement Cabri qui relient les objets géométriques de Cabri (cercle trigonométrique, arc de cercle, angle…). Le passage aux fonctions trigonométriques se fera alors grâce à la notion de mesure (mesure d'angle, mesure d'arc, mesure d'un segment, abscisse d'un point…) qui permet de passer d'une variable *géométrique* à une variable *numérique*, en interprétant la variation (le déplacement) d'un point en tant que variation numérique de ses coordonnées ou d'une certaine mesure, via l'idée de covariation et de variable (Khalloufi-Mouha 2014).

La séquence est composée de quatre parties. Les deux premières parties font appel à la situation « poulie » (Genevès, Laborde & Soury-Lavegne 2005). Il s'agit d'une situation de modélisation dans Cabri d'une poulie et d'une ficelle qui peut être enroulée autour de la poulie, en utilisant l'outil déplacement. L'objectif est de construire, avec les élèves, l'idée de relation de dépendance fonctionnelle entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique. Nous supposons qu'il est important de matérialiser l'idée de cette relation entre la droite des réels et le cercle trigonométrique en faisant appel à l'idée d'enroulement qui consiste à enrouler la droite des réels sur le cercle trigonométrique. La situation poulie permet d'expérimenter l'enroulement dans un cadre géométrique fourni par l'environnement Cabri. En fait, la situation poulie permet de relier la mesure d'un arc du cercle qui représente la poulie, à une mesure rectiligne qui est celle de la ficelle. Ce résultat est très important mathématiquement pour l'introduction de la représentation graphique des fonctions trigonométriques et pour permettre aux élèves de construire un sens à la relation fonctionnelle entre la droite des réels et le cercle trigonométrique.

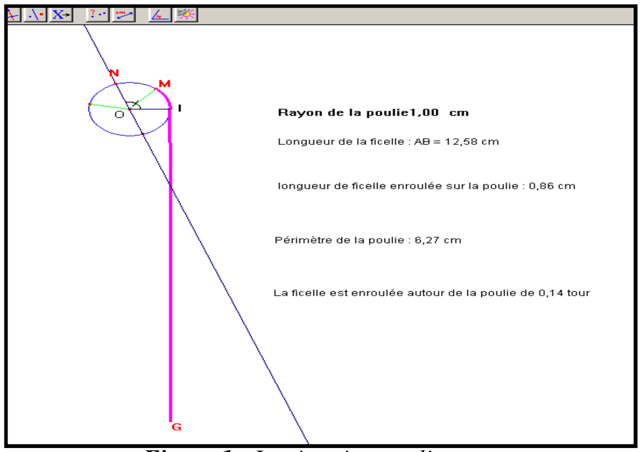

Figure 1 *- La situation poulie*

Dans la deuxième partie, l'utilisation de l'outil déplacement par l'enseignant vise à amener les élèves à associer à un réel quelconque x un point M sur le cercle trigonométrique, en reportant le nombre x sur le cercle trigonométrique. Nous faisons d'hypothèse que cette activité peut favoriser, chez les élèves, l'appréhension d'une relation fonctionnelle entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique.

Les troisième et quatrième parties sont basées sur le fonctionnement des outils déplacement et trace de Cabri comme outils de médiation sémiotique pour les notions de variation et de covariation, dans le but d'introduire la fonction cosinus et sa représentation graphique. Dans ces deux parties la situation poulie n'est plus utilisée.

Dans la troisième partie, l'idée de relation fonctionnelle entre la droite des réels et le cercle trigonométrique est réinvestie en faisant appel à l'outil déplacement et report de mesure de Cabri. L'objectif est d'amener les élèves à associer à un réel quelconque x, abscisse d'un point de l'axe des abscisses, un point M sur le cercle trigonométrique cela en utilisant l'outil report de mesure qui permet de reporter le nombre x sur le cercle trigonométrique. Par la suite la fonction « cosinus » est introduite comme la composée de cette fonction avec la fonction qui associe au point M son abscisse.

L'objectif de la quatrième partie est de visualiser en utilisant l'outil trace de Cabri, la variation de l'abscisse de M en fonction de la variation de x ce qui revient à représenter graphiquement la fonction « cosinus ».

2. *Mise en place de la séquence*

La séquence a été mise en place dans une classe de 16 élèves de 2e année (16-17 ans) d'un lycée secondaire de la région de Bizerte Tunisie. La séquence a eu lieu dans un laboratoire d'informatique où les élèves étaient placés par binômes. Chaque binôme utilise un ordinateur et est amené à produire une réponse commune. Un micro est placé afin d'enregistrer les interactions entre les deux élèves.

Signalons que les élèves participant à l'expérimentation ont une certaine familiarité avec l'utilisation de logiciels dans la classe notamment le logiciel Cabri et ont déjà étudié les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, ainsi que les lignes trigonométriques où le cosinus et le sinus sont introduits comme les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.

Différents types de données ont été recueillies (les productions des élèves, les fichiers Cabri, les rapports individuels, les enregistrements audio des différentes phases de travail et les rapports des observateurs). Les analyses qui suivent sont basées essentiellement sur les transcriptions des enregistrements audio, relatives à la phase de travail par binômes, ainsi qu'à la phase de discussion collective.

IV. METHODOLOGIE DE L'ETUDE DU PROCESSUS DE L'EVOLUTION DES SIGNIFIES DES ELEVES

L'étude du processus de construction de la signification mathématique de la notion de fonction « cosinus » est réalisée à travers l'analyse de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves lors des différentes phases du travail, ainsi que de la façon dont l'enseignant exploite ces signes. Pour ce faire, nous avons distingué deux plans d'analyse.

1. *Premier plan d'analyse : les signes simples*

Les signes simples sont les signes artefact, les signes pivots et les signes mathématiques. Dans nos analyses, nous avons repéré pour chaque notion mathématique visée les différents signes simples langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant, puis nous les avons classifiés selon la signification mathématique à laquelle ils renvoient. L'utilisation de cette classification permet, d'une part, d'analyser l'état évolutif des interventions de l'enseignant dans le processus de médiation sémiotique et, d'autre part, d'analyser l'évolution des signifiés personnels des élèves, relatifs à la notion visée et cela à travers l'identification des types de signes langagiers utilisés. En effet, le passage de l'utilisation de signes artefact vers l'utilisation de signes pivot, pour une notion donnée, sera interprétée comme une évolution dans la construction de la signification mathématique de cette notion. Par exemple, le passage de l'utilisation de signes artefact tels que « on augmente », « on enroule », « on déplace » pour désigner l'idée de « variation » ou de « variable indépendante » vers l'utilisation du signe pivot « varier » et par la suite vers le signe mathématique « variable » constitue une évolution dans la construction de la signification de variable chez les élèves.

2. *Deuxième plan d'analyse : Les signes complexes*

En admettant que la signification d'un signe est déterminée par la position qu'il occupe dans un système de signes plus complexe (Peirce, 1978) nous avons fait appel à un deuxième plan d'analyse, celui des signes complexes repérés dans les interventions des élèves ou de l'enseignant et relatifs à des relations entre familles de signes simples (Falcade, 2006). Falcade distingue quatre catégories de signes complexes : les caractérisations, les définitions, les interprétations et les instanciations.

Les caractérisations portent de façon plus ou moins implicite sur des signes mathématiques, des signes pivots ou des signes artefact et ont tendance à mettre en valeur quelques caractéristiques qui pourraient être interprétées en termes mathématiques. Néanmoins, les caractérisations ne sont pas de vraies définitions, parce que l'intervenant n'a pas l'intention de définir l'objet en question.

Les définitions portent sur un signe mathématique cible. Elles visent explicitement et intentionnellement à expliciter, préciser, délimiter son signifié. Elles ne sont pas des définitions au sens mathématique du terme mais constituent une « mise en mots » sur un objet qui était jusqu'alors inconnu ou peu connu.

Les interprétations portent sur l'établissement d'une correspondance entre deux familles de signes qui appartiennent à deux champs sémantiques différents.

Les instanciations sont des signes qui concernent l'établissement d'un lien interprétatif entre deux signes simples, où l'un est directement issu de l'activité dans l'artefact et est associé à un nom propre et l'autre est un signe mathématique cible.

L'analyse de ces signes permet également d'étudier l'évolution des signifiés personnels des élèves relativement à une notion mathématique. En effet, nous supposons que la première étape dans la construction d'un signifié peut se traduire par l'utilisation des signes complexes du type caractérisation, ou bien par l'utilisation de signes complexes du type définition. La deuxième étape dans la construction d'un signifié peut s'interpréter par l'utilisation des signes complexes du type instanciation et interprétation, qui reviennent à donner une interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact.

V. ÉTUDE DE L'EVOLUTION DU PROCESSUS DE CONSTRUCTION DE LA SIGNIFICATION MATHEMATIQUE

L'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de la séquence d'enseignement est un processus complexe et très articulé. Dans cet article, nous nous limitons à l'étude de l'évolution des signes langagiers relatifs à l'idée de relation fonctionnelle favorisant l'introduction de la fonction cosinus comme une relation de covariation. L'analyse des différents types de signes langagiers met en évidence quatre étapes marquant l'évolution des signifiés personnels des élèves relatifs à la notion de fonction trigonométrique. Ces étapes sont identifiées selon les signifiés personnels que nous avons dégagés à partir de l'analyse des interventions des élèves.

1. Étape 1 : Reconnaissance de la variation géométrique et numérique

Cette étape est marquée par l'utilisation de signes très attachés à l'activité avec l'artefact qui apparaissent essentiellement sous la forme de signes artefact relatifs à l'identification de l'idée de variation géométrique et numérique. La situation poulie a fourni un contexte pour une exploration dynamique de la notion de fonction trigonométrique en tant que covariation à travers l'utilisation de l'outil déplacement de Cabri. Cela s'est traduit dans les interventions des élèves par une importante utilisation de signes artefact tels que des verbes d'action décrivant l'utilisation de l'outil déplacement, et en grande partie relatifs au mouvement c'est-à-dire à la variation géométrique. Parmi ces signes citons « se déplacer », « déplacer », « bouger » et « varier » (lorsqu'il est utilisé comme un signe artefact pour décrire le déplacement d'un point ou d'un autre objet géométrique), « changer » (lorsqu'il désigne le changement de la position) « retourner » « enrouler » « partir », « arriver », « atteindre » et « prendre ». L'utilisation de l'outil déplacement a permis également aux élèves d'identifier des variations de type numérique comme la variation du rayon et la variation de la mesure de la ficelle enroulée autour de la poulie. Ces variations numériques sont des conséquences des variations géométriques puisqu'elles engendrent des variations au niveau des mesures (mesure d'angles, arc, longueurs, etc.) ou des abscisses de points du plan. Cette identification s'est traduite dans les interventions des élèves par l'utilisation de signes relevant du domaine numérique comme « augmenter », « diminuer », « varier » et « changer ». Cette première étape se caractérise également par l'utilisation de signes complexes décrivant la variation dans l'espace et dans le temps. Par exemple, nous avons relevé deux types de signes complexes : le signe caractérisation de la mesure d'un arc par la mesure de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie ; le signe interprétation de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie en tant qu'un arc de cercle (objet géométrique), ainsi qu'en tant que mesure d'un arc (objet numérique).

L'extrait suivant illustre un exemple de l'interprétation de la longueur de la ficelle enroulée autour de la poulie comme la longueur de l'arc.

Moufida : C'est la longueur de la ficelle enroulée.
Alaa : Oui on a voilà la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ c'est la longueur de la ficelle.
[…]
Alaa : Je dessine N sur le cercle et je la déplace.
[…]
Alaa : On a choisi des valeurs différentes de x…
Moufida : Et on a déplacé la ficelle de façon que M coïncide avec N sur le cercle.

2. *Étape 2 : Reconnaissance de la relation de covariation au niveau perceptif.*

Cette étape est identifiée à travers des interventions des élèves qui restent encore relatives au contexte de l'artefact mais qui attestent d'une généralisation et d'un premier détachement de l'artefact. Dans cette étape, nous avons repéré l'émergence du signe interprétation du déplacement en tant que variation géométrique ou numérique. Les interventions relevées montrent une élimination de la référence à l'espace et/ou au temps présente dans les signes artefact utilisés dans la première étape et un passage vers l'utilisation d'expressions telles que « *lorsque je déplace le point M, la mesure de l'arc varie* ». Les élèves arrivent également à reconnaitre le lien entre deux variations. Cela apparait à travers l'utilisation d'expressions tels que « quand X varie alors Y varie » ou comme « si X varie alors Y varie », attestant ainsi d'une reconnaissance de la variation indirecte.

3. *Étape 3 : interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact*

Cette étape se caractérise par l'utilisation de signes pivot comme « dépend de » ou « en fonction de » qui remplacent les expressions telles que « si X varie alors Y varie. », présentes dans l'étape précédente. Cette utilisation reflète la prise en considération par les élèves du lien fonctionnel entre les deux variables et constitue un indice d'une évolution au niveau des signifiés personnels relatifs à la notion variation et de covariation. Cette étape comporte également des signes complexes tels que des interprétations mathématiques de l'activité dans l'artefact, ce qui permet aux élèves d'évoluer dans la construction d'une signification mathématique de la notion de fonction trigonométrique (Khalloufi-Mouha 2012).

L'extrait suivant montre l'utilisation du signe pivot en « fonction de » de la part des élèves et met en évidence l'utilisation d'un signe complexe « *N : Oui si je change N alors la mesure de l'angle* $\widehat{ION}$*change.* » qui atteste l'établissement d'une relation de dépendance entre la mesure de l'angle et la mesure de l'arc. Nous interprétons ceci comme une tentative d'interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact.

N : Oui si je change N alors la mesure de l'angle$\widehat{ION}$change.
I : Fais varier N puis mets le M sur le N. Tu vas trouver l'arc... mesure l'arc.
N : L'arc en fonction de l'angle ?
I : Avec la ficelle...encore...encore...voila c'est le double.
N : Oui ça devient plus grand. Si je fais l'angle$\widehat{ION}$ le double on a la mesure de l'arc c'est le double.
I : Donc l'arc varie en fonction de l'angle.

L'extrait renvoie également à une interprétation de la simultanéité de la variation de l'angle et de l'arc suite au déplacement comme une relation de dépendance fonctionnelle cela reste cependant au niveau très attaché à l'artefact.

Signalons que dans cette troisième étape, certains binômes sont arrivés à l'interprétation de façon spontanée alors que, pour certains binômes, l'interprétation de la simultanéité de la variation dans Cabri en termes de relation fonctionnelle n'était pas immédiate et a nécessité l'intervention de l'enseignant, à travers la mise en place de discussions locales avec le binôme. Ces discussions correspondent aux phases de mini-discussion collective (Khalloufi-Mouha, 2009) et sont déclenchées suite à l'apparition d'un blocage ou d'une déviation importante de l'objectif de travail lors de la phase de travail par binôme. Elles constituent l'occasion d'une confrontation entre les signifiés personnels ayant engendré le blocage des élèves et la signification mathématique de la notion mathématique visée. Dans ces phases, l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact afin de faire évoluer la situation. Il utilise des signes artefact ainsi que des signes pivot. Il s'appuie sur l'activité avec l'artefact pour amener les élèves à dépasser certaines difficultés et engendre alors un changement au niveau des significations construites.

4. *Etape 4 : Définition mathématique de la fonction « cosinus »*

Trois types de relations fonctionnelles marquent cette étape qui mène à l'introduction de la signification mathématique de la fonction cosinus en tant que relation entre deux variations. Les élèves sont amenés à identifier et construire trois types de fonctions en se basant sur l'interprétation de la simultanéité du déplacement dans Cabri comme une relation de dépendance fonctionnelle qui a fait l'objet de l'étape précédente :

- identification et construction de relation de dépendance fonctionnelle entre des variables géométriques (fonctions géométriques Laborde & Mariotti 2002) :
- identification et construction de relation de dépendance fonctionnelle entre une variable géométrique et une variable numérique (fonction numérico-géométrique et fonction géométrico-numérique :
- identification et construction de la relation de dépendance fonctionnelle entre deux variables numériques en s'appuyant sur les deux types de fonctions précédentes.

Ces constructions font l'objet des activités proposées et sont guidées par l'enseignant lors des phases de mini-discussion et de la phase de discussion collective. Au cours de ces constructions, l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact et lui donne une interprétation mathématique. Pour l'enseignant, l'environnement Cabri joue le rôle d'un milieu sur lequel il se base pour introduire la signification mathématique de la fonction cosinus. L'enseignant part donc d'une expérience pratiquée par tous les élèves, pour d'abord étendre la métaphore au-delà de la longueur de la ficelle et de l'idée de l'enroulement, et pour passer ensuite de cette métaphore à l'idée de variation et de covariation, puis à l'introduction de la fonction « cosinus ».

Cette étape se caractérise par l'apparition d'une utilisation, de la part des élèves, de signes mathématiques relatifs à la classe de fonction, essentiellement lors de la discussion collective. Parmi ces signes, il y a des signes introduits par l'enseignant puis utilisés par les élèves, comme par exemple « fonction », « relation » « la fonction cosinus », « associe », etc. Nous avons également repéré des formulations de type mathématiques comme par exemple *« La fonction f qui associe le point M du cercle au point N. »*

L'extrait suivant décrit un exemple de la guidance de l'enseignant dans une phase de mini-discussion et la figure correspondante.

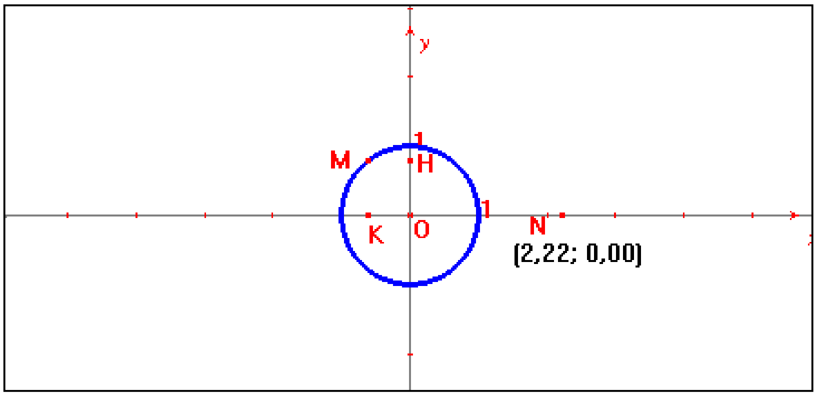

Figure 2 *- la figure relative à la troisième partie de la séquence*

I : nous n'avons pas compris qu'est ce que nous devons faire ?
Prof : regardez. Si je change *x*, qu'est ce qui va varier en fonction de *x* ?
I : est ce que c'est une fonction que nous devons définir ?
Prof : oui. Nous cherchons à définir une fonction. Regardez. Que faut-il faire pour varier *x* ?
N : il faut déplacer le point *N*
Prof : Si la position de *N* change, qu'est ce qui va changer ?
N : la position de *M*.
Prof : Alors, est-il possible de définir une fonction ?
I : Oui, la fonction qui associe *M* à *N*.
Prof : Ok, comment peut ont décrire cette fonction ?
I : la fonction *f* de *IR* à *C* (le cercle trigonométrique)……qui associe *M* à *x*….non qui associe *M* à *N*.
N : La fonction *f* qui associe le point *M* du cercle au point *N*.
Prof : Bien, qu'est ce qui change si je déplace *N* ?
Les deux élèves : Les points *H* et *K*.
Prof : les points *H* et *K*. Alors, nous pouvons considérer une fonction qui associe le point *K* au point *N*.

Concernant la transition entre trigonométrie et fonctions trigonométriques, l'utilisation de signes mathématiques tels que « cosinus », « cosinus de l'angle », « arc » et « fonction » montre que les élèves parviennent, lors de la phase de travail par binôme, à faire le lien entre la fonction demandée (la fonction qui associe à un réel x l'abscisse du point M) et la ligne trigonométrique cosinus. Cela atteste l'établissement, de la part des élèves, d'un lien entre la ligne trigonométrique et l'aspect fonctionnel. Nous avons par exemple relevé l'interprétation en termes géométriques du signifié de variable numérique en reliant la variation de x à la variation du point N créé au début de la troisième partie. Cet extrait est une partie des interactions du binôme Moufida et Alaa lors de la phase de travail par binôme au niveau de la quatrième partie de d'expérimentation.

[Moufida lit la question] Pouvez-vous définir une *relation* qui permet de passer du réel x (choisi au début de cette activité) à l'abscisse du point M. Donner un nom à cette *relation*.

A : K a la même abscisse que M.
M : à tout point M on associe l'abscisse de ce point.
A : On commence par x. à tout x on associe l'abscisse du point M.
M : L'abscisse c'est le cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$.

Ce lien entre la ligne trigonométrique et l'aspect fonctionnel a été utilisé par la suite par l'enseignant lors de la phase de discussion collective afin de permettre la transition entre trigonométrie et fonctions trigonométriques, comme le montre l'extrait suivant de la dernière discussion collective :

P : Alors si je m'intéresse par exemple au point K est ce que vous pouvez définir une fonction entre N et K ?
N : Oui la fonction qui au point N associe K.
P : D'accord, si je reprends dès le début, on a commencé par choisir un réel x, si on fait varier ce réel le point N varie et par conséquent le point K varie. C'est ça ? Alors est ce qu'on peut définir une relation entre le réel x et le point K ?
Alaa : Qui à x associe le point K.
I : La fonction de IR dans…. Pour tout réel x on associe K dans l'intervalle [-1,1].
[…]
P : Voilà, K est le point de l'axe (OI) qui a la même abscisse que M. Pour résumer vous avez défini une fonction de IR dans le segment [II'] qui à tout réel x associe le point K et ce point K, comme vient de nous lire Ikbel, a la même abscisse que M. Alors… est ce que vous pouvez définir maintenant une relation entre x et l'abscisse de M.

Dans ses interventions, l'enseignant fait appel à des signes complexes relevant d'une interprétation des variations géométriques en termes de variations numériques et par l'interprétation de la simultanéité du déplacement de deux points dans Cabri comme une relation de dépendance fonctionnelle. L'extrait montre également une interprétation de la variation géométrique comme une variation numérique et cela en reliant la variation du point N à la variation de son abscisse ainsi que la variation du point K à la variation de son abscisse.

VI. CONCLUSION

L'importance épistémologique d'introduire la notion de fonction trigonométrique en tant que covariation afin de faire le lien entre la trigonométrie et les fonctions trigonométriques nous a amenée à concevoir et expérimenter une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique et visant l'introduction de la fonction « cosinus ». Dans cet article nous avons cherché à étudier l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers l'analyse de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de travail. Le processus d'interaction en classe s'est avéré très lent, complexe et articulé. L'analyse des signes langagiers nous a permis d'identifier quatre étapes pouvant marquer l'évolution du processus de construction de la signification mathématique visée. Cela constitue un exemple des apports potentiels d'une analyse logique du langage pour les études en didactique des mathématiques. Notre étude ne vise pas l'élaboration d'un modèle du processus de construction d'une signification mathématique dans le cas de l'utilisation d'un artefact technologique, compte tenu de la spécificité de l'expérimentation et le fait que notre travail s'est limité à l'analyse des signes langagiers. Néanmoins, cette étude permet de donner un éclairage sur un aspect de ce processus qui reste complexe et très articulé.

L'analyse des différentes phases de la séquence expérimentale nous a également permis de confirmer l'importance du rôle de l'enseignant pour amener les élèves à se détacher de l'activité avec l'artefact et à parvenir à une interprétation mathématique, en se basant sur cette activité comme un milieu commun expérimenté par toute la classe. Il nous semble alors important de souligner dans ce type de séquence d'enseignement la nécessité d'une certaine familiarisation de l'enseignant avec l'utilisation de l'artefact et la gestion des phases de discussion collective pour mener à bien ce type de séance. Cette considération peut donner aux résultats de la séquence étudiée un aspect local et particulier qui n'est pas directement généralisable au niveau de l'enseignement. Une étude plus fine des stratégies de l'enseignant dont l'objectif est de décrire la manière dont les interventions de l'enseignant peuvent être façonnées pour favoriser l'évolution des significations personnelles des élèves vers les connaissances mathématiques s'avère nécessaire.

REFERENCES

Bartolini Bussi M. G. (1996) « Mathematical discussion and perspective drawing in primary school » – *Educational Studies in Mathematics* 31, 1-2 (11-41).

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A., Ferri F. (2003) Semiotic mediation in the Primary School : Durer's glass. In Hoffmann H., Lenhard J., Seeger F. (Eds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte).* Dordrecht : Kluwer Academic.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. D., BartoliniBussi M. G., Jones G. A., Lesh R., Tirosh D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education, 2nd revised edition* (720-749). Mahwah, NG : Lawrence Erlbaum Associates.

Falcade R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Falcade R., Laborde C. & Mariotti M. A. (2007) « Approaching functions : Cabri tools as instruments of semiotic mediation » – *Educational Studies in Mathematics* 66, 3 (317-333).

Genevès B., Laborde C., Soury-Lavergne S. (2005) The room of transformations and functions with Cabri-geometry. *L'insegnamento della matematica e dellescienze integrate*, numero speciale 11-14.

Khalloufi-Mouha F. (2009) *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2e année section scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Tunis.

Khalloufi-Mouha F. (2012) Étude de l'évolution des pratiques d'un enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. In Dorier J. L., Coutat S. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2012.* Université de Genève.

Khalloufi-Mouha F., Smida H. (2012) Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artifact. In *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education* XVI, (207-224).

Khalloufi-Mouha F. (2014) Etude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale* 54, (49-64).

Laborde C., Mariotti M. A. (2002) Grounding the notion of function and graph in DGS. *Actes de Cabri World 2001*, Montreal.

Mariotti M. A. (2009) Artifacts and signs after a Vygotskian perspective : the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education* 41, (427-440).

Mariotti M. A., Maracci M (2010) Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Rennes : PUR et INRP.

Peirce C. S. (1978) *Écrits sur le signe* (rassemblés, traduits et commentés par G. Deledalle). Paris : Le Seuil.

Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function. In Harelet G., Dubinsky E. (Eds.) *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, *MAA notes 25* (pp. 25-58).

Tall D. (1996) Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignementmathématique* 42, (395-415).

Vygotski L. (1938/1997) *Pensée et Langage*. Paris : La Dispute (3e éd).