Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

FORMALISME ET SIGNIFICATION EN MATHÉMATIQUES : PHÉNOMÈNES D'ANAPHORE ET QUANTIFICATIONS IMPLICITES

Viviane DURAND-GUERRIER[*]

Résumé – L'étude des relations entre formalisme et signification est une question vive en didactique des mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'enseignement supérieur et la transition secondaire supérieur. Nous traitons ici du cas des phénomènes d'anaphore (reprise de pronom) étudiés en sémantique formelle pour les langues naturelles. Nous montrerons sur un exemple que ce phénomène se retrouve également en mathématiques en lien avec la pratique de quantification implicite des énoncés conditionnels et qu'il est susceptible de générer des difficultés chez les étudiants en début d'université.

Mots-clefs : anaphore, didactique des mathématiques, formalisme, sémantique formelle, signification

Abstract – The study of relationships between formalism and meaning is a clue question in didactics of mathematics, in particular for undergraduates. In this paper, we focus on the case of the phenomena of anaphora (resumption of pronoun) studied in formal semantics for natural languages. We illustrate on an example that this phenomenon also occurs in mathematics in connection with the practice of implicit quantification of conditional statements, and that it may generate difficulties for fresh university students.

Keywords: anaphora, didactics of mathematics, formalism, formal semantics, meaning

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous nous intéressons aux relations entre formalisme et signification en mathématiques dans la perspective de la sémantique logique initiée par Frege et développée en particulier par Russel, Wittgenstein et Tarski (Rebuschi 2008 ; Durand-Guerrier 2005).

Contrairement à une idée commune qui tendrait à réduire les apprentissages mathématiques à l'acquisition d'un texte du savoir, en accord avec Vergnaud (1990), nous soutenons la thèse selon laquelle :

> Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. » (Op. cité, p.145)

Ceci ne veut pas pour autant dire que l'on peut réduire l'apprentissage des mathématiques à l'acquisition de savoir-faire et d'automatismes. En effet, Vergnaud poursuit :

[*] Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck – UMR 5149 CNRS Université de Montpellier - France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Durand-Guerrier V. (2015) Formalisme et signification en mathématiques. Phénomènes d'anaphore et quantifications implicites. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 731-740.

> Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets – arguments. (op. cité, p.145)

Dans la conférence qu'il donne en 2001 à Montréal à l'occasion de la remise du titre de Doctor Honoris Causas, Gérard Vergnaud revient sur les relations entre *forme opératoire* et *forme prédicative* de la connaissance.

> La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème en acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. (Vergnaud 2002, p. 9)

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'illustrer certains aspects de cette complexité du *dire*, en nous référant pour nos analyses aux *catégories logiques fondamentales* : objets, propriétés, relations, et aux phénomènes de *quantification*.

Nous pouvons illustrer ce point avec l'exemple de la négation des énoncés universels. On peut observer en début d'université les deux phénomènes suivants :

1. Invités à prouver qu'un énoncé conditionnel universel est faux, la plupart des étudiants sont capables de mettre en œuvre la règle du contre-exemple (à savoir chercher un élément qui vérifie l'antécédent et qui ne vérifie pas le conséquent) au moins lorsqu'un tel contre-exemple est aisément disponible.
2. Invités à donner la négation d'un énoncé conditionnel universellement quantifié, un grand nombre d'étudiants parmi ceux qui sont capables de mettre en œuvre la règle du contre-exemple proposent comme négation un énoncé conditionnel, en plaçant la négation soit sur l'antécédent, soit sur le conséquent, soit sur les deux.

Pour traiter le premier point, les étudiants mobilisent une connaissance opératoire développée au cours des études secondaires. Les réponses à la deuxième question montrent que pour de très nombreux étudiants, cette connaissance opératoire n'est pas articulée avec la connaissance prédicative associée selon laquelle « nier un énoncé universel c'est affirmer l'existence d'un contre-exemple ». Ceci n'est guère surprenant dans la mesure où cette articulation ne fait le plus souvent l'objet d'aucun travail ni au lycée, ni à l'université. Or, articuler ces deux connaissances nécessite d'une part de pouvoir mobiliser *a minima* les deux connaissances opératoires : a) *nier une proposition revient à expliciter la paraphrase « il est faux que »* b) *pour prouver qu'un énoncé général est faux il suffit de produire un contre-exemple*, et d'autre part de connaître les définitions des connecteurs et des quantificateurs logiques ainsi que les règles syntaxiques associées. Ceci permet de produire une nouvelle connaissance prédicative : la négation d'un énoncé de la forme "*Pour tout* x dans E, *si* $A(x)$, *alors* $B(x)$" est l'énoncé "*Il existe* x dans E tel que $A(x)$ *et* non $B(x)$".

Gérard Vergnaud (2002) soutient en outre que

> parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques. (Op cité)

Dans ce qui suit, nous allons illustrer cette complexité dans le cas des phénomènes d'anaphore en lien avec la quantification implicite des énoncés conditionnels. Le premier exemple est un exemple classique en sémantique formelle. Le second exemple est issu de mon travail de thèse (Durand-Guerrier 1996).

II. UN EXEMPLE CLASSIQUE D'ANAPHORE : LES *DONKEY SENTENCES*

Dans ce qui suit, nous reprenons la définition donnée par Corblin (2002) :

> Une anaphore est une expression linguistique qui reprend ou renvoie à une entité déjà introduite dans une phrase antérieure. Cette entité (mot, idée, etc.) s'appelle l'antécédent » ; ceci se manifeste en général par ce que l'on peut appeler une reprise de pronom. Ce phénomène est connu en sémantique formelle et analysé dans le cadre du paradigme des « *Donkey sentences* » (Op cité, p. 91)

L'exemple classique qui a donné son nom à ce paradigme est le suivant :

« Si *un fermier* possède *un âne*, alors *il le* bat » (1)

Dans cette phrase, le pronom « *il* » dans le conséquent renvoie à « *fermier* » dans l'antécédent, tandis que l'article « *le* » renvoie à « *âne* » ; on a donc une double reprise, avec un pronom sujet « *il* » et un pronom complément « *le* ».

La question qui se pose alors est celle de la manière dont on peut formaliser cet énoncé à l'aide des catégories logiques mentionnées plus haut et des quantificateurs. Un premier travail consiste à identifier les propriétés et/ou les relations en jeu : Corblin identifie deux propriétés « *être un fermier* » : nous noterons $F(x)$ la phrase ouverte « x est un fermier », et « *être un âne* » : nous noterons $A(y)$ la phrase ouverte « y est un âne ». Pour formaliser l'expression « *un fermier possède un âne* », on va recourir à une relation binaire $P(x,y)$ De même, on va recourir à une relation binaire $B(x,y)$ pour traduire « *un homme bât un âne* ». Le parcours des variables x et y est une population contenant à la fois des fermiers et des ânes. Le deuxième travail consiste à identifier la nature des quantifications en jeu, ce qui est rendu complexe par le fait que, en français, l'article indéfini « *un* » peut avoir plusieurs interprétations selon les conditions d'énonciation. Ainsi l'indéfini « *un* » peut selon les cas :
1/ désigner un élément singulier : *un chat* blanc dort sur le canapé ; 2/ exprimer l'existence d'au moins un élément : j'ai entendu *un chat* miauler ; 3/ avoir une valeur générique, au sens de n'importe lequel : *un chat* est un compagnon fidèle ; 4/ exprimer une quantification universelle implicite : si *un chat* tombe, il se remet sur ses pattes, que l'on peut reformuler en : *Tout chat* qui tombe se remet sur ses pattes.

Il n'est pas toujours facile de déterminer quelle est l'interprétation adéquate de l'article indéfini « *un* » dans une phrase en langue naturelle : par exemple, si vous dites « *un chat* ronronne » vous pouvez selon les contextes *faire référence à un chat particulier*, *affirmer l'existence d'un chat qui ronronne dans votre environnement* ou encore *exprimer une propriété satisfaite par tous les chats*. On peut voir là un effet de la sensibilité au contexte qui porte sur *l'interprétation des énoncés* comme le souligne Rebuschi qui note que « le contexte n'intervient pas seulement sur l'extension des expressions dans un domaine donné, il modifie le domaine de quantification. » (Rebuschi, 2008, p.120).

Revenons maintenant à notre exemple de *Donkey sentence*. Nous avons deux fois l'article indéfini « *un* ». Selon Corblin (2002), l'interprétation adéquate de « *un* » devrait être ici « *il existe* », ce qui conduirait à l'énoncé

« *si* Il existe x tel que [x est un fermier et il existe y [y est un âne et x possède y], *alors* x bat y » (2)

ou encore

$\exists x\big[[F(x) \wedge (\exists y A(y) \wedge P(x,y))]\big] \Rightarrow \ B(x,y)$ (2')

Corblin note que cette formalisation n'est pas satisfaisante : en effet, x et y sont liées dans l'antécédent, et libres dans le conséquent, si bien que l'anaphore n'est pas traduite dans la formalisation. Il propose alors, pour permettre le liage, de mettre les quantificateurs en tête de formule. Il propose alors la formule

$\exists x \exists y\, [(F(x) \wedge A(y) \wedge P(x,y)) \Rightarrow\ B(x,y)]$ (3)

A nouveau, cette formalisation ne convient pas ; en effet, la phrase initiale a une portée universelle (op. cit. p. 92)

Corblin ne mentionne pas une autre possibilité qui semblerait sans doute plus naturelle à un mathématicien, à savoir considérer que, compte tenu de ce que l'on a un énoncé conditionnel, le premier « *un* » correspond à une quantification universelle implicite, tandis que le second renvoie à une quantification existentielle, ce qui en reformulant donne la phrase
« Pour tout fermier, s'il existe un âne que ce fermier possède, alors ***ce*** fermier bât *cet* âne. »
« Pour tout x, s'il existe y tel que $F(x)$ et $A(y)$ et $P(x,y)$, alors $B(x,y)$ » (4)

Cependant, cette formulation permet bien de rendre compte de la première anaphore sur « *un fermier* », mais ne permet pas de rendre compte de l'anaphore sur « *un âne* » puisque la variable y est liée dans l'antécédent, et libre dans le conséquent : la variable y qui est muette dans l'antécédent ne permet pas de faire une attribution d'objet, que l'on pourrait reprendre dans le conséquent. Comme l'indique Corblin, il faut modifier la portée du quantificateur existentiel en le plaçant en tête de formule.
Une première solution consiste à simplement déplacer le quantificateur existentiel pour produire l'énoncé ci-dessous

« Pour tout x, il existe y tel que *si* ($F(x)$ et $A(y)$ et $P(x,y)$, *alors* $B(x,y)$ » (5)

Mais cette formulation n'est pas satisfaisante. En effet, d'une manière générale, pour chaque fermier, on peut trouver un âne que cet homme ne possède pas, et pour un tel couple l'énoncé est vrai quel que soit l'interprétation de $B(x,y)$, si bien que l'énoncé (2) ne capture pas la signification de l'énoncé initial.

On va finalement choisir une troisième forme en remplaçant le quantificateur existentiel par un quantificateur universel

« Pour tout x, pour tout y, (*si* $F(x)$ et $A(y)$ et $P(x,y)$, *alors* $B(x,y)$ » (6)

ou encore

$\forall x \forall y [(F(x) \wedge A(y) \wedge P(x,y)) \Rightarrow\ B(x,y)]$ (6')

qui est la manière standard de formaliser les Donkey sentences en logique du premier ordre (Corblin, op. cit. p. 91)

Selon Davidson (1993), comprendre un énoncé, c'est savoir ce qui est le cas lorsqu'il est vrai ; corrélativement, c'est pouvoir reconnaître les cas dans lequel il est faux. L'énoncé (6) capture la signification de la phrase initiale au sens suivant : chaque fois que l'on considère un couple (Fermier, Ane), on peut regarder s'il vérifie l'antécédent et le conséquent. Dans le cas où on trouverait un couple vérifiant l'antécédent et pas le conséquent, on pourrait en déduire que l'énoncé proposé est faux.

On pourrait penser que ce type de phénomène est spécifique de la langue naturelle et a peu de chance d'apparaître en mathématiques. Je donne dans ce qui suit un exemple mettant en évidence que ces phénomènes d'anaphore sont également présents en mathématiques et qu'ils interrogent la pratique habituelle de quantification implicite des énoncés conditionnels. En effet, comme on a pu le voir ici, la restitution de la quantification dans l'énoncé ne va pas de soit, et selon les choix faits, ceci change les conditions de vérité de l'énoncé et partant sa signification.

III. UN EXEMPLE EN ANALYSE

L'exemple analysé ici est tiré de notre thèse (Durand-Guerrier 1996). Les résultats obtenus datent de plus de 20 ans. Le même énoncé a été donné par J. Njomgang-Ngansop à des étudiants camerounais dans le cadre de sa thèse ; les résultats obtenus sont très proches de ceux que nous présentons ci-dessous (Njomgang Ngansop 2013, p. 381).

Il s'agit du quatrième item d'un questionnaire visant à identifier si les étudiants savent dans quelles conditions il est possible ou non de faire une déduction, à partir d'un énoncé conditionnel affirmé.

> Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite définie par récurrence sous la forme :
> « $u_{n+1} = f(u_n)$ » où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a alors le résultat suivant :
> Enoncé 4 : Si la suite (u_n) converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation (E) : « f(x) = x ».
> Questions :
> Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :
> a) L'équation (E) n'a pas de solution?
> b) L'équation (E) a au moins une solution?
> Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de (E) si :
> c) la suite (u_n) converge?
> d) la suite (u_n) ne converge pas?

***Figure 1** - Item A4 issu de Durand-Guerrier (1996)*

1. Structure logique de l'énoncé et phénomène d'anaphore

Considérons l'énoncé proposé aux étudiants

Si la suite (u_n) converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation (E) : « f(x) = x » (1)

Cet énoncé fait intervenir trois types d'objets mathématiques distincts: une suite numérique ; un réel et une équation; avec présence d'une fonction numérique comme objet intermédiaire articulant la suite et l'équation. Dans l'énoncé tel qu'il est donné, la fonction *f* a « disparu » de l'antécédent pour réapparaître dans le conséquent. On aurait d'ailleurs pu aussi la faire disparaître du conséquent en définissant E auparavant. On pourrait également ne pas introduire la lettre L, on aurait alors l'énoncé « minimal » suivant :

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est solution de l'équation E » (2)

ou encore

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction *f.* » (3)

Dans chacune de ces trois formes, on peut identifier un phénomène d'anaphore. Il est clairement visible dans l'énoncé (1) où la reprise porte sur la lettre *L*.

Dans les énoncés (2) ou (3), le phénomène est moins clair dans la mesure où la limite n'apparait pas explicitement dans l'antécédent, absorbé dans l'expression « (u_n) converge » ; elle réapparaît si l'on remplace « la suite (u_n) converge » par « la suite (u_n) admet une limite », ou encore par la définition explicitant la quantification existentielle : « il existe un réel *L* tel que la suite (u_n) converge vers *L* »

Les propriétés en jeu sont : $U(x)$: « *x* est une suite » - $F(y)$: « *y* est une fonction numérique » – $R(z)$: « *z* est un réel ».

Les relations en jeu sont : $I(x, y)$: « x est définie par récurrence à partir de y » : où x parcourt l'ensemble des suites définies par récurrence et y parcourt l'ensemble des fonctions numériques ; $C(x, z)$: « x converge vers z » où x parcourt l'ensemble des suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction numérique, et z parcourt l'ensemble des réels et la relation binaire P(z, y) « être un point fixe de » où z parcourt l'ensemble des réels et y parcourt l'ensemble fonctions numériques.

Une formalisation possible rendant compte de ces propriétés et relations est la suivante

$$\text{Pour tout } x, [\text{si } [U(x) \text{ et } \exists y\ (F(y) \text{ et } I(x, y)) \text{ et } \exists z\ (R(z) \text{ et } C(x, z))], \text{ alors } P(x, z)] \ (4)$$

Cependant, comme on l'a vu dans les exemples précédents, ceci ne permet pas de rendre compte des phénomènes d'anaphores. Les analyses faites précédement pour les *Donkey sentences* montrent que pour formaliser ces énoncés en restituant la quantification, il faut mettre trois quantificateurs universels en tête de formule. On obtient l'énoncé suivant

$$\forall x, \forall y, \forall z\ [(U(x) \text{ et } F(y) \text{ et } R(z) \text{ et } I(x, y) \text{ et } C(x, z)) \Longrightarrow P(z, y)] \ (5)$$

Néanmoins, pour répondre aux questions posées dans l'exercice, on pourrait utiliser une version de l'énoncé faisant disparaître complètement la limite, sous la forme

« si la suite u converge, alors la fonction f a un point fixe » (6)

qui peut se formaliser en introduisant les propriétés « converger » pour les suites, notéee Γ, et « avoir un point fixe pour les fonctions numériques », notée Φ :

$$\forall x, \forall y, [[U(x) \text{ et } F(y) \text{ et } I(x, y) \text{ et } (\Gamma(x)] \Longrightarrow \Phi(y)] \ (7)$$

Dans les questions, l'énoncé de référence est celui où apparaît la limite que nous avons formalisé par (5). On se place dans le cas où les prémisses U(x), F(y), R(z) et I(x, y) sont vérifiée. On en déduit que l'énoncé $\forall$x, $\forall$y, $\forall$z « C(x, z) ==> F(z, y) » est vrai. C'est l'énoncé à partir duquel vont se faire les déductions.

2. *Motivations pour le choix de cet énoncé*

A l'époque de l'expérimentation (1992), cet énoncé est en général rencontré dès le lycée. On peut lire par exemple dans la brochure des programmes de mathématiques des classes de seconde, première et terminales de 1989 éditée par le Ministère de l'éducation nationale, dans le paragraphe consacré aux suites, à la rubrique travaux pratiques (p.129) :

« Exemples d'études du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et d'approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.	Toute étude de ce type de suite devra comporter des indications sur la méthode à suivre. »

***Figure 2**- extrait des programmes de mathématiques Classes de seconde, première et terminales de 1989*

3. *Quelques réponses d'étudiants arrivant à l'université*

Nous avions recueilli et analysés 293 questionnaires. La réponse exacte pour les quatre items a, b, c, d pris dans cet ordre était codée 2 3 1 3 : (a : la suite u ne converge pas ; b on ne peut pas savoir si u converge ou non; c : l'équation (E) a au moins une solution; d : on ne peut pas savoir si (E) a ou non des solutions). Nous avons montré lors de l'analyse a priori que cet item a une structure logique complexe et l'on peut s'attendre à des difficultés de traitement, ce qui est confirmé par les résultats obtenus. Cet énoncé se révèle en effet pour beaucoup d'étudiants d'un maniement délicat. D'une part, les objets mathématiques en jeu sont complexes, les suites en particulier sont rarement maîtrisées à l'arrivée à l'université. D'autre part, un trait saillant de la limite d'une suite est l'unicité, on peut penser que pour un certain nombre d'étudiants, cette unicité « se transmettra » à l'équation.

L'intérêt de cet énoncé est très grand du point de vue de l'heuristique dans le traitement des suites définies par récurrence : en effet, pour déterminer les valeurs possibles pour une limite éventuelle d'une telle suite, il est pertinent, lorsque c'est possible, d'étudier l'équation associée. Lorsque celle-ci n'a pas de solution, on peut affirmer sans recherche supplémentaire que la suite correspondante ne converge pas (question a). Lorsque la suite a au moins une solution (question b), il y a des « candidats » pour la limite; on peut alors faire des investigations pour savoir si l'un de ces candidats convient, et si oui lequel. Les raisonnements en jeu dans ce type de résolution sont complexes et ne peuvent pas être totalement algorithmisés, ce qui serait le cas si l'existence de la limite correspondait au seul cas d'une solution unique pour l'équation; ils nécessitent en particulier la capacité de reconnaître que la vérité du conséquent ne permet pas d'inférer celle de l'antécédent; nous avons ici un exemple illustrant l'importance de ce type d'étude pour l'activité mathématique. Nous indiquons ci-dessous les résultats obtenus dans l'expérimentation de 1992-1993.

	A4a	A4b	A4c	A4d
Réponse type 1	0%	52%	**<u>79,1%</u>**	0,4%
Réponse type 2	**<u>81,3%</u>**	2,9%	0,4%	53,4%
Réponse type 3	5,9%	**<u>19,8%</u>**	2,2%	**<u>18,7%</u>**
Réponse type 9	10,6%	21,6%	15,8%	22%
Non réponse	2,1%	3,7%	2,6%	5,5%

Figure 3 – les résultats à l'item 4 (Durand-Guerrier, 1996)[243]

Il apparaît immédiatement que pour la réponse attendue positive (obtenue par application du Modus Ponens) et négative (application du Modus Tollens), le taux de réussite est élevé. Il n'en est pas de même pour les deux items où la réponse attendue est de type 3 (on ne peut pas savoir) pour lesquels les taux de réussite sont faibles (moins de 20%). Dans les deux cas, la réponse obtenue en considérant la règle comme une équivalence a un score supérieur à 50% et la réponse codée 9 (autres réponses) un score supérieur à 20%, la quasi totalité des réponses se répartit entre les catégories 1, 3 et 9 pour les deux items à prémisse positive et entre les catégories 2, 3 et 9 pour les deux items à prémisse négative.

Nous avions demandé aux étudiants de justifier soigneusement leurs réponses. Certains l'on fait, nous donnant accès à leurs interprétations. Nous présentons ci-dessous quelques réponses que nous pouvons mettre en relation avec les phénomènes d'anaphore mis en évidence dans l'analyse *a priori*. Nous avons retenus ceux pour lesquelles la lettre L est en jeu.

Pour certains étudiants, L est considéré comme désignant un élément donné comme dans la copie 141 :

> A4b : Si l'équation a au moins une solution, cette solution peut être L, ou ne pas être L. Nous ne pouvons pas conclure sur la convergence de cette suite.

[243] Les pourcentages pour les réponses exactes sont en gras et soulignés

A4d : Si la suite ne converge pas, il est possible que E ait une ou plusieurs solutions, mais aucune de ces solutions n'est *L*.

L'étudiant pourrait avoir considéré que l'on a introduit un élément *L* dont on parle dans l'énoncé.

Ceci est encore plus clair dans la copie 83 :

A4a : Si E : « $f(x) = x$ » n'a pas de solutions alors la suite (u_n) ne converge pas vers *L* mais elle peut converger vers une autre valeur L'.
A4b : Si (E) admet au moins une solution, alors cette solution est *L* et la suite converge vers *L*. Dans ce cas $\lim u_n = L$.
A4c : Si la suite (u_n) converge, il existe au moins une solution à l'équation et cette solution est *L*.

Dans ce cas, l'existence d'une solution semble assurer l'unicité de la solution, malgré l'utilisation de l'expression « au moins ».

On peut mettre en regard cette copie avec la copie 17 dans laquelle l'unicité de la solution de l'équation apparaît comme une condition nécessaire pour la convergence de la suite *u*, la lettre *L* semblant ici aussi être considérée comme étant donnée :

A4b : si l'équation (E) a une seule solution, c'est *L* et la suite (u_n) est convergente en *L*. Si l'équation (E) a plusieurs solutions la suite (u_n) n'est pas convergente car on ne peut converger qu'en un seul point.

Dans certaines copies, les étudiants semblent considérer que l'énoncé affirme que la suite *u* converge vers *L* et par suite cherchent à résoudre la contradiction entre cette affirmation et le fait que l'équation n'a pas de solution, comme dans la copie 258 :

A4a : La suite (u_n) converge vers *L* mais sans jamais atteindre la valeur *L*.

4. *Quelques commentaires*

Ces quelques exemples montrent que certains étudiants éprouvent des difficultés à manipuler la lettre *L* dans cet item. On peut observer que dans les réponses citées ci-dessus, le statut de *L* est celui de nom propre, plutôt que celui de variable dans le champ d'un quantificateur universel. Ceci rentre en conflit avec la dissymétrie entre l'unicité de la limite d'une suite convergente et la possibilité pour l'équation associée d'avoir plusieurs solutions, cette dissymétrie étant cachée par l'usage de la lettre *L*. Même s'il est clair que d'autres éléments interviennent dans les difficultés des étudiants : insuffisante maîtrise des objets en jeu – difficultés pour reconnaître les cas dans lesquels on peut faire une déduction à partir d'un énoncé affirmé, l'hypothèse de l'impact des phénomènes d'anaphore mis en évidence ne peut selon nous pas être écartée *a priori*. Les expérimentations conduite dans sa thèse par Judith Njomgang-Ngansop (2013) confortent cette hypothèse. Nous devons préciser que lorsque nous avions proposé cet item, nous n'avions pas mesuré la complexité de la structure logique. Ce sont les réponses des étudiants qui nous ont amené à étudier de manière plus précise la structure logique de l'énoncé. Les discussions en sémantique formelle sur les phénomènes d'anaphores apportent un premier éclairage qui nécessite d'être approfondi.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'analyse logique du langage permet de questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, en particulier parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites. Par ailleurs, comme on l'a vu, lorsque les étudiants sont confrontés à des cas où les règles d'inférences ne s'appliquent pas, il doivent faire appel à leurs connaissances mathématiques. Les étudiants qui reconnaissent ces cas, cherchent parfois à donner une réponse « malgré tout » (c'est-à-dire ne se contentent pas de répondre *on ne peut pas savoir*) ; ils sont alors amenés à expliciter leurs connaissances relativement aux objets en jeu. De ce fait, certaines réponses pourraient servir pour étudier ou illustrer les conceptions des élèves et des étudiants sur ce type de suites. Ceci confirme la pertinence du calcul des prédicats pour étudier le raisonnement mathématique; en effet, comme nous l'avons déjà dit, dans ce modèle, pour décider de la vérité d'un énoncé lorsque les règles d'inférence classiques ne s'appliquent pas, le sujet est renvoyé aux objets en jeu, à leurs propriétés et aux relations éventuelles entre objets.

Dans nos travaux, nous faisons l'hypothèse que les outils offerts par les travaux en sémantique formelle sont susceptibles de nous aider à mieux comprendre les effets des difficultés qui relèvent de la structure logique des énoncés sur les apprentissages mathématiques.

Les exemples traités plus haut montrent que le repérage des anaphores pourrait permettre de déterminer plus rapidement les choix de formalisation permettant de capturer la signification des énoncés conditionnels implicitement quantifiés. En effet, la présence d'une anaphore induit des conditions sur le statut logique des lettres (une lettre muette ne peut pas faire l'objet d'une reprise car elle ne peut rien désigner). Une piste de recherche que nous souhaitons développer concerne l'analyse du discours des mathématiciens en position d'enseignants, du point de vue du traitement des questions du statut logique des lettres et des énoncés et des questions de quantification, en particulier en contexte plurilingue. Nous faisons l'hypothèse que l'analyse logique et la formalisation peuvent offrir une référence commune en situation d'enseignement plurilingue, lorsque la langue d'instruction n'est pas la langue maternelle, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement supérieur et ce quel que soit les pays considérés. (Durand-Guerrier & al., à paraître). Nous ne sous-estimons pas néanmoins les difficultés d'appropriation d'un tel outil par des enseignants le plus souvent peu formés en logique.

REFERENCES

Corblin F. (2002) *Représentation du discours et sémantique formelle*, Paris : PUF

Davidson, D. (1993) *Enquête sur la vérité et l'interprétation*, éditions Jacqueline Chambon

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de l'Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherche sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches, Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V., Kazima M., Libbrecht P.-J., Njomgang-Ngansop J. L., Salekhova L. N., Tuktamyshov N., Winslow C. (2015) Challenges and Opportunities for Second Language Learners in Undergraduate Mathematics. In Barwell et al. (Eds.) *Mathematics and Language Diversity, the 21st ICMI Study* (pp.85-101). Springer.

Njomgang-Ngansop J. (2013) *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun,* Thèse en cotutelle des Universités Lyon 1 et Yaoundé 1.

Rebuschi M. (2008) *Qu'est-ce que la signification* ? Paris : Vrin.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3), 133-170

Vergnaud G. (2002) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In Portugais J. (Ed.) *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique* *des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*. Actes du colloque GDM 2001, 6-27.