Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ASPECTS CULTURELS ET LANGAGIERS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du Groupe de Travail n° 8

Viviane DURAND-GUERRIER[*]– Faiza CHELLOUGUI[**]

I. INTRODUCTION

Dans ce groupe de travail, nous nous sommes intéressé aux aspects culturels et langagiers de l'enseignement des mathématiques. Contrairement à une idée commune largement répandue selon laquelle les mathématiques seraient universelles et intemporelles, de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques ont mis en évidence la nécessité de prendre en compte les aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques, et la nécessité de se déprendre de l'illusion d'une transparence du discours mathématique. Très développés dans les travaux anglophones, les recherches sur les aspects langagiers restent encore peu nombreuses dans l'espace mathématique francophone. Ce constat déjà fait dans le groupe de travail « Dimensions linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques » à EMF 2009 (Battie & al. 2009) reste d'actualité comme le montre la faible présence des travaux francophones lors de la conférence de l'étude ICMI 21 au Brésil en septembre 2011. Ce thème reste encore aujourd'hui largement exploratoire, ce qui nous avait conduit à un appel à proposition assez large visant à permettre d'établir un panorama des travaux existants afin de dégager des lignes de force pour l'avenir.

Les principaux points que nous avions indiqués dans l'appel à projet étaient les suivants : 1/ le rôle du langage et de la culture dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ; 2/ la prise en compte de la diversité culturelle et linguistique dans les travaux en didactique des mathématiques ; 3/ la nature du discours mathématique et de la culture mathématique comme enjeux dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans différents contextes ; 4/ les moyens pour rendre l'intégration de la dimension culturelle à la fois signifiante et efficace du point de vue didactique ; 5/ les apports des études dans différents champs scientifiques connexes (par exemple psychologie, sociologie, anthropologie, linguistique, philosophie, ethno-mathématique) pour les études en didactique des mathématiques ; 6/ les apports potentiels d'une analyse logique du langage pour les études en didactique des mathématiques ; 7/ les enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues : prise en compte des spécificités lexicales et grammaticales et de leurs effets sur

[*] Université de Montpellier – France – email : viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr
[**] Université de Carthage – Tunisie – email : chellouguifaiza@yahoo.fr

Durand-Guerrier V., Chellougui F. (2015) Aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques - *Compte rendu du Groupe de Travail n° 8.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 711-717.

les apprentissages mathématiques (aspects didactiques et institutionnels), articulation entre langue maternelle et langue d'enseignement, étude des pratiques linguistiques des élèves et des enseignants lors des cours de mathématiques ; 8/ les effets cognitifs potentiels d'un apprentissage des mathématiques en contexte multilingue et/ou multiculturel ; 9/ les apports potentiels des mathématiques dans leurs liens aux autres sciences pour contribuer au rapprochement des hommes et des cultures,

Nous avons reçu seulement un petit nombre de contributions touchant essentiellement aux thèmes 6 et 7; plusieurs d'entre elles bien qu'acceptées n'ayant pas pu être présentées, leurs auteurs n'ayant pas pu participer à la conférence. En outre deux des coordonnateurs qui avaient participé activement à la préparation du travail du groupe avant la conférence n'ont pas pu être présents à Alger[1]. Le groupe de travail a donc été animé conjointement par les deux auteures de ce texte, respectivement coordinatrice du groupe et correspondante du Comité Scientifique. Le groupe se composait de dix participants venus de cinq pays: Algérie (2) - Cameroun (2) - Québec (1) - France (3) - Tunisie (2) [2]. Quatre communications orales ont été présentées, réparties en deux thèmes : *Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingue* et *Signes, formalisme et signification.* Le travail a été organisé de manière à pouvoir favoriser les interactions au sein du groupe de travail. Chaque communication orale a fait l'objet d'une présentation de 15 min suivie d'une réaction de 5 min par un membre du groupe sollicité avant le début de la conférence et de 10 min de questions. Deux séances de travail en demi-groupes de 30 minutes chacune ont été organisées pour un travail plus approfondi sur chacun des quatre textes faisant l'objet d'une communication orale. Ce travail a été suivi dans les deux cas d'une synthèse et d'un débat collectif. Cette organisation a permis des débats riches au sein du groupe dont nous rendons compte brièvement ci-dessous. En complément de ce travail, une heure a été consacrée à la présentation de l'ouvrage issu de l'étude ICMI 21, et l'affiche de HAOUAM Kamel et REBIAI Belgacem, « Les mathématiques et l'Afrique – Mythe ou réalité » a été présentée et discutée dans le groupe. Une heure a été consacrée à la préparation de la synthèse, du bilan et des perspectives de collaboration au sein de l'espace mathématiques francophone. Le groupe a bénéficié de la présence de Bernadette Denys qui a enrichi nos débats grâce à sa longue expertise des collaborations au sein de l'espace mathématique francophone, en particulier dans le cadre du GREMA (Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique Subsaharienne[3]) qui a publié en 2015 une brochure présentant une sélection de travaux associés à sa réflexion (IREM de Paris 7, 2015[4]).

II. TRAVAUX ET ECHANGES AU SEIN DU GROUPE DE TRAVAIL

1. Aperçus sur l'ouvrage issu de l'étude ICMI 21

Le thème de l'étude ICMI 21 Mathematics Education and Language Diversity est très étroitement lié au thème de ce groupe de travail, ce qui a motivé la présentation de l'ouvrage issu de l'étude (Barwell et al. 2015), au sein du groupe. La conférence de l'étude a eu lieu du 16 au 20 Septembre 2011 à Águas de Lindóia (Brésil) ; quatre-vingt-onze participants venant de 27 pays ont été invités à la conférence suite à un appel à communication. Un constat qui ressort immédiatement des travaux de la conférence et de l'ouvrage : la faible représentation

[1] Richard Barwell (Université d'Ottawa, Canada) et Ahmed Dhaife (ENS de Casablanca, Maroc)
[2] La liste des participants est donnée en annexe 2.
[3] Baheux Carole ; Denys Bernadette ; Chenevotot Françoise ; Mesquita Anna ; Galisson Marie-Pierre ; Gnansounou André ; Bantaba Fiancée-Gernavay ; Henry Michel ; Indenge Joseph ; Lagrange Jean-Baptiste ; Malonga Moungabio Fernand ; Mopondi-Bendeko Alexandre ; Tchoubou Godefroy.
[4] Le texte est téléchargeable en ligne sur le site " Ressources numérisées des IREM et de leurs partenaires"

des travaux issus de l'espace mathématique francophone, alors que les problématiques abordées dans la conférence ont une grande pertinence pour notre aire linguistique. Il y avait de nombreuses contributions issues de pays et de contextes où la langue d'instruction est l'anglais, alors qu'elle n'est pas la langue maternelle d'une majorité d'élèves, voire de la quasi totalité des élèves. Faisant suite à un certain nombre de travaux développés dans ces contextes depuis de nombreuses années, les responsables scientifiques de l'étude ICMI 21 soutiennent la position selon laquelle le plurilinguisme peut devenir un facteur positif pour les apprentissages mathématiques, invitant les auteurs de l'ouvrage à ne pas négliger cet aspect dans leurs analyses. Les communications couvraient les 5 thèmes de l'étude 1/ Enseigner les mathématiques dans différents contextes linguistiques ; 2/ Formation des enseignants pour différents contextes linguistiques ; 3/ Recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans différents contextes multilingues ; 4/ Mathématiques, langages et diversité. 5/ Apprentissage des mathématiques dans des classes multilingues. Nous avons identifié dans cette étude quelques thématiques émergentes, peu travaillées jusqu'à présent, qui nous semblent pertinentes pour l'espace mathématique francophone : les spécificités de l'enseignement post secondaire ; la prise en compte la diversité linguistique au niveau de la recherche et la prise en compte des différences de structure grammaticale.

2. *Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingue*

Comme nous l'avons indiqué dans la pargraphe précédent, les travaux de recherche en didactique des mathématiques prenant en compte de manière explicite les spécifictés des contextes multilingues d'enseignement des mathématiques sont encore peu nombreux dans l'espace mathématique francophone; nous pouvons néanmoins citer le travail de I. Ben Kilani (2005) sur la négation et celui de K. Million-Fauré (2011) dans le contexte des élèves migrants en France. La communication de David Benoît intitulée « L'enseignement des mathématiques à des élèves apprenant la langue de scolarisation » et celle de Judith Njomgang Ngansop et de Patrick Tchonang Youkap intitulée « Le changement de langage dans l'activité mathématique » s'inscrivent dans la thématique *Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingue.*

David Benoît dans sa contribution propose de documenter les difficultés rencontrées par les enseignants amenés à enseigner les mathématiques à des élèves qui sont en train d'apprendre la langue de scolarisation par une recension de travaux de essentiellement anglophones d'une part et des modalités d'expérimentations pour mener à bien des études didactiques d'autre part. Il souligne que l'activité ordinaire des enseignants en contextes multilingue constitue une zone d'ombre pour les recherches en didactique des mathématiques, ce qui le conduit à croiser les cadres didactiques avec les apports des travaux développés en théorie de l'activité, en référence aux travaux de Y. Clot (2008). Ceci plaide en faveur de recherches spécifiques afin de pouvoir proposer des formations adaptées aux enseignants travaillant dans ces contextes. D'une manière générale, au cours des échanges collectifs, nous avons souligné le besoin de conduire des recherches sur les pratiques enseignantes en contextes multilingues croisant les concepts et les méthodes développés en didactique des mathématiques et ceux développés en didactique professionnelle, en particulier ceux relevant de la clinique de l'activité ou de l'ergonomie. Les apports et les limites pour ce travail de la double approche didactique et ergonomique développés par A. Robert et J. Rogalski ont été discutés au sein du groupe.

Judith Njomgang Ngansop et Patrick Tchonang Youkap se sont intéressé aux effets de changement de langue dans l'activité mathématique des étudiants à l'université (Première et deuxième année de licence), s'appuyant sur le constat que la plupart des théorèmes et des définitions sont donnés dans la langue naturelle, ce qui facilite leur compréhension, mais les rend peu opératoires, contrairement aux énoncés formels. Pour leurs analyses les auteurs ont retenu comme théorie logique de référence le calcul des prédicats qui permet de prendre en compte de manière explicite les questions de quantification et peut servir à mettre en évidence le fait que certains énoncés mathématiques écrits en langue naturelle pourraient donner lieu à des interprétation différentes selon la manière dont on considère la portée des connecteurs ou des quantificateurs. Les résultats des deux enquêtes présentés dans la communication montrent que le passage de la langue naturelle au langage formel reste, même pour des étudiants d'un niveau avancé, une source de difficultés. La discussion a mis en évidence la nécessité de prendre en compte la question des interférences en classe entre les langues locales et la langue d'instruction. Celles-ci peuvent rester inaperçues des enseignants et on peut faire l'hypothèse que même lorsqu'elles sont reconnues, elles sont peu prises en compte dans la classe de mathématiques dans l'espace francophone en raison d'une idée commune selon laquelle en mathématiques, ceci joue un rôle moins important que dans d'autres disciplines.

3. *Signes, formalisme et signification*

La question de la signification des énoncés en mathématiques revêt une importance toute particulière. En effet, d'une part les mathématiques croisent la langue vernaculaire avec un usage important de signes spécifiques comme l'a montré le travail pionnier de C. Laborde (1982), d'autre part on observe dans la classe de mathématiques de nombreux implicites liés au recours au formalimse logique, ceci ayant été mis en lumière en particulier dans les travaux de F. Chellougui (2009). La communication de Faten Khalloufi-Mouha intitulée « Evolution du processus de la construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers les signes langagiers utilisés », et celle de Viviane Durand-Guerrier intitulée « Formalisme et signification en mathématiques- Phénomènes d'anaphores et quantification » abordent deux aspects de cette question.

Dans sa communication Faten Khalloufi-Mouha étudie l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus », à travers l'étude de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri. Ses travaux s'inscrivent dans le cadre de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008) et s'appuient sur l'hypothèse selon laquelle le langage est un outil essentiel pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra-psychologique. L'auteur a construit pour cela une séquence expérimentale d'enseignement intégrant l'environnement de géométrie dynamique Cabri, dans le but d'étudier l'impact de cette intégration sur le processus de construction des connaissances mathématiques mises en jeu et sur les stratégies de communication utilisées par l'enseignant pour guider les élèves dans cette construction. Le travail présenté met en évidence, outre la complexité du processus d'élaboration de la signification des signes en jeu dans l'activité et le rôle crucial de l'enseignant pour permettre aux élèves de se dégager des significations attachées aux artefacts afin d'envisager la généralisation des résultats observés et de parvenir à une interprétation mathématique permettant le développement des connaissances en jeu. Les échanges collectifs ont permis de souligner l'importance de ne pas perdre de vue, dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur le langage, le fait que les mathématiques ne sont pas seulement un langage, mais sont aussi une activité où les objets et les actions sur les objets jouent un rôle essentiel.

Dans sa communication, Viviane Durand-Guerrier montre sur un exemple que le phénomène d'anaphore (reprise de pronom) étudié en sémantique formelle pour les langues naturelles se retrouve également en mathématiques en lien avec la pratique de quantification implicite des énoncés conditionnels. Elle montre en particulier que le repérage des anaphores pourrait permettre de déterminer plus rapidement les choix de formalisation permettant de capturer la signification des énoncés conditionnels implicitement quantifiés. Les résultats expérimentaux présentés confortent l'hypothèse selon laquelle ce phénomène est susceptible de générer des difficultés chez les étudiants en début d'université. Cette étude illustre les apports de l'analyse logique du langage pour questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, en particulier parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites. L'auteure fait l'hypothèse que l'analyse logique et la formalisation peuvent offrir une référence commune en situation d'enseignement plurilingue, lorsque la langue d'instruction n'est pas la langue maternelle, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement supérieur et ce quel que soit les pays considérés. Les échanges collectifs ont mis en évidence le fait qu'il ne faut pas sous-estimer les difficultés d'appropriation d'un tel outil par des enseignants le plus souvent peu formés en logique, cette discipline ne faisant plus partie du curriculum officiel des futurs enseignants dans de nombreux pays. Néanmoins, l'Illusion de transparence de la signification portée par les signes (vocabulaire spécifique, symboles, graphiques, schémas, gestes etc.) nécessite d'être mise en évidence pour pouvoir être traitée dans la classe de mathématique ; ceci constitue un enjeu important pour les recherches en didactique des mathématiques.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A l'issue des travaux de ce groupe de travail, nous tenons à souligner l'importance de développer des recherches sur la diversité linguistique et culturelle dans l'espace mathématique francophone, en prenant en compte la spécificité des contextes. Ces travaux sont exigeants car ils nécessitent de croiser les concepts et les méthodes classiques en didactique des mathématiques avec les apports d'autres champs tels que la didactique des langues, l'ergonomie, la philosophie de la logique et du langage ou la sémiotique. Malgré le petit nombre de communications présentées dans le groupe de travail, les débats très riches ont permis d'identifier des pistes de travail dans les deux thèmes travaillés dans le groupe : "Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues" et "Signes, formalisme et signification". Nous pensons qu'il est nécessaire pour le prochain congrès EMF de conduire un travail en amont de la conférence permettant d'identifier les travaux de recherche existants et les innovations mises en place pour traiter de cette question dont l'importance nous paraît être sous-estimée à l'heure actuelle.

REFERENCES

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. D., Bartolini Bussi M. G., Jones G. A., Lesh R., Tirosh D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education,* 2nd revised edition (720-749). Mahwah, NG : Lawrence Erlbaum Associates.

Barwell R. Clarkson P., Halai A., Kazima M., Moschkovich J. (Eds.) (2015) *Mathematics Education and Language Diversity*. The 21st ICMI Study, Springer.

Battie V., Kilani I., Savard A., Traoré K. (2009) Synthèse du Groupe de travail IV, Dimensions linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques', Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation. *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone. Revue Internationale Francophone Numéro Spécial 2010*, 487-489.

Ben Kilani, I. (2005) *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Thèse en co-tutelle de l'université de Tunis et de l'université Lyon 1.

Clot, Y. (2008) *Travail et pouvoir d'agir*. Paris : PUF.

Chellougui, F. (2009) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite, *Recherches en didactique des mathématiques* 29(2), 123-153

IREM de Paris GREMA (2015) *GREMA – douze années d'activités*, Université Paris Diderot.

Laborde C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse de l'Université de Grenoble

Million-Faure K. (2011) *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants*. Thèse de l'Université de Provence.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505–528

ANNEXE 1

LISTE DES COMMUNICATIONS ET ORGANISATION DES SESSIONS

2. COMMUNICATIONS ORALES

BENOIT David : L'enseignement des mathématiques à des élèves apprenant la langue de scolarisation

DURAND-GUERRIER Viviane : Formalisme et signification en mathématiques-Phénomènes d'anaphores et quantification

KHALLOUFI-MOUHA, Faten : Evolution du processus de la construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers les signes langagiers utilisés.

NJOMGANGNGANGSOP Judith, TCHONANG YOUKAP Patrick : Le changement de langage dans l'activité mathématique

3. COMMUNICATION AFFICHEE

HAOUAM Kamel, REBIAI Belgacem, Les mathématiques et l'Afrique – Mythe ou réalité

4. ORGANISATION DES SESSIONS

Plage horaire	Sous thèmes	Auteurs
Samedi 10 octobre 14h-16h	Introduction Présentation de l'ouvrage issu de l'étude ICMI 21	F. CHELLOUGUI V. DURAND-GUERRIER
Dimanche 11 octobre 8h30 – 10h30	Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues (1)	J. NJOMGANG-NGANSOP & P. TCHONANG YOUKAP D. BENOIT
Dimanche 11 octobre 11h-12h30	Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues (2) Présentation communication affichée	Débat collectif HAOUAM K. & REBIAI B.
Mardi 13 octobre 8h – 10h	*Signes, formalisme et signification*	F. KHALLOUFI-MOUHA V. DURAND-GUERRIER

Mercredi 14 octobre 8h30 – 10h30	Bilan et perspectives. Etat des lieux et pistes pour des collaborations au sein de l'Espace Mathématique Francophone	F. CHELLOUGUI V.DURAND-GUERRIER

ANNEXE 2
LISTE DES PARTICIPANTS

BENOIT David (Université de Sherbrooke, Canada),
BOUFERMA Salah Eddine (Etudiant de Master, Université Houari Boumedienne des Sciences et Techniques, Alger, Algérie)
CHELLOUGUI Faiza (Université de Carthage, Tunisie),
DENYS Bernadette (IREM de Paris, France),
DURAND-GUERRIER Viviane (Université de Montpellier, France),
HAOUAM Kamel (Université de Tebessa, Algérie),
JAMET Robin (Palais de la Découverte, Paris, France),
KHALLOUFI-MOUHA Faten (Université de Carthage, Tunisie),
NJOMGANG NGANSOP Judith (Université Yaoundé 1, Cameroun),
TCHONANG YOUKAP Patrick (Université de Yaoundé I, Cameroun).

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À DES ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION ET UNE PROPOSITION MÉTHODOLOGIQUE POUR L'ÉTUDIER

David BENOIT*

Résumé – Nous analysons un corpus scientifique traitant des enseignants de mathématiques (et de leur enseignement) lorsqu'ils œuvrent auprès d'élèves apprenant la langue de scolarisation. Nous en dégageons une zone d'ombre, soit le manque de connaissances sur les processus menant à ce qui est observable en classe. Ce manque ne nous permet pas de comprendre l'écart entre les pratiques observées et des pratiques qui seraient didactiquement souhaitables : ce qui peut conduire à des résultats d'analyses avec une certaine perspective déficitaire du travail des enseignants. Finalement, nous proposerons une posture scientifique et des modalités méthodologiques pour combler ce manque.

Mots-clefs : Enseignement, modalités méthodologiques, didactiques des mathématiques, élèves apprenant la langue de scolarisation, clinique de l'activité

Abstract – For this contribution, we analyze a scientific corpus regarding mathematics teachers (and their teaching) while working with students learning the instruction language. From this, we expose the lack of knowledge of the processes leading to what can be seen in class. This prevents us from understanding the gap between the observed teaching practices and the desirable practices from a didactic point of view: which can lead to analysis results portraying a certain deficit view of the teachers' work. Finally, we suggest a scientific posture and the associated methodological modalities to address this problem.

Keywords: Teaching, experimental design, didactics of Mathematics, students learning the instruction language, clinic of activity)

L'appel à proposition pour le groupe de travail 8 sur les *Aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques* se situe en continuité avec le groupe de travail *Dimension linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques* d'EMF 2009 en spécifiant que les constats de ce groupe de travail restent d'actualité. Nous proposons donc de nous pencher sur certains de ces constats, soit la nécessité de recenser et mutualiser les travaux existants et le besoin de proposer des modalités d'expérimentations pour mener à bien des études didactiques qui nous apporte des données faisant défaut aujourd'hui. Pour cette contribution, nous concentrons nos efforts à dégager des données faisant défaut en ce qui a trait à l'enseignant (et à son enseignement) œuvrant auprès d'élèves apprenant la langue de scolarisation (ÉALS). Ce choix d'élargir notre recension aux recherches portant sur l'enseignement aux ÉALS implique que nous postulons qu'une partie des recherches sur l'enseignement en classe de mathématiques à des élèves qui utilisent une ou plusieurs autres langues que la langue de scolarisation (LS) sont pertinentes indépendamment la LS en question. Ce sont principalement ces recherches (rédigées en anglais ou en français) qui

* Université de Sherbrooke – QC, Canada – david.benoit@usherbrooke.ca

Benoit D. (2015) L'enseignement des mathématiques à des élèves apprenant la langue de scolarisation et une proposition méthodologique pour l'étudier. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 718-730.

apparaitront dans cette contribution. De cet état des lieux, nous dégagerons une zone d'ombre, puis nous proposerons une posture scientifique et des modalités méthodologiques pour l'éclairer.

I. RECHERCHES SUR L'ENSEIGNANT ET SON ENSEIGNEMENT À DES ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION

Plusieurs résultats de recherches portant sur l'enseignement à des ÉALS tendent vers des conclusions semblables indépendamment de la LS ou du pays dans lequel l'expérimentation a été réalisée. En particulier, des chercheurs rapportent que les enseignants s'en tiennent le plus souvent aux bases avec des problèmes décontextualisés dans une approche transmissive tout en favorisant le travail individuel (Chnane-Davin 2005; Cole & Griffin 1987; Poirier 1997; Secada 1992; Secada & Carey 1990). D'autres ont observé la domination par l'enseignant des discussions en classe et le bas niveau des questions (Ramirez, Pasta, Yuen, Billings & Ramey, 1991; Ramirez, Yuen, Ramey & Pasta 1991), le peu de valorisation de la prise de parole par les élèves (Secada & De La Cruz 1996) ou la distribution inéquitable des occasions de participation en classe en fonction des identités des élèves (Gorgorió & Abreu 2009; Gorgorió & Prat 2009). Millon-Fauré (2011*a*) a constaté qu'afin de faciliter l'entrée des élèves dans l'activité, les enseignants choisissaient d'abaisser le niveau mathématique du travail à la charge des élèves plutôt que de faire des adaptations sur le plan langagier. Chnane-Davin (2005) note une modification des pratiques d'enseignement en classe d'accueil (regroupant des ÉALS) et la conception de dispositifs bricolés qui, étant donné les compromis, ne seraient pas toujours optimaux. Félix et Chnane-Davin (2008) précisent que les pratiques observées en classe d'accueil se distinguent souvent des pratiques admises dans les classes ordinaires. À contrecourant, plusieurs enseignants déclarent ne pas vouloir adapter leur enseignement en fonction des ÉALS ou le faire avec réticence (Millon-Fauré 2011*b*; Pettit 2011; Reeves 2006; Walker, Shafer & Iiams 2004). Enfin, alors que Gutiérrez (2002) croit que la baisse des exigences pourrait être la réaction à un rendement plus faible d'ÉALS aux examens, Elbers et de Haan (2005) imputent en partie les mauvais résultats aux méthodes éducationnelles.

De ces observations, il ressort une tendance à réduire le niveau mathématique à travers un enseignement transmissif ne favorisant pas l'interaction. Or, pour ces auteurs et d'autres (Costanzi, Gorgorió & Prat 2012; Rowlands & Carson 2002), des activités mathématiques de haut niveau sont nécessaires pour garantir l'accès à une éducation de qualité. Qui plus est, l'accent des nouveaux curriculums s'actualise par une demande accrue aux élèves pour qu'ils participent verbalement et à l'écrit en expliquant des processus menant à des solutions, en explicitant des conjectures, en prouvant des conclusions et en présentant des arguments (Moschkovich 1999). Ces types d'activités mathématiques sont des activités de haut niveau que les élèves ne peuvent maitriser par l'intermédiaire d'un enseignement transmissif axé sur l'exercisation individuelle des bases (*Ibid.*). Cet écart entre le type d'activité offert aux ÉALS et ce qui est promu dans les nouveaux curriculums nous force à conclure à la possibilité d'un déficit de qualité de l'enseignement. Plusieurs chercheurs en sont arrivés au même constat. Certains ont entrepris d'interroger des enseignants pour comprendre les sources de ce déficit. Ils rapportent que les enseignants disent vivre un sentiment d'essoufflement (Pettit 2011; Poirier 1997; Secada & Carey 1990) par rapport à la complexité de la tâche (Clair 1995; Gándara, Maxwell-Jolly & Driscoll 2005; Gutiérrez 2002). Ils disent se sentir dépassés par les exigences des administrateurs (Secada & Carey 1990) ou celles qu'ils s'imposent (Félix & Chnane-Davin 2008). Gorgorió, Planas et Vilella (2002) ont recueilli des propos semblables alors que les enseignants parlaient d'anxiété face à une nouvelle situation d'enseignement complexe. Dans toutes ces études, les enseignants disent ne pas se sentir suffisamment préparés. De son côté, Ross (2014) rapporte que les enseignants se sentent moins efficaces avec des ÉALS qu'avec les autres élèves. D'autres enseignants disent éprouver un sentiment d'impuissance et de frustration relativement à leur difficulté à accéder au processus cognitif des élèves à cause de la distance linguistique (Gándara et al. 2005; Gorgorió & Planas 2001). Ces études, conduites dans plusieurs contextes, tendent à démontrer que les enseignants œuvrant auprès d'ÉALS vivent des situations d'enseignement difficiles qui diffèrent des situations d'enseignement à des élèves maitrisant la langue de scolarisation. Il apparait alors nécessaire d'étudier les éléments de ces situations d'enseignements à des ÉALS qui amènent les enseignants à déclarer de tels sentiments.

II. RECHERCHES SUR DES SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT À DES ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION

Un premier élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est la difficulté pour l'enseignant à évaluer les acquis mathématiques des ÉALS afin de déterminer les contenus mathématiques à enseigner (Chnane-Davin 2005; Poirier 1997). Si l'on peut argumenter que cette difficulté est un enjeu de toute relation d'enseignement, on peut tout de même concevoir que la distance linguistique entre l'enseignant et les ÉALS vient l'amplifier (Gándara et al. 2005; Gorgorió & Planas, 2001). De la même façon, la distance linguistique peut rendre plus difficile l'adaptation de l'offre mathématique en fonction des objectifs scolaires et professionnels des élèves. Or, plusieurs chercheurs insistent sur l'importance de considérer ces objectifs particulièrement pour les ÉALS (Domite & Pais 2009; Gorgorió & Planas 2001; Secada & Carey 1990; Skovsmose 1994; Vithal & Skovsmose 1997). Par ailleurs, dans les situations d'enseignement pour lesquelles plusieurs ÉALS proviennent de systèmes scolaires variés (par exemple des classes rassemblant plusieurs élèves issus de l'immigration récente), les enseignants expriment leur frustration devant la diversité des acquis ainsi engendrée (Gándara et al. 2005). En somme, si l'on peut émettre une conjecture quant à l'existence d'un lien entre la difficulté à évaluer les acquis mathématiques des ÉALS et la tendance à l'abaissement du niveau des mathématiques qui leur est offert, le lien n'est certainement pas direct et il n'est pas clairement documenté non plus. Ainsi, la façon de gérer cette difficulté par les enseignants pourrait être mieux documentée.

Un deuxième élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est que, face à la distance linguistique, l'enseignant de mathématiques doit déterminer la place de l'enseignement de la LS dans sa classe (Abreu & Gorgorió 2007; Pettit 2011; Secada & Carey 1990), et ce, allant d'une place comparable à ce que l'enseignant ferait en classe ordinaire à une place plus importante. Or, à partir du moment où les enseignants font une place à l'enseignement de la LS afin de poursuivre leur projet didactique (mathématique), ils introduisent des « savoirs clandestins » (Chnane-Davin 2011) qui mettent une pression, au moins à court terme, sur le temps didactique (mathématique). En contrepartie, les enseignants qui choisissent de faire une place à l'enseignement de la LS misent vraisemblablement sur un effet bénéfique à moyen ou long terme. Or, des enseignants qui font ce choix disent manquer de temps pour enseigner à la fois les contenus (mathématiques) et la LS (Gándara et al. 2005). Il semble donc exister une tension entre les gains à court et à long terme sur le temps didactique (mathématique) découlant de l'enseignement ou non de la LS à même les cours de mathématiques. Or, à la suite des résultats de recherche déjà évoqués sur la tendance à réduire la qualité des mathématiques proposées aux élèves, il semble que plusieurs enseignants sont plutôt influencés par des contraintes à court terme: c'est-à-dire que le temps didactique (mathématique) doit progresser. Toutefois, les recherches recensées ne nous permettent pas de conclure avec certitude en ce sens ou même d'identifier ces contraintes à court terme. Ainsi, des recherches portant sur les contraintes vécues par les enseignants pour déterminer la place de l'enseignement de la LS dans les classes de mathématiques seraient pertinentes.

Un troisième élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est la place donnée à l'utilisation des langues premières (L1) des élèves pour apprendre des mathématiques dans la LS. Plusieurs chercheurs avancent que l'utilisation de la L1 pour apprendre les mathématiques dans une LS autre permet aux élèves de mieux performer que ceux qui n'y ont pas recours (Gutiérrez 2002; Jao 2012; Latu 2005). D'ailleurs, Gorgorió et Planas (2001) ont observé la richesse des interactions mathématiques en L1 lorsque les élèves sont placés en sous-groupes linguistiquement homogènes. À l'opposé de ces résultats, beaucoup d'enseignants croient que l'immersion totale est la meilleure façon d'apprendre la LS (Armand 2012; Pettit 2011), et ce même si certains élèves passent par une phase silencieuse peu propice à l'apprentissage (Secada & De La Cruz 1996). De même, étant donné les difficultés des élèves qui apprennent la LS à résoudre des problèmes écrits par rapport aux mêmes problèmes en format exclusivement numérique (Bernardo 2002), les enseignants privilégieraient des tâches mathématiques décontextualisées en mettant de côté les autres aspects des nouveaux curriculums tels que décrits par Moschkovich (1999). Or, ces difficultés pourraient être réduites par un passage par la L1 pour comprendre le problème et convoquer des acquis mathématiques réalisés en L1 (Cummins & Persad 2014; Gutstein, Lipman, Hernandez & de los Reyes 1997; Moschkovich 2000), pour ensuite effectuer la tâche et communiquer son processus et son résultat dans la LS (Gorgorió & Planas 2001; Pettit 2011). Cela étant dit, faire une place aux L1 a aussi des conséquences comme la difficulté pour l'enseignant à avoir accès au travail des élèves (Armand 2012). En somme, on remarque que cet élément de la situation d'enseignement à des ÉALS est perçu différemment par les chercheurs et par les enseignants. Or, le point de vue des enseignants est peu documenté au-delà de lieux communs comme l'idée que l'immersion totale soit meilleure. Il y a donc lieu d'examiner les enjeux didactiques vécus par les enseignants lorsqu'ils donnent une place aux L1 des élèves.

Un quatrième élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est la gestion de l'aspect culturel. Nous abordons ici l'aspect culturel au sens de Costanzi et al. (2012) qui s'appuient sur Zittoun (2006, 2007) pour considérer l'apprentissage des mathématiques par des élèves immigrants comme un processus de transition qui inclut de nouveaux contextes de pratiques mathématiques, différentes relations entre les personnes et le savoir, différentes façons de comprendre les actions et les interactions en classe, une reconstruction d'identités et des négociations des significations entre les personnes. Or, si tous les ÉALS ne sont pas immigrants, ils sont minimalement confrontés à des interactions dans une LS qui n'est pas leur L1, et en ce sens, nous considérons qu'ils vivent aussi un processus de transition. Plusieurs recherches ont abordé un tel processus de transition. Par exemple, Civil (2014) lie la différence de participation en classe entre élèves blancs et d'origine latino-américaine à la culture dans laquelle ils ont grandi, l'une encourageant les questions alors que l'autre valorise la retenue. De son côté, Faupin (2014) a observé que les élèves immigrants prenaient la parole dans des classes qui leur sont réservées, mais pas dans les classes ordinaires à cause de la différence de statut social. Aux États-Unis, Gutiérrez (2002) identifie de son côté la méconnaissance des pratiques de classe et un faible niveau de maitrise de la LS comme un risque important pour les individus des groupes minoritaires de se retrouver avec un faible statut social. Enfin, Millon-Fauré (2010) a observé que les élèves issus de l'immigration tendent à oublier les algorithmes appris dans leur pays d'origine au profit de ceux de la classe qui sont jugés plus légitimes. Elle impute cet oubli à une mauvaise interprétation du contrat didactique du pays d'accueil, alors que Civil, Planas et Quintos (2005), devant des observations semblables, ont conclu à une volonté de s'adapter aux normes du pays d'accueil afin de favoriser leur réussite. Ces exemples montrent quelques difficultés culturelles auxquelles sont confrontés les ÉALS (immigrants ou non) et les enseignants et qui auraient une incidence sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Plus généralement, Costanzi et al. (2012) affirment que les difficultés de ces élèves sont souvent reliées au processus d'attribution de sens aux situations d'apprentissage et au processus de reconstruction de l'identité. Dans le contexte français, Bouchard (2008) exprime la même idée en disant que la réussite de ces élèves passe d'abord par leur capacité et leur volonté à reconstituer les habitus pédagogiques et éducatifs pour s'y fondre au moins momentanément. Au-delà de ces observations et des recommandations des chercheurs concernant des pratiques inclusives et respectueuses de la diversité, peu de recherches visent à comprendre comment les enseignants gèrent cette diversité culturelle en lien avec les objectifs mathématiques du cours.

Voilà donc quatre éléments qui pourraient contribuer à mieux comprendre les spécificités des situations d'enseignement aux ÉALS. Pour les enseignants, ces éléments pourraient être vécus comme des difficultés qui les amènent à déployer un enseignement qui diffère de celui qu'ils déploient en classes ordinaires: ce que les observations en classe présentées plus haut tendent à démontrer. Si c'est effectivement le cas, il devient alors crucial de comprendre l'influence réelle de ces éléments sur les choix des enseignants ayant une incidence didactique. Or, étant donné les témoignages des enseignants qui parlent de dépassement, d'anxiété et autres sentiments semblables face à des situations d'enseignement à des ÉALS ainsi que les observations sur la qualité des mathématiques qui leur sont proposées, il y a lieu de croire que ces éléments ou d'autres qui n'ont pas été répertoriés sont suffisamment importants pour modifier l'enseignement. En d'autres termes, les chercheurs ont observé que les enseignants ne proposaient pas à leurs ÉALS des activités mathématiques optimales d'un point de vue didactique et qu'il en résultait, de façon plus marquée que dans les classes ordinaires, une tendance à la baisse du niveau mathématique. Plusieurs chercheurs ont alors conclu qu'il fallait former les enseignants de mathématiques spécifiquement à l'enseignement aux ÉALS.

III. LA FORMATION DES ENSEIGNANTS EN LIEN AVEC L'ENSEIGNEMENT AUX ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION

Les enseignants ne seraient pas préparés adéquatement pour travailler auprès des ÉALS (Gándara, Rumberger, Maxwell-Jolly & Callahan 2003; Jones 2002; Mujawamariya & Moldoveanu 2003). Or, le développement professionnel d'enseignants en lien avec l'enseignement à des ÉALS serait corrélé positivement avec le sentiment d'efficacité déclaré (Ross, 2014; Gándara et al. 2005). Par ailleurs, Young (1996) affirme que les enseignants doivent avoir des occasions d'acquérir des habiletés spécifiques pour travailler avec des ÉALS. De ce constat sur le besoin de formation, des questions émergent. D'abord, les enseignants en veulent-ils et que veulent-ils? Puis, qui est qualifié pour donner une telle formation, quel devrait en être le contenu et quelle forme devrait-elle prendre? Les enseignants interrogés par Pettit (2011) disent être ouverts à la formation en lien avec l'enseignement aux ÉALS alors que d'autres études montrent un désintérêt pour cette question (Clair, 1995; Reeves, 2006; Walker *et al.*, 2004). Ceux qui s'y intéressent déclarent vouloir de la formation sur les modèles et les stratégies d'enseignements spécifiques à leur contexte (Pettit, 2011), ce que l'état de la recherche ne permet pas nécessairement. Cela se reflète dans les observations de Parrish, Linquanti, Merickel, Quick, Laird et Esra (2002) sur le manque de clarté pendant les formations orientées vers les meilleures pratiques pour enseigner aux ÉALS. Au mieux, des chercheurs prescrivent des objectifs sans proposer les moyens pour y arriver: un type de formation qui ne semble pas répondre aux besoins exprimés des enseignants. Voilà peut-être pourquoi Ross (2014) argumente que les formateurs en formation initiale et continue devraient eux-mêmes recevoir de la formation pour l'enseignement aux ÉALS. Selon Ross (2014), il alors serait possible pour les futurs maitres de commencer à développer le savoir requis pour soutenir l'apprentissage de ces élèves. Il resterait toutefois à établir à quel savoir le chercheur fait référence. Quant à lui, Ryan (1995) insiste pour que l'interrelation entre culture et langage soit enseignée alors que Harklau (1994) recommande d'orienter la formation vers l'enseignement de la LS dans les classes de mathématiques. Enfin, Costanzi et al. (2012) proposent d'essayer de changer les représentations des enseignants, malgré le défi que cela représente. Dans les trois derniers cas, on prescrit les objectifs sans donner les moyens pour les atteindre. En somme, malgré un consensus sur la nécessité de former les enseignants spécifiquement à l'enseignement aux ÉALS, nous n'avons pas réussi à identifier une base de savoirs spécifiques sur laquelle on pourrait fonder des formations pertinentes. De plus, même si l'on disposait de ces savoirs, il n'est pas certain que le besoin des enseignants d'avoir des formations spécifiques à leur situation d'enseignement soit comblé. Devant ce constat de déficit de savoirs scientifiques spécifiques liés à une diversité de situations d'enseignement, sur quelles bases peut-on offrir des formations? Plusieurs auteurs (Ball, Lubienski & Mewborn 2001; Barwell 2013; Godley, Sweetland, Wheeler, Minnici & Carpenter 2006; Pettit 2011) avancent que seules des formations ancrées dans la pratique pourraient avoir une influence significative sur l'enseignement à des ÉALS. Dans ce sens, Dillon (2001) et Moore (1999) croient que la mise en place d'occasions pour les enseignants de collaborer dans une perspective de développement professionnel est nécessaire. Il semble donc que la formation à l'enseignement des mathématiques à des ÉALS pose plusieurs défis dont le plus important, à notre avis, est celui de la méconnaissance scientifique des situations d'enseignement à des ÉALS et de comment les enseignants enseignent en tenant compte de ces situations.

IV. UNE ZONE D'OMBRE

En somme, l'état de la connaissance sur les situations d'enseignement aux ÉALS et particulièrement sur les processus décisionnels des enseignants ayant des incidences didactiques en fonction des caractéristiques spécifiques de ces situations ne nous permet pas de remédier à la tendance à la baisse du niveau des activités mathématiques proposées aux ÉALS. En effet, malgré l'avancement de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à des ÉALS, plusieurs enseignants continuent à naviguer à contrecourant. Ce constat est également vrai dans les classes ordinaires, mais, étant donné les spécificités des situations d'enseignement aux ÉALS, des recherches doivent être conduites pour comprendre ce qui amène les enseignants à déclarer vivre des difficultés plus grandes dans ces situations. La zone d'ombre que nous pointons ici est donc notre compréhension de l'activité ordinaire des enseignants visant à faire apprendre les mathématiques à des ÉALS. On dispose déjà de connaissances sur les objectifs souhaitables de l'enseignement aux ÉALS qui sont le plus souvent exprimés en fonction des fondements épistémologiques des chercheurs. On dispose aussi de certaines connaissances sur ce qui est visible en classe, les pratiques observées. Toutefois, le manque de connaissances sur le processus menant à ce qui est observé ne nous permet pas de comprendre l'écart entre les pratiques observées et des pratiques qui seraient didactiquement souhaitables. Ce processus pourrait constituer une source de données nous permettant de mieux comprendre les difficultés et enjeux vécus par les enseignants. En retour, une meilleure compréhension de ces enjeux pourrait nous permettre de construire des formations qui répondent mieux aux besoins des enseignants. Toutefois, l'accès à ces données n'est pas facile et ne fait pas partie de la tradition de recherche en didactique des mathématiques. Ainsi, nous proposons, dans la section qui suit, de prendre une certaine posture scientifique et de mettre en place des modalités méthodologiques conséquentes qui permettent d'accéder, au moins en partie, à ces données.

V. UNE POSTURE SCIENTIFIQUE

Pour s'attaquer à la compréhension de l'activité ordinaire des enseignants visant à faire apprendre les mathématiques à des ÉALS, il est essentiel de prendre en compte les difficultés vécues et exprimées par les enseignants, car plusieurs recherches tendent à montrer qu'elles auraient un impact délétère sur le projet didactique de l'enseignant. Remarquons d'abord que ces difficultés ne sont pas toujours d'ordre didactique. Certaines sont en lien avec l'apprentissage de la LS, l'usage des L1 ou la gestion de l'aspect culturel. Or, nous l'avons vu, les enseignants ne sont pas nécessairement équipés pour gérer ces situations d'enseignement qui se distinguent des situations d'enseignement à des élèves dont la L1 est la LS. Ainsi, quand les enseignants expriment des sentiments de dépassement, il ne s'agit pas simplement d'enseignants portant un projet didactique qui parlent, mais aussi de travailleurs exerçant un métier dans des situations d'enseignement qu'ils considèrent difficiles, assez difficiles pour venir modifier négativement leur projet didactique. Ainsi, dans ces situations, le regard du didacticien des mathématiques peut difficilement se restreindre à l'analyse des observables d'ordre didactique. Son regard doit s'élargir pour prendre en compte les éléments qui ont un impact sur les observables d'ordre didactique.

Un premier problème qui se pose alors pour le didacticien en est possiblement un de compétence. En effet, si la nature de ces éléments n'est pas du ressort de la didactique des mathématiques, elle peut alors prendre plusieurs formes (didactique du français, psychologique, sociale, culturelle, institutionnelle, personnelle, etc.) qui dépassent les compétences du didacticien. Un deuxième problème est celui de la lourdeur des modalités méthodologiques qui viendrait avec la prise en compte systématique de toutes ces dimensions. À vouloir tout voir, on ne verrait plus rien!

Pour parer à ces problèmes, une solution possible consiste à renverser le regard. C'est-à-dire qu'un observable d'ordre didactique peut être étudié en fonction des éléments qui ont menés à cet observable: peu importe leur nature. Il ne s'agit donc pas de réaliser une recension exhaustive de tous les éléments ayant un impact sur un observable. Il s'agit plutôt de reconstituer le mieux possible les éléments ayant eu un impact sur cet observable. Pour ce faire, la collaboration de l'enseignant est essentielle, car l'analyse à priori et l'analyse des déroulements ne nous informent que trop partiellement pour espérer comprendre l'activité d'un enseignant finalisée à la fois par un projet didactique et par des considérations relatives à l'exercice de son métier. En effet, l'enseignant peut nous donner un accès privilégié à des éléments non directement observables et qui ont contribué à la prise de décision ayant mené à l'observable. La conséquence la plus significative de ce renversement, c'est que nous sommes maintenant à la recherche d'une causalité historique: ici, c'est l'analyse de l'histoire de l'observable qui permet de le comprendre. Nous proposons donc que le didacticien ne se positionne pas dans des postures objective ou subjective, mais plutôt dans une posture s'alignant sur l'approche culturelle historique de Vygotsky (1985). Pour opérationnaliser cela, nous proposons de recourir à des modalités méthodologiques inspirées de la Clinique de l'activité (Clot, 2008).

VI. UNE PROPOSITION DE MODALITÉS MÉTHODOLOGIQUES

À la base, nous faisons appel à Clinique de l'activité (CA) comme un « instrument de connaissance de la situation réelle et de l'activité ordinaire » (Ibid., p. 32). Toutefois, s'approprier cette méthodologie pour la recherche en didactique des mathématiques implique d'en examiner toutes les facettes, ce que nous faisons ici en partie. D'abord, une des idées principales qui sous-tend la CA est que « le comportement n'est jamais que " le système de réactions qui ont vaincu " (Vygotski 2003, p. 74) » (Clot 2008, p. 89). Dans le contexte de leur travail, les enseignants prennent des décisions, certaines ayant une incidence didactique. Ces décisions victorieuses se reflètent dans leur activité observable, le réalisé. Or, les autres possibles non réalisés, ces activités « empêchées, suspendues, différées, anticipées ou encore inhibées » (Ibid., p. 129), ces décisions qui ont été considérées, mais qui n'ont pas vaincu, forment une partie substantielle du travail de l'enseignant. Pour Clot (2008), en CA « le réalisé n'a plus le monopole du réel » (p. 129), activités réalisées et non réalisées font partie du réel. Ainsi, pour le développement du dispositif méthodologique de la CA, il s'aligne avec une critique de Vygotsky par rapport à certaines méthodes de recherches:

> ces méthodes « objectives » s'en tiennent beaucoup trop aux données immédiates de l'expérience en faisant l'impasse sur la conscience ou la pensée, que l'expérimentateur sollicite tout en les écartant paradoxalement de l'expérience […] L'investigation des mouvements internes non réalisés est une part nécessaire de l'expérimentation (Op. cité, p. 180).

Pour Clot (2008), cette investigation pourrait permettre de retrouver le sens de l'activité réalisée qu'il définit comme le « rapport de valeur que le sujet instaure entre cette action et ses autres actions possibles » (p. 9). Le sens ainsi défini implique que la même activité réalisée deux fois par un même sujet dans des contextes semblables (mais tout de même différents) n'a pas nécessairement le même sens pour le sujet et constitue donc deux activités réelles différentes. Par exemple, un enseignant qui propose de l'exercisation à ses élèves n'établit pas nécessairement le même rapport de valeur entre cette action et les autres actions possibles selon qu'il s'adresse à des élèves qui maitrisent la LS ou à des ÉALS. Il pourrait, par ailleurs, considérer que l'exercisation doit prendre une plus grande place dans l'enseignement aux ÉALS, comme le démontrent plusieurs des observations ci-dessus. Ainsi, pour une même tâche prescrite, l'enseignant déploie une activité d'enseignement différente en fonction de la situation d'enseignement. Cela rejoint certaines notions importantes en ergonomie, discipline dans laquelle la CA s'inscrit. En ergonomie, il y a une distinction entre tâche et activité. La tâche est ce qui est à faire et l'activité est ce qui est fait (Leplat, 1992). Incidemment, il existe un écart entre le travail prescrit et le travail réel. Entre ce qui est prescrit à l'enseignant, ce qu'il en comprend, ce qu'il dit qu'il fait et ce qu'il fait, des écarts apparaissent et l'analyse de ces écarts permet de repérer le sens de l'activité pour le sujet. On voit que le travail prescrit est confronté à la situation réelle et que l'enseignant, face à cette situation et peut-être malgré cette situation, déploie une activité pas toujours optimale, mais ayant comme finalité l'apprentissage des mathématiques par les élèves. Cette activité pas toujours optimale est, pour Clot (2008), le résultat que l'économie des moyens (ou l'efficience) joue, en tension avec le sens. L'auteur ajoute que c'est la mise à jour de la tension entre sens et efficience qui permet de comprendre l'activité réelle. C'est ainsi, que la connaissance de la situation réelle, telle que vécue et exprimée par l'enseignant, entre sens et efficience, devient un outil de compréhension de son activité ordinaire. Dans des contextes d'enseignement à des ÉALS pour lesquels les enseignants se disent dépassés, les manifestations de tension entre efficience et sens devraient être observables.

Par ailleurs, au-delà de la visée de production de connaissance décrite brièvement ci-dessus, il est impossible d'introduire le dispositif méthodologique de la CA sans discuter de sa visée de transformation du travail (Leplat 1997) héritée de l'ergonomie qui donne au chercheur le rôle d'intervenant. C'est qu'en introduisant le non réalisé dans le réel, on introduit en quelque sorte l'histoire du réalisé, son développement. Or, en retournant aux fondements vygotskiens de l'ergonomie et de la CA, on constate que Vygotsky (2003) argumentait que le développement ne peut être étudié que s'il est provoqué: il faut donc transformer pour comprendre. C'est alors dans cette perspective que Clot (2008) construit son dispositif méthodologique qui inclut la constitution d'un collectif, des enregistrements vidéos de séances de classe ordinaire, des auto-confrontations simples et croisées et un retour au collectif. Pour Clot (2008), la transformation est possible si l'on permet de « redonner une histoire aux activités arrêtées » (p. 176). Pour ce faire, il tente de provoquer l'ouverture d'un dialogue intérieur qui ne peut se maintenir sans un relai social qui l'alimente en énergie conflictuelle. Ainsi, le sujet doit être confronté aux activités des autres qui sont différentes des siennes, une activité étant entendue comme une action couplée avec son sens, afin que soit alimenté un dialogue intérieur possiblement générateur de développement de l'activité du sujet. En ce sens, l'auteur pose le collectif de travail comme une source d'énergie conflictuelle détenant un pouvoir transformateur sur le sujet. Il insiste donc pour construire un cadre pour l'analyse du travail qui vise à maintenir ou à restaurer la vitalité dialogique du social. Ainsi, un effet collatéral (en quelque sorte) de recourir à la CA comme méthodologie en didactique des mathématiques est de participer à la formation continue des enseignants participant à l'expérimentation. De ce point de vue, les enseignants trouveraient possiblement un intérêt personnel et professionnel à participer à de telles recherches.

VII. CONCLUSION

Il reste toutefois plusieurs questions à travailler. En premier lieu, le dispositif méthodologique de la CA est conçu dans une optique d'analyse du travail et ne prévoit donc pas comment gérer les aspects didactiques. Pour ce faire, l'idée d'une articulation avec la Théorie de l'objectivation (Radford 2011, 2013), ancrée sensiblement dans les mêmes fondements épistémologiques, nous semble pertinente. On pourrait alors diriger la confrontation en CA en fonction des différents processus d'objectivation mis en place par les enseignants pour favoriser l'apprentissage des mathématiques par les élèves. En deuxième lieu, la posture du didacticien est forcément différente de celle de l'intervenant en ergonomie, expert en analyse du travail, en ce sens que le didacticien est un expert des processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Or, l'ergonomie préconise une approche inductive et une suspension du jugement (Yvon & Garon 2006) possiblement plus naturelle pour néophyte du travail étudié. Le didacticien doit-il alors éviter d'introduire des résultats issus de la recherche dans la CA qui serait possiblement bénéfique pour les enseignants afin de se conformer à la tradition ergonomique? Peut-il ou doit-il, au contraire, profiter de sa position d'expert pour introduire dans le dispositif de l'énergie conflictuelle issue, de façon indirecte, d'enseignants ayant participé à d'autres recherches? Si ces questions et d'autres encore peuvent être résolues, nous croyons qu'un dispositif méthodologique inspiré de la Clinique de l'activité et possiblement articulé avec la Théorie de l'objectivation pourrait permettre de mieux comprendre l'activité ordinaire des enseignants de mathématiques enseignants à des ÉALS tout en leur permettant d'avoir accès à une formation continue basée sur l'expérience de leurs pairs et ancrée dans leurs situations d'enseignement respectives. Cela étant dit, si ce sont les difficultés vécues par les enseignants face à des situations d'enseignement des mathématiques à ÉALS qui a suscité cette proposition méthodologique, son utilisation pour l'étude didactique d'autres situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques nous semble également pertinente.

REFERENCES

Abreu G. de, Gorgorió N. (2007) Social representations and multicultural mathematics teaching and learning. In Pitta-Pantazi D., Philippou G. (dir.) *Proceedings of the Fifth*

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1559-1566). Larnaca, Chypre: Department of Education, University of Cyprus.

Armand F. (2012) Enseigner en milieu pluriethnique et plurilingue: place aux pratiques innovantes! *Québec français* 167, 48-50.

Ball D. L., Lubienski S. T., Mewborn D. S. (2001) Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson V. (dir.) *Handbook of research on teaching (4e éd.)*. New York: Macmillan.

Barwell R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher knowledge. *ZDM* 45, 595-606.

Bernardo A. B. I. (2002) Language and mathematical problem solving among bilinguals. *Journal of Psychology* 136, 283-297.

Bouchard R.. (2008) Accueil des Éna, efficacité et équité: la question de l'interpellation dans l'interaction scolaire. In Cuq J.-P. (dir.) *Culture d'enseignement, cultures d'apprentissage, observations comparées de l'action du professeur et des élèves dans des classes de français et mathématiques, en CM2 et en Sixième, dans des dispositifs d'intégration. Symposium du colloque international Équité et efficacité en éducation*. Rennes, France.

Chnane-Davin F. (2005) *Didactique du français langue seconde en France: Le cas de la discipline "français" enseignée au collège*. Thèse de doctorat. Aix Marseille 1.

Chnane-Davin F. (2011) Les contenus de savoir et la manière de faire des enseignants des classes d'allophones. *Actes du 2e colloque international de l'ARCD, les contenus disciplinaires*. Villeneuve d'Ascq: Université Lille 3.

Civil M. (2014) Guest Editorial: Musings around Participation in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Educator* 23(2), 3–22.

Civil M., Planas N., Quintos B. (2005) Immigrant parents' perspectives on their children's mathematics education. *ZDM* 37(2), 81-89.

Clair N. (1995) Mainstream classroom teachers and ESL students. TESOL Quarterly, 29(1), 189-196.

Clot Y. (2008) *Travail et pouvoir d'agir*. PUF.

Cole M., Griffin, P. (1987). Contextual factors in education: Improving Science and Mathematics education for minorities and women. Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Costanzi M., Gorgorió N., Prat M. (2012) Pre-service teachers' representations of school mathematics and immigrant children. In Hjörne E., van der Aalsvoort G., de Abreu G. (Eds.) *Learning, social interaction and diversity – exploring school practices* (pp. 203-222). Rotterdam: Sense Publishers.

Cummins J., Persad R. (2014) Teaching through a multilingual lens: the evolution of EAL policy and practice in Canada. *Education Matters: The Journal of Teaching and Learning* 2(1), 3-40.

Dillon P. W. (2001) Labeling and English language learners: Hearing recent immigrants' needs. In Hudak G. M., Kihn P. (Eds.) *Labeling: Pedagogy and politics* (pp. 93-105). London, England: Routledge Falmer.

Domite, M. C. S. et Pais, A. S. (2009). Understanding ethnomathematics from its criticisms and contradictions. In *Actes du CERME 6*. Lyon, France.

Elbers E. et de Haan M. (2005) The construction of word meaning in a multicultural classroom. Mediational tools in peer collaboration during mathematics lessons. *European journal of psycbology of education* 20(1), 45-59.

Faupin E. (2014) Les élèves nouvellement arrivés au collège en France: prendre la parole en classe lorsque l'on débute en français. Analyse des interactions didactiques pour les élèves en immersion. *Initio* 4, 33-49.

Félix C., Chnane-Davin F. (2008) Équité et efficacité dans les classes-dispositif pour élèves en difficulté linguistique. In Cuq J.-P. (Ed.) *Culture d'enseignement, cultures d'apprentissage, observations comparées de l'action du professeur et des élèves dans des classes de français et mathématiques, en CM2 et en Sixième, dans des dispositifs d'intégration. Actes du symposium du colloque international Équité et efficacité en éducation.* Rennes, France.

Gándara P., Maxwell-Jolly J., Driscoll, A. (2005) Listening to teachers of English language learners: A survey of California teachers' challenges, experiences, and professional development needs. *The Center for the Future of Teaching and Learning*. Santa Cruz: CA.

Gándara P., Rumberger R., Maxwell-Jolly J., Callahan R. (2003) English learners in California schools: Unequal resources, unequal outcomes. Education Policy Analysis Archives, 11(36).

Godley A. J., Sweetland J., Wheeler R. S., Minnici A., Carpenter B. D. (2006) Preparing teachers for dialectally diverse classrooms. *Educational Researcher* 35(8), 30-37.

Gorgorió N., Planas N., Vilella X. (2002) Immigrant children learning mathematics in mainstream schools. In de Abreu G., Bishop A. J., Presmeg N. C. (Eds.) *Transitions between contexts of mathematical practices* (pp. 23-52). Dordrecht: Kluwer.

Gorgorió N. et de Abreu G. (2009). Social representations as mediators of practice in mathematics classrooms with immigrant students. *Educational studies in mathematics* 72, 61-76.

Gorgorió N., Planas, N. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics* 47, 7-33.

Gorgorió N., Prat M. (2009) Jeopardizing learning opportunities in multicultural mathematics classrooms. In César M. et Kumpulainen K. (Eds.) *Social interactions in multicultural setting* (p. 145-170). Rotterdam: Sense Publishers.

Gutiérrez R. (2002) Beyond essentialism: The complexity of language in teaching mathematics to Latina/o students. *American Educational Research Journal* 39(4), 1047-1088.

Gutstein E., Lipman P., Hernandez P., de los Reyes R. (1997) Culturally relevant mathematics teachers in Mexican-American context. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(6), 709-737.

Harklau L. (1994) ESL versus mainstream classes: Contrasting L2 learning environments. *TESOL Quarterly* 28(2), 241-272.

Jao L. (2012) The Multicultural Mathematics Classroom: Culturally Aware Teaching through Cooperative Learning & Multiple Representations. *Multicultural Education* 19(3), 2-10.

Jones T. G. (2002) Preparing all teachers for linguistic diversity in K-12 schools. *Actes de Annual meeting of the American Association of Colleges for Teacher Education*. New York, NY.

Latu V. F. (2005) Language factors that affect mathematics teaching and learning of Pasifika students. In *Building connections: Research, theory and practice (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Volume 2, p. 483-490). Sydney: MERGA.

Leplat J. (1992) *L'analyse du travail en psychologie ergonomique*. Octares: Toulouse.

Millon-Fauré K. (2010) Un phénomène d'oubli au début du collège chez les élèves migrants: source de difficulté pour les apprentissages. *Petit x* 83, 5-26.

Millon-Fauré K. (2011a) *Les répercussions des difficultés langagières dans l'activité mathématique en classe: le cas des élèves immigrants*. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille.

Millon-Fauré K. (2011b) Les répercussions des difficultés langagières dans l'activité mathématique en classe: le cas des élèves immigrants. *Actes du Deuxième colloque* *international de l'Association pour des Recherches Comparatistes en Didactique (ARCD). Les contenus disciplinaires*. Villeneuve d'Ascq, Université Lille 3.

Moore C. (1999) *Teacher thinking and student diversity*. n. p.

Moschkovich J. (1999) Supporting the participation of English language earning's in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics* 19(1), 11-19.

Moschkovich J. (2000) Learning mathematics in two languages: Moving from obstacles to resources. In Secada W. G. (Ed.), *Changing the faces of mathematics: Perspectives on multiculturalism and gender equity* (pp. 85-93). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mujawamariya D., Moldoveanu M. (2003) Les enseignants associés contribuent-ils à l'éducation multiculturelle des étudiants maîtres? In Duchesne H. (Ed.) *Recherche en éducation francophone en milieu minoritaire: regards croisés sur une réalité mouvante* (pp. 175-203). Winnipeg: Presses universitaires de Saint-Boniface.

Parrish T. B., Linquanti R., Merickel A., Quick H. E., Laird J., Esra, P. (2002) Effects of the Implementation of Proposition 227 on the Education of English Learners. *K - 12: Year Two Report.* Palo Alto, CA: American Institutes for Research.

Pettit S. K. (2011) Teachers' beliefs about English Language Learners in mainstream classrooms: A Review of the literature. *International Multilingual Research Journal* 5(2), 123-147.

Poirier L. (1997) Rôle accordé aux interactions entre pairs dans l'enseignement des mathématiques - une illustration en classe d'accueil. *Éducation et francophonie* 25(1). Document téléaccessible à l'adresse <http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/ 25-1/rxxv1-06.html>.

Radford L. (2011) Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments* 1, 1-27.

Radford L. (2012) *On the Development of Early Algebraic Thinking*. PNA, 6(4), 117-133.

Radford L. (2013) Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. Journal of Research in Mathematics Education, 2(1), 7-44.

Ramirez J. D., Yuen S. D., Ramey D. R., Pasta D. J. (1991*) Final report: Longitudinal study of structured English immersion strategy, early-exit and later-exit transitional bilingual education for language-minority children, Volume I*. San Mateo, CA: Aguirre international.

Ramirez J. D., Pasta D. J., Yuen S. D., Billings D. K., Ramey D. R. (1991) *Final report: Longitudinal study of structured English immersion strategy, early-exit and later-exit transitional bilingual education for language-minority children, Volume II*. San Mateo, CA: Aguirre international.

Reeves J. (2006) Secondary teacher attitudes toward including English-language learners in mainstream classrooms. *The Journal of Educational Research* 99(3), 131-142.

Ross K. E. (2014) Professional development for practicing mathematics teachers: a critical connection to English language learner students in mainstream USA classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education* 17(1), 85-100.

Rowlands S., Carson R. (2002) Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. *Educational studies in mathematics* 50, 79-102.

Ryan P. M. (1995) *Foreign language teachers' perceptions of culture and the classroom: A case study*. n. p.

Secada W. (1992) Evaluating the mathematics education of limited English proficient students in a time of educational change. In *U. S. Department of Education, Proceedings of the Second National Research Symposium on Limited English Proficient Student Issues:*

Focus on evaluation and measurement Vol. 2 (pp. 209-256). Washington DC: U.S. Department of Education, Office of Bilingual Education and Minority Language Affairs.

Secada W. G., Carey D. A. (1990) Teaching mathematics with understanding to limited English proficient students. Urban diversity series, 101. New York, N. Y.: Columbia University, Institute for urban and minority education.

Secada W. G., De La Cruz Y. (1996) Teaching mathematics for understanding to bilingual students. In Flores J. L. (Ed.), *Children of la frontera: binational efforts to serve Mexican migrant and immigrant students* (pp. 285-308). Charleston, WV: Appalachia educational laboratory.

Skovsmose O. (1994) Toward a Philosophy of Critical Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vithal R., Skovsmose O. (1997) The end of innocence: a critique of “ethnomathematics”. *Educational Studies in Mathematics* 34, 131- 158.

Vygotski L. S. (1985) *Pensée et Langage* (Trad. par F. Sève). Paris: Éditions sociales (1re éd. 1934).

Vygotski L. S. (2003) *Conscience, inconscient, émotions* (Trad. par F. Sève et G. Fernandez). Paris: La Dispute.

Walker A., Shafer J., Iiams M. (2004) “Not in my classroom”: Teacher attitudes towards English language learners in the mainstream classroom. *NABE Journal of Research and Practice* 2(1), 130-160.

Young M. W. (1996) English (as a second) language arts teachers: The key to mainstreamed ESL student success. *English Journal* 85(8), 17-24.

Yvon F., Garon R. (2006) Une forme d’analyse du travail pour développer et connaître le travail enseignant : l’autoconfrontation croisée. *Recherches qualitatives* 26(1), 51-80.

Zittoun T. (2006) *Transitions: Development through symbolic resources*. Greenwich (CT): IAP.

Zittoun T. (2007) Symbolic resources and responsibility in transitions. *Young* 15(2), 193-211.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

FORMALISME ET SIGNIFICATION EN MATHÉMATIQUES : PHÉNOMÈNES D’ANAPHORE ET QUANTIFICATIONS IMPLICITES

Viviane DURAND-GUERRIER*

Résumé – L’étude des relations entre formalisme et signification est une question vive en didactique des mathématiques, en particulier en ce qui concerne l’enseignement supérieur et la transition secondaire supérieur. Nous traitons ici du cas des phénomènes d’anaphore (reprise de pronom) étudiés en sémantique formelle pour les langues naturelles. Nous montrerons sur un exemple que ce phénomène se retrouve également en mathématiques en lien avec la pratique de quantification implicite des énoncés conditionnels et qu’il est susceptible de générer des difficultés chez les étudiants en début d’université.

Mots-clefs : anaphore, didactique des mathématiques, formalisme, sémantique formelle, signification

Abstract – The study of relationships between formalism and meaning is a clue question in didactics of mathematics, in particular for undergraduates. In this paper, we focus on the case of the phenomena of anaphora (resumption of pronoun) studied in formal semantics for natural languages. We illustrate on an example that this phenomenon also occurs in mathematics in connection with the practice of implicit quantification of conditional statements, and that it may generate difficulties for fresh university students.

Keywords: anaphora, didactics of mathematics, formalism, formal semantics, meaning

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous nous intéressons aux relations entre formalisme et signification en mathématiques dans la perspective de la sémantique logique initiée par Frege et développée en particulier par Russel, Wittgenstein et Tarski (Rebuschi 2008 ; Durand-Guerrier 2005).

Contrairement à une idée commune qui tendrait à réduire les apprentissages mathématiques à l’acquisition d’un texte du savoir, en accord avec Vergnaud (1990), nous soutenons la thèse selon laquelle :

> Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l’iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. » (Op. cité, p.145)

Ceci ne veut pas pour autant dire que l’on peut réduire l’apprentissage des mathématiques à l’acquisition de savoir-faire et d’automatismes. En effet, Vergnaud poursuit :

* Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck – UMR 5149 CNRS Université de Montpellier - France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Durand-Guerrier V. (2015) Formalisme et signification en mathématiques. Phénomènes d’anaphore et quantifications implicites. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 731-740.

> Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets – arguments. (op. cité, p.145)

Dans la conférence qu'il donne en 2001 à Montréal à l'occasion de la remise du titre de Doctor Honoris Causas, Gérard Vergnaud revient sur les relations entre *forme opératoire* et *forme prédicative* de la connaissance.

> La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème en acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. (Vergnaud 2002, p. 9)

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'illustrer certains aspects de cette complexité du *dire*, en nous référant pour nos analyses aux *catégories logiques fondamentales* : objets, propriétés, relations, et aux phénomènes de *quantification.*

Nous pouvons illustrer ce point avec l'exemple de la négation des énoncés universels. On peut observer en début d'université les deux phénomènes suivants :

1. Invités à prouver qu'un énoncé conditionnel universel est faux, la plupart des étudiants sont capables de mettre en œuvre la règle du contre-exemple (à savoir chercher un élément qui vérifie l'antécédent et qui ne vérifie pas le conséquent) au moins lorsqu'un tel contre-exemple est aisément disponible.
2. Invités à donner la négation d'un énoncé conditionnel universellement quantifié, un grand nombre d'étudiants parmi ceux qui sont capables de mettre en œuvre la règle du contre-exemple proposent comme négation un énoncé conditionnel, en plaçant la négation soit sur l'antécédent, soit sur le conséquent, soit sur les deux.

Pour traiter le premier point, les étudiants mobilisent une connaissance opératoire développée au cours des études secondaires. Les réponses à la deuxième question montrent que pour de très nombreux étudiants, cette connaissance opératoire n'est pas articulée avec la connaissance prédicative associée selon laquelle « nier un énoncé universel c'est affirmer l'existence d'un contre-exemple ». Ceci n'est guère surprenant dans la mesure où cette articulation ne fait le plus souvent l'objet d'aucun travail ni au lycée, ni à l'université. Or, articuler ces deux connaissances nécessite d'une part de pouvoir mobiliser *a minima* les deux connaissances opératoires : a) *nier une proposition revient à expliciter la paraphrase « il est faux que »* b) *pour prouver qu'un énoncé général est faux il suffit de produire un contre-exemple*, et d'autre part de connaître les définitions des connecteurs et des quantificateurs logiques ainsi que les règles syntaxiques associées. Ceci permet de produire une nouvelle connaissance prédicative : la négation d'un énoncé de la forme "*Pour tout* x dans E, *si* $A(x)$, *alors* $B(x)$" est l'énoncé "*Il existe* x dans E tel que $A(x)$ *et* non $B(x)$".

Gérard Vergnaud (2002) soutient en outre que

> parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques. (Op cité)

Dans ce qui suit, nous allons illustrer cette complexité dans le cas des phénomènes d'anaphore en lien avec la quantification implicite des énoncés conditionnels. Le premier exemple est un exemple classique en sémantique formelle. Le second exemple est issu de mon travail de thèse (Durand-Guerrier 1996).

II. UN EXEMPLE CLASSIQUE D'ANAPHORE : LES *DONKEY SENTENCES*

Dans ce qui suit, nous reprenons la définition donnée par Corblin (2002) :

> Une anaphore est une expression linguistique qui reprend ou renvoie à une entité déjà introduite dans une phrase antérieure. Cette entité (mot, idée, etc.) s'appelle l'antécédent » ; ceci se manifeste en général par ce que l'on peut appeler une reprise de pronom. Ce phénomène est connu en sémantique formelle et analysé dans le cadre du paradigme des « *Donkey sentences* » (Op cité, p. 91)

L'exemple classique qui a donné son nom à ce paradigme est le suivant :

« Si *un fermier* possède *un âne*, alors *il le* bat » (1)

Dans cette phrase, le pronom « *il* » dans le conséquent renvoie à « *fermier* » dans l'antécédent, tandis que l'article « *le* » renvoie à « *âne* » ; on a donc une double reprise, avec un pronom sujet « *il* » et un pronom complément « *le* ».

La question qui se pose alors est celle de la manière dont on peut formaliser cet énoncé à l'aide des catégories logiques mentionnées plus haut et des quantificateurs. Un premier travail consiste à identifier les propriétés et/ou les relations en jeu : Corblin identifie deux propriétés « *être un fermier* » : nous noterons $F(x)$ la phrase ouverte « x est un fermier », et « *être un âne* » : nous noterons $A(y)$ la phrase ouverte « y est un âne ». Pour formaliser l'expression « *un fermier possède un âne* », on va recourir à une relation binaire $P(x,y)$ De même, on va recourir à une relation binaire $B(x,y)$ pour traduire « *un homme bât un âne* ». Le parcours des variables x et y est une population contenant à la fois des fermiers et des ânes. Le deuxième travail consiste à identifier la nature des quantifications en jeu, ce qui est rendu complexe par le fait que, en français, l'article indéfini « *un* » peut avoir plusieurs interprétations selon les conditions d'énonciation. Ainsi l'indéfini « *un* » peut selon les cas :
1/ désigner un élément singulier : *un chat* blanc dort sur le canapé ; 2/ exprimer l'existence d'au moins un élément : j'ai entendu *un chat* miauler ; 3/ avoir une valeur générique, au sens de n'importe lequel : *un chat* est un compagnon fidèle ; 4/ exprimer une quantification universelle implicite : si *un chat* tombe, il se remet sur ses pattes, que l'on peut reformuler en : *Tout chat* qui tombe se remet sur ses pattes.

Il n'est pas toujours facile de déterminer quelle est l'interprétation adéquate de l'article indéfini « *un* » dans une phrase en langue naturelle : par exemple, si vous dites « *un chat* ronronne » vous pouvez selon les contextes *faire référence à un chat particulier*, *affirmer l'existence d'un chat qui ronronne dans votre environnement* ou encore *exprimer une propriété satisfaite par tous les chats*. On peut voir là un effet de la sensibilité au contexte qui porte sur *l'interprétation des énoncés* comme le souligne Rebuschi qui note que « le contexte n'intervient pas seulement sur l'extension des expressions dans un domaine donné, il modifie le domaine de quantification. » (Rebuschi, 2008, p.120).

Revenons maintenant à notre exemple de *Donkey sentence*. Nous avons deux fois l'article indéfini « *un* ». Selon Corblin (2002), l'interprétation adéquate de « *un* » devrait être ici « *il existe* », ce qui conduirait à l'énoncé

« *si* Il existe x tel que [x est un fermier et il existe y [y est un âne et x possède y], *alors* x bat y » (2)

ou encore

$\exists x\big[[F(x) \wedge (\exists y A(y) \wedge P(x,y))]\big] \Rightarrow\ B(x,y)$ (2')

Corblin note que cette formalisation n'est pas satisfaisante : en effet, x et y sont liées dans l'antécédent, et libres dans le conséquent, si bien que l'anaphore n'est pas traduite dans la formalisation. Il propose alors, pour permettre le liage, de mettre les quantificateurs en tête de formule. Il propose alors la formule

$\exists x \exists y\ [(F(x) \wedge A(y) \wedge P(x,y)) \Rightarrow\ B(x,y)]$ (3)

A nouveau, cette formalisation ne convient pas ; en effet, la phrase initiale a une portée universelle (op. cit. p. 92)

Corblin ne mentionne pas une autre possibilité qui semblerait sans doute plus naturelle à un mathématicien, à savoir considérer que, compte tenu de ce que l'on a un énoncé conditionnel, le premier « *un* » correspond à une quantification universelle implicite, tandis que le second renvoie à une quantification existentielle, ce qui en reformulant donne la phrase « Pour tout fermier, s'il existe un âne que ce fermier possède, alors ***ce*** fermier bât *cet* âne. »
« Pour tout x, s'il existe y tel que $F(x)$ et $A(y)$ et $P(x,y)$, alors $B(x,y)$ » (4)

Cependant, cette formulation permet bien de rendre compte de la première anaphore sur « *un fermier* », mais ne permet pas de rendre compte de l'anaphore sur « *un âne* » puisque la variable y est liée dans l'antécédent, et libre dans le conséquent : la variable y qui est muette dans l'antécédent ne permet pas de faire une attribution d'objet, que l'on pourrait reprendre dans le conséquent. Comme l'indique Corblin, il faut modifier la portée du quantificateur existentiel en le plaçant en tête de formule.
Une première solution consiste à simplement déplacer le quantificateur existentiel pour produire l'énoncé ci-dessous

« Pour tout x, il existe y tel que *si* ($F(x)$ et $A(y)$ et $P(x,y)$, *alors* $B(x,y)$ » (5)

Mais cette formulation n'est pas satisfaisante. En effet, d'une manière générale, pour chaque fermier, on peut trouver un âne que cet homme ne possède pas, et pour un tel couple l'énoncé est vrai quel que soit l'interprétation de $B(x,y)$, si bien que l'énoncé (2) ne capture pas la signification de l'énoncé initial.

On va finalement choisir une troisième forme en remplaçant le quantificateur existentiel par un quantificateur universel

« Pour tout x, pour tout y, (*si* $F(x)$ et $A(y)$ et $P(x,y)$, *alors* $B(x,y)$ » (6)

ou encore

$\forall x \forall y[(F(x) \wedge A(y) \wedge P(x,y)) \Rightarrow\ B(x,y)]$ (6')

qui est la manière standard de formaliser les Donkey sentences en logique du premier ordre (Corblin, op. cit. p. 91)

Selon Davidson (1993), comprendre un énoncé, c'est savoir ce qui est le cas lorsqu'il est vrai ; corrélativement, c'est pouvoir reconnaître les cas dans lequel il est faux. L'énoncé (6) capture la signification de la phrase initiale au sens suivant : chaque fois que l'on considère un couple (Fermier, Ane), on peut regarder s'il vérifie l'antécédent et le conséquent. Dans le cas où on trouverait un couple vérifiant l'antécédent et pas le conséquent, on pourrait en déduire que l'énoncé proposé est faux.

On pourrait penser que ce type de phénomène est spécifique de la langue naturelle et a peu de chance d'apparaître en mathématiques. Je donne dans ce qui suit un exemple mettant en évidence que ces phénomènes d'anaphore sont également présents en mathématiques et qu'ils interrogent la pratique habituelle de quantification implicite des énoncés conditionnels. En effet, comme on a pu le voir ici, la restitution de la quantification dans l'énoncé ne va pas de soit, et selon les choix faits, ceci change les conditions de vérité de l'énoncé et partant sa signification.

III. UN EXEMPLE EN ANALYSE

L'exemple analysé ici est tiré de notre thèse (Durand-Guerrier 1996). Les résultats obtenus datent de plus de 20 ans. Le même énoncé a été donné par J. Njomgang-Ngansop à des étudiants camerounais dans le cadre de sa thèse ; les résultats obtenus sont très proches de ceux que nous présentons ci-dessous (Njomgang Ngansop 2013, p. 381).

Il s'agit du quatrième item d'un questionnaire visant à identifier si les étudiants savent dans quelles conditions il est possible ou non de faire une déduction, à partir d'un énoncé conditionnel affirmé.

> Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite définie par récurrence sous la forme :
> « $u_{n+1} = f(u_n)$ » où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a alors le résultat suivant :
> Enoncé 4 : Si la suite (u_n) converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation (E) : « $f(x) = x$ ».
> Questions :
> Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :
> a) L'équation (E) n'a pas de solution?
> b) L'équation (E) a au moins une solution?
> Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de (E) si :
> c) la suite (u_n) converge?
> d) la suite (u_n) ne converge pas?

Figure 1 - *Item A4 issu de Durand-Guerrier (1996)*

1. *Structure logique de l'énoncé et phénomène d'anaphore*

Considérons l'énoncé proposé aux étudiants

Si la suite (u_n) converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation (E) : « $f(x) = x$ » (1)

Cet énoncé fait intervenir trois types d'objets mathématiques distincts: une suite numérique ; un réel et une équation; avec présence d'une fonction numérique comme objet intermédiaire articulant la suite et l'équation. Dans l'énoncé tel qu'il est donné, la fonction *f* a « disparu » de l'antécédent pour réapparaître dans le conséquent. On aurait d'ailleurs pu aussi la faire disparaître du conséquent en définissant E auparavant. On pourrait également ne pas introduire la lettre L, on aurait alors l'énoncé « minimal » suivant :

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est solution de l'équation E » (2)

ou encore

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction *f*. » (3)

Dans chacune de ces trois formes, on peut identifier un phénomène d'anaphore. Il est clairement visible dans l'énoncé (1) où la reprise porte sur la lettre *L*.

Dans les énoncés (2) ou (3), le phénomène est moins clair dans la mesure où la limite n'apparait pas explicitement dans l'antécédent, absorbé dans l'expression « (u_n) converge » ; elle réapparaît si l'on remplace « la suite (u_n) converge » par « la suite (u_n) admet une limite », ou encore par la définition explicitant la quantification existentielle : « il existe un réel *L* tel que la suite (u_n) converge vers *L* »

Les propriétés en jeu sont : $U(x)$: « *x* est une suite » - $F(y)$: « *y* est une fonction numérique » – $R(z)$: « *z* est un réel ».

Les relations en jeu sont : $I(x, y)$: « x est définie par récurrence à partir de y » : où x parcourt l'ensemble des suites définies par récurrence et y parcourt l'ensemble des fonctions numériques ; $C(x, z)$: « x converge vers z » où x parcourt l'ensemble des suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction numérique, et z parcourt l'ensemble des réels et la relation binaire P(z, y) « être un point fixe de » où z parcourt l'ensemble des réels et y parcourt l'ensemble fonctions numériques.

Une formalisation possible rendant compte de ces propriétés et relations est la suivante

$$\text{Pour tout } x, [\text{si } [U(x) \text{ et } \exists y\ (F(y) \text{ et } I(x, y)) \text{ et } \exists z\ (R(z) \text{ et } C(x, z))], \text{ alors } P(x, z)] \quad (4)$$

Cependant, comme on l'a vu dans les exemples précédents, ceci ne permet pas de rendre compte des phénomènes d'anaphores. Les analyses faites précédement pour les *Donkey sentences* montrent que pour formaliser ces énoncés en restituant la quantification, il faut mettre trois quantificateurs universels en tête de formule. On obtient l'énoncé suivant

$$\forall x, \forall y, \forall z\ [(U(x) \text{ et } F(y) \text{ et } R(z) \text{ et } I(x, y) \text{ et } C(x, z)) ==> P(z, y)] \quad (5)$$

Néanmoins, pour répondre aux questions posées dans l'exercice, on pourrait utiliser une version de l'énoncé faisant disparaître complètement la limite, sous la forme

« si la suite u converge, alors la fonction f a un point fixe » (6)

qui peut se formaliser en introduisant les propriétés « converger » pour les suites, notéee Γ, et « avoir un point fixe pour les fonctions numériques », notée Φ :

$$\forall x, \forall y,\ [[U(x) \text{ et } F(y) \text{ et } I(x, y) \text{ et } (\Gamma(\mathrm{x})] ==> \Phi(\mathrm{y})] \quad (7)$$

Dans les questions, l'énoncé de référence est celui où apparaît la limite que nous avons formalisé par (5). On se place dans le cas où les prémisses U(x), F(y), R(z) et I(x, y) sont vérifiée. On en déduit que l'énoncé ∀x, ∀y, ∀z « C(x, z) ==> F(z, y) » est vrai. C'est l'énoncé à partir duquel vont se faire les déductions.

2. *Motivations pour le choix de cet énoncé*

A l'époque de l'expérimentation (1992), cet énoncé est en général rencontré dès le lycée. On peut lire par exemple dans la brochure des programmes de mathématiques des classes de seconde, première et terminales de 1989 éditée par le Ministère de l'éducation nationale, dans le paragraphe consacré aux suites, à la rubrique travaux pratiques (p.129) :

« Exemples d'études du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et d'approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.	Toute étude de ce type de suite devra comporter des indications sur la méthode à suivre. »

***Figure 2**- extrait des programmes de mathématiques Classes de seconde, première et terminales de 1989*

3. *Quelques réponses d'étudiants arrivant à l'université*

Nous avions recueilli et analysés 293 questionnaires. La réponse exacte pour les quatre items a, b, c, d pris dans cet ordre était codée 2 3 1 3 : (a : la suite u ne converge pas ; b on ne peut pas savoir si u converge ou non; c : l'équation (E) a au moins une solution; d : on ne peut pas savoir si (E) a ou non des solutions). Nous avons montré lors de l'analyse a priori que cet item a une structure logique complexe et l'on peut s'attendre à des difficultés de traitement, ce qui est confirmé par les résultats obtenus. Cet énoncé se révèle en effet pour beaucoup d'étudiants d'un maniement délicat. D'une part, les objets mathématiques en jeu sont complexes, les suites en particulier sont rarement maîtrisées à l'arrivée à l'université. D'autre part, un trait saillant de la limite d'une suite est l'unicité, on peut penser que pour un certain nombre d'étudiants, cette unicité « se transmettra » à l'équation.

L'intérêt de cet énoncé est très grand du point de vue de l'heuristique dans le traitement des suites définies par récurrence : en effet, pour déterminer les valeurs possibles pour une limite éventuelle d'une telle suite, il est pertinent, lorsque c'est possible, d'étudier l'équation associée. Lorsque celle-ci n'a pas de solution, on peut affirmer sans recherche supplémentaire que la suite correspondante ne converge pas (question a). Lorsque la suite a au moins une solution (question b), il y a des « candidats » pour la limite; on peut alors faire des investigations pour savoir si l'un de ces candidats convient, et si oui lequel. Les raisonnements en jeu dans ce type de résolution sont complexes et ne peuvent pas être totalement algorithmisés, ce qui serait le cas si l'existence de la limite correspondait au seul cas d'une solution unique pour l'équation; ils nécessitent en particulier la capacité de reconnaître que la vérité du conséquent ne permet pas d'inférer celle de l'antécédent; nous avons ici un exemple illustrant l'importance de ce type d'étude pour l'activité mathématique. Nous indiquons ci-dessous les résultats obtenus dans l'expérimentation de 1992-1993.

	A4a	A4b	A4c	A4d
Réponse type 1	0%	52%	**79,1%**	0,4%
Réponse type 2	**81,3%**	2,9%	0,4%	53,4%
Réponse type 3	5,9%	**19,8%**	2,2%	**18,7%**
Réponse type 9	10,6%	21,6%	15,8%	22%
Non réponse	2,1%	3,7%	2,6%	5,5%

Figure 3 – les résultats à l'item 4 (Durand-Guerrier, 1996)[243]

Il apparaît immédiatement que pour la réponse attendue positive (obtenue par application du Modus Ponens) et négative (application du Modus Tollens), le taux de réussite est élevé. Il n'en est pas de même pour les deux items où la réponse attendue est de type 3 (on ne peut pas savoir) pour lesquels les taux de réussite sont faibles (moins de 20%). Dans les deux cas, la réponse obtenue en considérant la règle comme une équivalence a un score supérieur à 50% et la réponse codée 9 (autres réponses) un score supérieur à 20%, la quasi totalité des réponses se répartit entre les catégories 1, 3 et 9 pour les deux items à prémisse positive et entre les catégories 2, 3 et 9 pour les deux items à prémisse négative.

Nous avions demandé aux étudiants de justifier soigneusement leurs réponses. Certains l'on fait, nous donnant accès à leurs interprétations. Nous présentons ci-dessous quelques réponses que nous pouvons mettre en relation avec les phénomènes d'anaphore mis en évidence dans l'analyse *a priori*. Nous avons retenus ceux pour lesquelles la lettre L est en jeu.

Pour certains étudiants, L est considéré comme désignant un élément donné comme dans la copie 141 :

> A4b : Si l'équation a au moins une solution, cette solution peut être L, ou ne pas être L. Nous ne pouvons pas conclure sur la convergence de cette suite.

[243] Les pourcentages pour les réponses exactes sont en gras et soulignés

A4d : Si la suite ne converge pas, il est possible que E ait une ou plusieurs solutions, mais aucune de ces solutions n'est *L*.

L'étudiant pourrait avoir considéré que l'on a introduit un élément *L* dont on parle dans l'énoncé.

Ceci est encore plus clair dans la copie 83 :

A4a : Si E : « $f(x) = x$ » n'a pas de solutions alors la suite (u_n) ne converge pas vers *L* mais elle peut converger vers une autre valeur L'.

A4b : Si (E) admet au moins une solution, alors cette solution est *L* et la suite converge vers *L*. Dans ce cas lim $u_n = L$.

A4c : Si la suite (u_n) converge, il existe au moins une solution à l'équation et cette solution est *L*.

Dans ce cas, l'existence d'une solution semble assurer l'unicité de la solution, malgré l'utilisation de l'expression « au moins ».

On peut mettre en regard cette copie avec la copie 17 dans laquelle l'unicité de la solution de l'équation apparaît comme une condition nécessaire pour la convergence de la suite *u*, la lettre *L* semblant ici aussi être considérée comme étant donnée :

A4b : si l'équation (E) a une seule solution, c'est *L* et la suite (u_{n}) est convergente en *L*. Si l'équation (E) a plusieurs solutions la suite (u_{n}) n'est pas convergente car on ne peut converger qu'en un seul point.

Dans certaines copies, les étudiants semblent considérer que l'énoncé affirme que la suite *u* converge vers *L* et par suite cherchent à résoudre la contradiction entre cette affirmation et le fait que l'équation n'a pas de solution, comme dans la copie 258 :

A4a : La suite (u_n) converge vers *L* mais sans jamais atteindre la valeur *L*.

4. *Quelques commentaires*

Ces quelques exemples montrent que certains étudiants éprouvent des difficultés à manipuler la lettre *L* dans cet item. On peut observer que dans les réponses citées ci-dessus, le statut de *L* est celui de nom propre, plutôt que celui de variable dans le champ d'un quantificateur universel. Ceci rentre en conflit avec la dissymétrie entre l'unicité de la limite d'une suite convergente et la possibilité pour l'équation associée d'avoir plusieurs solutions, cette dissymétrie étant cachée par l'usage de la lettre *L*. Même s'il est clair que d'autres éléments interviennent dans les difficultés des étudiants : insuffisante maîtrise des objets en jeu – difficultés pour reconnaître les cas dans lesquels on peut faire une déduction à partir d'un énoncé affirmé, l'hypothèse de l'impact des phénomènes d'anaphore mis en évidence ne peut selon nous pas être écartée *a priori*. Les expérimentations conduite dans sa thèse par Judith Njomgang-Ngansop (2013) confortent cette hypothèse. Nous devons préciser que lorsque nous avions proposé cet item, nous n'avions pas mesuré la complexité de la structure logique. Ce sont les réponses des étudiants qui nous ont amené à étudier de manière plus précise la structure logique de l'énoncé. Les discussions en sémantique formelle sur les phénomènes d'anaphores apportent un premier éclairage qui nécessite d'être approfondi.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'analyse logique du langage permet de questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, en particulier parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites. Par ailleurs, comme on l'a vu, lorsque les étudiants sont confrontés à des cas où les règles d'inférences ne s'appliquent pas, il doivent faire appel à leurs connaissances mathématiques. Les étudiants qui reconnaissent ces cas, cherchent parfois à donner une réponse « malgré tout » (c'est-à-dire ne se contentent pas de répondre *on ne peut pas savoir*) ; ils sont alors amenés à expliciter leurs connaissances relativement aux objets en jeu. De ce fait, certaines réponses pourraient servir pour étudier ou illustrer les conceptions des élèves et des étudiants sur ce type de suites. Ceci confirme la pertinence du calcul des prédicats pour étudier le raisonnement mathématique; en effet, comme nous l'avons déjà dit, dans ce modèle, pour décider de la vérité d'un énoncé lorsque les règles d'inférence classiques ne s'appliquent pas, le sujet est renvoyé aux objets en jeu, à leurs propriétés et aux relations éventuelles entre objets.

Dans nos travaux, nous faisons l'hypothèse que les outils offerts par les travaux en sémantique formelle sont susceptibles de nous aider à mieux comprendre les effets des difficultés qui relèvent de la structure logique des énoncés sur les apprentissages mathématiques.

Les exemples traités plus haut montrent que le repérage des anaphores pourrait permettre de déterminer plus rapidement les choix de formalisation permettant de capturer la signification des énoncés conditionnels implicitement quantifiés. En effet, la présence d'une anaphore induit des conditions sur le statut logique des lettres (une lettre muette ne peut pas faire l'objet d'une reprise car elle ne peut rien désigner). Une piste de recherche que nous souhaitons développer concerne l'analyse du discours des mathématiciens en position d'enseignants, du point de vue du traitement des questions du statut logique des lettres et des énoncés et des questions de quantification, en particulier en contexte plurilingue. Nous faisons l'hypothèse que l'analyse logique et la formalisation peuvent offrir une référence commune en situation d'enseignement plurilingue, lorsque la langue d'instruction n'est pas la langue maternelle, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement supérieur et ce quel que soit les pays considérés. (Durand-Guerrier & al., à paraître). Nous ne sous-estimons pas néanmoins les difficultés d'appropriation d'un tel outil par des enseignants le plus souvent peu formés en logique.

REFERENCES

Corblin F. (2002) *Représentation du discours et sémantique formelle*, Paris : PUF

Davidson, D. (1993) *Enquête sur la vérité et l'interprétation*, éditions Jacqueline Chambon

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de l'Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherche sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches, Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V., Kazima M., Libbrecht P.-J., Njomgang-Ngansop J. L., Salekhova L. N., Tuktamyshov N., Winslow C. (2015) Challenges and Opportunities for Second Language Learners in Undergraduate Mathematics. In Barwell et al. (Eds.) *Mathematics and Language Diversity, the 21st ICMI Study* (pp.85-101). Springer.

Njomgang-Ngansop J. (2013) *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun,* Thèse en cotutelle des Universités Lyon 1 et Yaoundé 1.

Rebuschi M. (2008) *Qu'est-ce que la signification* ? Paris : Vrin.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3), 133-170

Vergnaud G. (2002) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In Portugais J. (Ed.) *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique* *des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*. Actes du colloque GDM 2001, 6-27.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

EVOLUTION DU PROCESSUS DE CONSTRUCTION DE LA SIGNIFICATION MATHÉMATIQUE DE LA FONCTION « COSINUS » À TRAVERS L'ÉTUDE DES SIGNES LANGAGIERS UTILISÉS

Faten KHALLOUFI-MOUHA*

Résumé – En se plaçant dans le cadre de l'approche théorique de la médiation sémiotique et en admettant l'hypothèse que le langage est l'outil le plus important pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra- psychologique, nous étudions dans ce travail l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus », à travers l'étude de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri.

Mots-clefs : Théorie de la médiation sémiotique, signes langagiers, outil de médiation sémiotique, signification mathématique, discussion collective, artefact technologique.

Abstract – Using the theoretical approach of the semiotic mediation, this work is aimed to study the evolution from students' personal meanings to mathematically shared meanings in a teaching experiment integrating a technological artefact. We focus on the evolution of linguistic signs elaborated and used by the students and the teacher in order to identify the evolution the constructional process of significance of trigonometric function among the pupils.

Keywords: theory of the semiotic mediation, verbal signs, the construction of mathematical significance, collective discussions, the technological artefact.

I. INTRODUCTION

Les fonctions trigonométriques sont les premières fonctions périodiques et transcendantes enseignées au niveau du secondaire. L'une des sources de difficultés relative à l'enseignement et l'apprentissage de cette notion est la complexité épistémologique due à son introduction comme objet mathématique faisant partie du cadre de l'analyse en omettant ses liens avec le cadre géométrique de la trigonométrie (Khalloufi-Mouha & Smida 2012, p. 207). C'est ce qui nous a motivé à construire une ingénierie didactique permettant aux élèves d'appréhender le lien entre les aspects géométrique et fonctionnel de cette notion, en nous appuyant sur des travaux portant sur la notion de fonction (Sierpinska 1992 ; Falcade 2006 ; Falcade, Laborde et Mariotti 2007 ; Tall 1996). Nous avons choisi d'approcher les fonctions trigonométriques en tant que *covariation* c'est-à-dire en tant que *relation dynamique et asymétrique entre deux variations l'une dépendante de l'autre*. Cette approche nécessite la mise en place d'une expérience qualitative de la dépendance fonctionnelle en trigonométrie, qui fait appel aux

* Faculté des Sciences de Bizerte – TUNISIE – fkhalloufi@yahoo.fr

Khalloufi-Mouha F. (2015) Évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers l'étude des signes langagiers utilisés. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 741-751.

lignes trigonométriques, et à l'idée de mouvement, première représentation de la variation dans l'espace et dans le temps. Dans cette perspective, certains travaux (Falcade, Laborde et Mariotti 2007, Tall 1996) considèrent qu'il est important de faire appel à un environnement de géométrie dynamique, qui permet d'analyser les relations géométriques en termes de relations de dépendance fonctionnelle.

En nous plaçant dans la lignée de ces travaux, nous avons construit une séquence expérimentale d'enseignement intégrant l'environnement de géométrie dynamique Cabri, dans le but d'étudier l'impact de cette intégration sur le processus de construction des connaissances mathématiques mises en jeu et sur les stratégies de communication utilisées par l'enseignant pour guider les élèves dans cette construction. La conception de cette expérimentation s'inscrit dans le cadre d'une perspective vygotskienne de médiation sémiotique, laquelle stipule que le langage est l'outil le plus important pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra-psychologique. En effet, d'après Vygotsky (1938) le langage, en tant que système sémiotique de représentation, ne permet pas seulement de représenter la pensée comme fonction psychique supérieure, mais aussi de la maîtriser.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des phases de travail par binômes et de discussions collectives (Bartolini-Bussi 1996) dans le processus de construction de la signification mathématique de la fonction cosinus par des élèves de 2^{e} année de l'enseignement secondaire tunisien (16-17 ans)

II. NOS APPUIS THEORIQUES

Cet article se place dans le cadre théorique de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008). C'est une approche d'inspiration vygotskienne, reposant sur l'hypothèse que l'activité d'enseignement est une activité médiatisée. Cette approche vise la transposition du concept de médiation sémiotique dans le domaine de la didactique (Bartolini Bussi & al. 2003) et considère le processus de construction des connaissances comme une conséquence d'une activité instrumentée où différents types de signes (langagiers, gestuels, symboliques, etc.) émergent et évoluent à travers les interactions sociales. Elle offre un cadre théorique qui permet l'étude de l'utilisation des artefacts dans le domaine de l'enseignement en tant qu'instruments de médiation sémiotique. En effet, un artefact peut être exploité par l'enseignant comme un outil de médiation sémiotique permettant de développer les signes mathématiques à partir de signes qui se détachent de l'utilisation de l'artefact, mais qui maintiennent néanmoins avec l'artefact un lien sémiotique (Mariotti 2009). Le potentiel sémiotique d'un artefact représente le double lien qui peut s'établir, d'une part, entre l'artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation et, d'autre part, entre cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissables comme telles par un expert (Mariotti & Maracci 2010). Selon cette théorie, l'artefact entretient donc un double lien sémiotique : un premier lien *artefact/tâche* et un deuxième lien *artefact/connaissance mathématique*. Le lien entre *artefact/tâche* concerne le fait qu'un artefact permet d'accomplir une tâche spécifique. Cela favorise l'émergence des significations personnelles qui s'expriment essentiellement par des signes artefact (Bartolini Bussi & Mariotti 2008), constitués majoritairement de mots et d'expressions langagières. Le lien *artefact/connaissance mathématique* s'exprime par les signes mathématiques et revient à ce que tout artefact utilisé dans un objectif d'apprentissage est relié à une connaissance mathématique spécifique. La construction d'un lien entre les signes artefact et les signes mathématiques n'est ni spontanée ni triviale pour les élèves et peut constituer un objectif d'enseignement.

Selon la théorie de la médiation sémiotique, ce processus sémiotique de l'émergence et de l'évolution des signifiés personnels vers la signification mathématique visée par l'enseignement est réalisable à travers la construction et la mise en place d'une organisation didactique spécifique appelée le cycle didactique (Bartolini-Bussi & Mariotti 2008). C'est un cycle articulant trois types d'activités. Des activités faisant appel à l'artefact pour la résolution par les élèves (regroupés par binômes ou en petits groupes) de tâches spécifiques. La rédaction de rapports individuels à propos des activités élaborées dans la classe, favorisant la production individuelle des signes. Des discussions collectives orchestrées par l'enseignant qui constituent un contexte social favorisant la confrontation entre les différents signifiés personnels des élèves, en vue d'aboutir à la construction de la signification mathématique visée. Ces discussions peuvent atteindre le statut de discussions mathématiques au sens de Bartolini Bussi (1996).

III. PRESENTATION DE LA SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

1. *Présentation et objectifs de la séquence*

Dans l'objectif d'introduire les fonctions trigonométriques à travers une articulation entre le cadre géométrique de la trigonométrie et le cadre fonctionnel, nous avons choisi de faire appel aux lignes trigonométriques et à l'idée de mouvement, première représentation de la variation dans l'espace et dans le temps, en faisant appel à l'environnement Cabri qui permet d'interpréter les relations géométriques en termes de relations de dépendance fonctionnelle.

Dans la construction de la séquence d'enseignement, nous avons cherché à organiser un milieu d'apprentissage permettant de construire des fonctions géométriques, à l'aide des outils déplacement et trace de l'environnement Cabri qui relient les objets géométriques de Cabri (cercle trigonométrique, arc de cercle, angle…). Le passage aux fonctions trigonométriques se fera alors grâce à la notion de mesure (mesure d'angle, mesure d'arc, mesure d'un segment, abscisse d'un point…) qui permet de passer d'une variable *géométrique* à une variable *numérique*, en interprétant la variation (le déplacement) d'un point en tant que variation numérique de ses coordonnées ou d'une certaine mesure, via l'idée de covariation et de variable (Khalloufi-Mouha 2014).

La séquence est composée de quatre parties. Les deux premières parties font appel à la situation « poulie » (Genevès, Laborde & Soury-Lavegne 2005). Il s'agit d'une situation de modélisation dans Cabri d'une poulie et d'une ficelle qui peut être enroulée autour de la poulie, en utilisant l'outil déplacement. L'objectif est de construire, avec les élèves, l'idée de relation de dépendance fonctionnelle entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique. Nous supposons qu'il est important de matérialiser l'idée de cette relation entre la droite des réels et le cercle trigonométrique en faisant appel à l'idée d'enroulement qui consiste à enrouler la droite des réels sur le cercle trigonométrique. La situation poulie permet d'expérimenter l'enroulement dans un cadre géométrique fourni par l'environnement Cabri. En fait, la situation poulie permet de relier la mesure d'un arc du cercle qui représente la poulie, à une mesure rectiligne qui est celle de la ficelle. Ce résultat est très important mathématiquement pour l'introduction de la représentation graphique des fonctions trigonométriques et pour permettre aux élèves de construire un sens à la relation fonctionnelle entre la droite des réels et le cercle trigonométrique.

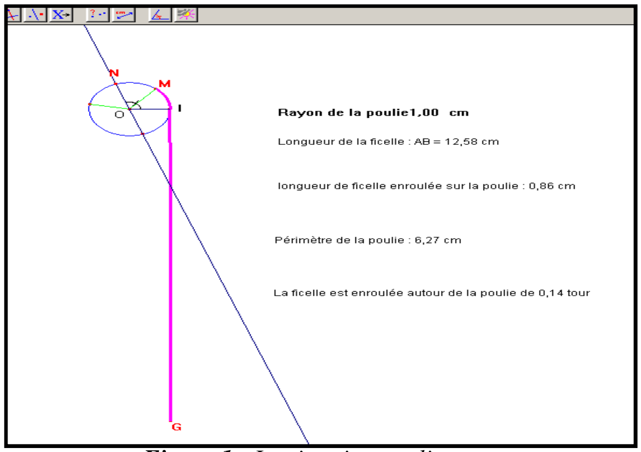

Figure 1 *- La situation poulie*

Dans la deuxième partie, l'utilisation de l'outil déplacement par l'enseignant vise à amener les élèves à associer à un réel quelconque *x* un point *M* sur le cercle trigonométrique, en reportant le nombre *x* sur le cercle trigonométrique. Nous faisons d'hypothèse que cette activité peut favoriser, chez les élèves, l'appréhension d'une relation fonctionnelle entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique.

Les troisième et quatrième parties sont basées sur le fonctionnement des outils déplacement et trace de Cabri comme outils de médiation sémiotique pour les notions de variation et de covariation, dans le but d'introduire la fonction cosinus et sa représentation graphique. Dans ces deux parties la situation poulie n'est plus utilisée.

Dans la troisième partie, l'idée de relation fonctionnelle entre la droite des réels et le cercle trigonométrique est réinvestie en faisant appel à l'outil déplacement et report de mesure de Cabri. L'objectif est d'amener les élèves à associer à un réel quelconque *x,* abscisse d'un point de l'axe des abscisses, un point *M* sur le cercle trigonométrique cela en utilisant l'outil report de mesure qui permet de reporter le nombre *x* sur le cercle trigonométrique. Par la suite la fonction « cosinus » est introduite comme la composée de cette fonction avec la fonction qui associe au point M son abscisse.

L'objectif de la quatrième partie est de visualiser en utilisant l'outil trace de Cabri, la variation de l'abscisse de M en fonction de la variation de x ce qui revient à représenter graphiquement la fonction « cosinus ».

2. *Mise en place de la séquence*

La séquence a été mise en place dans une classe de 16 élèves de 2e année (16-17 ans) d'un lycée secondaire de la région de Bizerte Tunisie. La séquence a eu lieu dans un laboratoire d'informatique où les élèves étaient placés par binômes. Chaque binôme utilise un ordinateur et est amené à produire une réponse commune. Un micro est placé afin d'enregistrer les interactions entre les deux élèves.

Signalons que les élèves participant à l'expérimentation ont une certaine familiarité avec l'utilisation de logiciels dans la classe notamment le logiciel Cabri et ont déjà étudié les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, ainsi que les lignes trigonométriques où le cosinus et le sinus sont introduits comme les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.

Différents types de données ont été recueillies (les productions des élèves, les fichiers Cabri, les rapports individuels, les enregistrements audio des différentes phases de travail et les rapports des observateurs). Les analyses qui suivent sont basées essentiellement sur les transcriptions des enregistrements audio, relatives à la phase de travail par binômes, ainsi qu'à la phase de discussion collective.

IV. METHODOLOGIE DE L'ETUDE DU PROCESSUS DE L'EVOLUTION DES SIGNIFIES DES ELEVES

L'étude du processus de construction de la signification mathématique de la notion de fonction « cosinus » est réalisée à travers l'analyse de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves lors des différentes phases du travail, ainsi que de la façon dont l'enseignant exploite ces signes. Pour ce faire, nous avons distingué deux plans d'analyse.

1. Premier plan d'analyse : les signes simples

Les signes simples sont les signes artefact, les signes pivots et les signes mathématiques. Dans nos analyses, nous avons repéré pour chaque notion mathématique visée les différents signes simples langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant, puis nous les avons classifiés selon la signification mathématique à laquelle ils renvoient. L'utilisation de cette classification permet, d'une part, d'analyser l'état évolutif des interventions de l'enseignant dans le processus de médiation sémiotique et, d'autre part, d'analyser l'évolution des signifiés personnels des élèves, relatifs à la notion visée et cela à travers l'identification des types de signes langagiers utilisés. En effet, le passage de l'utilisation de signes artefact vers l'utilisation de signes pivot, pour une notion donnée, sera interprétée comme une évolution dans la construction de la signification mathématique de cette notion. Par exemple, le passage de l'utilisation de signes artefact tels que « on augmente », « on enroule », « on déplace » pour désigner l'idée de « variation » ou de « variable indépendante » vers l'utilisation du signe pivot « varier » et par la suite vers le signe mathématique « variable » constitue une évolution dans la construction de la signification de variable chez les élèves.

2. Deuxième plan d'analyse : Les signes complexes

En admettant que la signification d'un signe est déterminée par la position qu'il occupe dans un système de signes plus complexe (Peirce, 1978) nous avons fait appel à un deuxième plan d'analyse, celui des signes complexes repérés dans les interventions des élèves ou de l'enseignant et relatifs à des relations entre familles de signes simples (Falcade, 2006). Falcade distingue quatre catégories de signes complexes : les caractérisations, les définitions, les interprétations et les instanciations.

Les caractérisations portent de façon plus ou moins implicite sur des signes mathématiques, des signes pivots ou des signes artefact et ont tendance à mettre en valeur quelques caractéristiques qui pourraient être interprétées en termes mathématiques. Néanmoins, les caractérisations ne sont pas de vraies définitions, parce que l'intervenant n'a pas l'intention de définir l'objet en question.

Les définitions portent sur un signe mathématique cible. Elles visent explicitement et intentionnellement à expliciter, préciser, délimiter son signifié. Elles ne sont pas des définitions au sens mathématique du terme mais constituent une « mise en mots » sur un objet qui était jusqu'alors inconnu ou peu connu.

Les interprétations portent sur l'établissement d'une correspondance entre deux familles de signes qui appartiennent à deux champs sémantiques différents.

Les instanciations sont des signes qui concernent l'établissement d'un lien interprétatif entre deux signes simples, où l'un est directement issu de l'activité dans l'artefact et est associé à un nom propre et l'autre est un signe mathématique cible.

L'analyse de ces signes permet également d'étudier l'évolution des signifiés personnels des élèves relativement à une notion mathématique. En effet, nous supposons que la première étape dans la construction d'un signifié peut se traduire par l'utilisation des signes complexes du type caractérisation, ou bien par l'utilisation de signes complexes du type définition. La deuxième étape dans la construction d'un signifié peut s'interpréter par l'utilisation des signes complexes du type instanciation et interprétation, qui reviennent à donner une interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact.

V. ÉTUDE DE L'EVOLUTION DU PROCESSUS DE CONSTRUCTION DE LA SIGNIFICATION MATHEMATIQUE

L'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de la séquence d'enseignement est un processus complexe et très articulé. Dans cet article, nous nous limitons à l'étude de l'évolution des signes langagiers relatifs à l'idée de relation fonctionnelle favorisant l'introduction de la fonction cosinus comme une relation de covariation. L'analyse des différents types de signes langagiers met en évidence quatre étapes marquant l'évolution des signifiés personnels des élèves relatifs à la notion de fonction trigonométrique. Ces étapes sont identifiées selon les signifiés personnels que nous avons dégagés à partir de l'analyse des interventions des élèves.

1. *Étape 1 : Reconnaissance de la variation géométrique et numérique*

Cette étape est marquée par l'utilisation de signes très attachés à l'activité avec l'artefact qui apparaissent essentiellement sous la forme de signes artefact relatifs à l'identification de l'idée de variation géométrique et numérique. La situation poulie a fourni un contexte pour une exploration dynamique de la notion de fonction trigonométrique en tant que covariation à travers l'utilisation de l'outil déplacement de Cabri. Cela s'est traduit dans les interventions des élèves par une importante utilisation de signes artefact tels que des verbes d'action décrivant l'utilisation de l'outil déplacement, et en grande partie relatifs au mouvement c'est-à-dire à la variation géométrique. Parmi ces signes citons « se déplacer », « déplacer », « bouger » et « varier » (lorsqu'il est utilisé comme un signe artefact pour décrire le déplacement d'un point ou d'un autre objet géométrique), « changer » (lorsqu'il désigne le changement de la position) « retourner » « enrouler » « partir », « arriver », « atteindre » et « prendre ». L'utilisation de l'outil déplacement a permis également aux élèves d'identifier des variations de type numérique comme la variation du rayon et la variation de la mesure de la ficelle enroulée autour de la poulie. Ces variations numériques sont des conséquences des variations géométriques puisqu'elles engendrent des variations au niveau des mesures (mesure d'angles, arc, longueurs, etc.) ou des abscisses de points du plan. Cette identification s'est traduite dans les interventions des élèves par l'utilisation de signes relevant du domaine numérique comme « augmenter », « diminuer », « varier » et « changer ». Cette première étape se caractérise également par l'utilisation de signes complexes décrivant la variation dans l'espace et dans le temps. Par exemple, nous avons relevé deux types de signes complexes : le signe caractérisation de la mesure d'un arc par la mesure de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie ; le signe interprétation de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie en tant qu'un arc de cercle (objet géométrique), ainsi qu'en tant que mesure d'un arc (objet numérique).

L'extrait suivant illustre un exemple de l'interprétation de la longueur de la ficelle enroulée autour de la poulie comme la longueur de l'arc.

Moufida : C'est la longueur de la ficelle enroulée.
Alaa : Oui on a voilà la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ c'est la longueur de la ficelle.
[…]
Alaa : Je dessine N sur le cercle et je la déplace.
[…]
Alaa : On a choisi des valeurs différentes de x…
Moufida : Et on a déplacé la ficelle de façon que M coïncide avec N sur le cercle.

2. *Étape 2 : Reconnaissance de la relation de covariation au niveau perceptif.*

Cette étape est identifiée à travers des interventions des élèves qui restent encore relatives au contexte de l'artefact mais qui attestent d'une généralisation et d'un premier détachement de l'artefact. Dans cette étape, nous avons repéré l'émergence du signe interprétation du déplacement en tant que variation géométrique ou numérique. Les interventions relevées montrent une élimination de la référence à l'espace et/ou au temps présente dans les signes artefact utilisés dans la première étape et un passage vers l'utilisation d'expressions telles que « *lorsque je déplace le point M, la mesure de l'arc varie* ». Les élèves arrivent également à reconnaitre le lien entre deux variations. Cela apparait à travers l'utilisation d'expressions tels que « quand X varie alors Y varie » ou comme « si X varie alors Y varie », attestant ainsi d'une reconnaissance de la variation indirecte.

3. *Étape 3 : interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact*

Cette étape se caractérise par l'utilisation de signes pivot comme « dépend de » ou « en fonction de » qui remplacent les expressions telles que « si X varie alors Y varie. », présentes dans l'étape précédente. Cette utilisation reflète la prise en considération par les élèves du lien fonctionnel entre les deux variables et constitue un indice d'une évolution au niveau des signifiés personnels relatifs à la notion variation et de covariation. Cette étape comporte également des signes complexes tels que des interprétations mathématiques de l'activité dans l'artefact, ce qui permet aux élèves d'évoluer dans la construction d'une signification mathématique de la notion de fonction trigonométrique (Khalloufi-Mouha 2012).

L'extrait suivant montre l'utilisation du signe pivot en « fonction de » de la part des élèves et met en évidence l'utilisation d'un signe complexe « *N : Oui si je change N alors la mesure de l'angle $\widehat{ION}$change.* » qui atteste l'établissement d'une relation de dépendance entre la mesure de l'angle et la mesure de l'arc. Nous interprétons ceci comme une tentative d'interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact.

N : Oui si je change N alors la mesure de l'angle$\widehat{ION}$change.
I : Fais varier N puis mets le M sur le N. Tu vas trouver l'arc... mesure l'arc.
N : L'arc en fonction de l'angle ?
I : Avec la ficelle...encore...encore...voila c'est le double.
N : Oui ça devient plus grand. Si je fais l'angle$\widehat{ION}$ le double on a la mesure de l'arc c'est le double.
I : Donc l'arc varie en fonction de l'angle.

L'extrait renvoie également à une interprétation de la simultanéité de la variation de l'angle et de l'arc suite au déplacement comme une relation de dépendance fonctionnelle cela reste cependant au niveau très attaché à l'artefact.

Signalons que dans cette troisième étape, certains binômes sont arrivés à l'interprétation de façon spontanée alors que, pour certains binômes, l'interprétation de la simultanéité de la variation dans Cabri en termes de relation fonctionnelle n'était pas immédiate et a nécessité l'intervention de l'enseignant, à travers la mise en place de discussions locales avec le binôme. Ces discussions correspondent aux phases de mini-discussion collective (Khalloufi-Mouha, 2009) et sont déclenchées suite à l'apparition d'un blocage ou d'une déviation importante de l'objectif de travail lors de la phase de travail par binôme. Elles constituent l'occasion d'une confrontation entre les signifiés personnels ayant engendré le blocage des élèves et la signification mathématique de la notion mathématique visée. Dans ces phases, l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact afin de faire évoluer la situation. Il utilise des signes artefact ainsi que des signes pivot. Il s'appuie sur l'activité avec l'artefact pour amener les élèves à dépasser certaines difficultés et engendre alors un changement au niveau des significations construites.

4. *Etape 4 : Définition mathématique de la fonction « cosinus »*

Trois types de relations fonctionnelles marquent cette étape qui mène à l'introduction de la signification mathématique de la fonction cosinus en tant que relation entre deux variations. Les élèves sont amenés à identifier et construire trois types de fonctions en se basant sur l'interprétation de la simultanéité du déplacement dans Cabri comme une relation de dépendance fonctionnelle qui a fait l'objet de l'étape précédente :

- identification et construction de relation de dépendance fonctionnelle entre des variables géométriques (fonctions géométriques Laborde & Mariotti 2002) :
- identification et construction de relation de dépendance fonctionnelle entre une variable géométrique et une variable numérique (fonction numérico-géométrique et fonction géométrico-numérique :
- identification et construction de la relation de dépendance fonctionnelle entre deux variables numériques en s'appuyant sur les deux types de fonctions précédentes.

Ces constructions font l'objet des activités proposées et sont guidées par l'enseignant lors des phases de mini-discussion et de la phase de discussion collective. Au cours de ces constructions, l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact et lui donne une interprétation mathématique. Pour l'enseignant, l'environnement Cabri joue le rôle d'un milieu sur lequel il se base pour introduire la signification mathématique de la fonction cosinus. L'enseignant part donc d'une expérience pratiquée par tous les élèves, pour d'abord étendre la métaphore au-delà de la longueur de la ficelle et de l'idée de l'enroulement, et pour passer ensuite de cette métaphore à l'idée de variation et de covariation, puis à l'introduction de la fonction « cosinus ».

Cette étape se caractérise par l'apparition d'une utilisation, de la part des élèves, de signes mathématiques relatifs à la classe de fonction, essentiellement lors de la discussion collective. Parmi ces signes, il y a des signes introduits par l'enseignant puis utilisés par les élèves, comme par exemple « fonction », « relation » « la fonction cosinus », « associe », etc. Nous avons également repéré des formulations de type mathématiques comme par exemple *« La fonction f qui associe le point M du cercle au point N. »*

L'extrait suivant décrit un exemple de la guidance de l'enseignant dans une phase de mini-discussion et la figure correspondante.

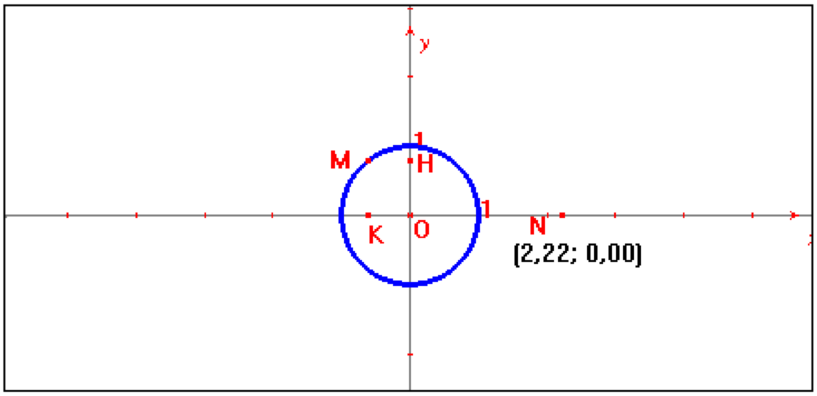

Figure 2 *- la figure relative à la troisième partie de la séquence*

I : nous n'avons pas compris qu'est ce que nous devons faire ?
Prof : regardez. Si je change *x*, qu'est ce qui va varier en fonction de *x* ?
I : est ce que c'est une fonction que nous devons définir ?
Prof : oui. Nous cherchons à définir une fonction. Regardez. Que faut-il faire pour varier *x* ?
N : il faut déplacer le point *N*
Prof : Si la position de *N* change, qu'est ce qui va changer ?
N : la position de *M*.
Prof : Alors, est-il possible de définir une fonction ?
I : Oui, la fonction qui associe *M* à *N*.
Prof : Ok, comment peut ont décrire cette fonction ?
I : la fonction *f* de *IR* à *C* (le cercle trigonométrique)……qui associe *M* à *x*….non qui associe *M* à *N*.
N : La fonction *f* qui associe le point *M* du cercle au point *N*.
Prof : Bien, qu'est ce qui change si je déplace *N* ?
Les deux élèves : Les points *H* et *K*.
Prof : les points *H* et *K*. Alors, nous pouvons considérer une fonction qui associe le point *K* au point *N*.

Concernant la transition entre trigonométrie et fonctions trigonométriques, l'utilisation de signes mathématiques tels que « cosinus », « cosinus de l'angle », « arc » et « fonction » montre que les élèves parviennent, lors de la phase de travail par binôme, à faire le lien entre la fonction demandée (la fonction qui associe à un réel x l'abscisse du point M) et la ligne trigonométrique cosinus. Cela atteste l'établissement, de la part des élèves, d'un lien entre la ligne trigonométrique et l'aspect fonctionnel. Nous avons par exemple relevé l'interprétation en termes géométriques du signifié de variable numérique en reliant la variation de x à la variation du point N créé au début de la troisième partie. Cet extrait est une partie des interactions du binôme Moufida et Alaa lors de la phase de travail par binôme au niveau de la quatrième partie de d'expérimentation.

[Moufida lit la question] Pouvez-vous définir une *relation* qui permet de passer du réel x (choisi au début de cette activité) à l'abscisse du point M. Donner un nom à cette *relation*.

A : K a la même abscisse que M.
M : à tout point M on associe l'abscisse de ce point.
A : On commence par x. à tout x on associe l'abscisse du point M.
M : L'abscisse c'est le cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$.

Ce lien entre la ligne trigonométrique et l'aspect fonctionnel a été utilisé par la suite par l'enseignant lors de la phase de discussion collective afin de permettre la transition entre trigonométrie et fonctions trigonométriques, comme le montre l'extrait suivant de la dernière discussion collective :

P : Alors si je m'intéresse par exemple au point K est ce que vous pouvez définir une fonction entre N et K ?
N : Oui la fonction qui au point N associe K.
P : D'accord, si je reprends dès le début, on a commencé par choisir un réel x, si on fait varier ce réel le point N varie et par conséquent le point K varie. C'est ça ? Alors est ce qu'on peut définir une relation entre le réel x et le point K ?
Alaa : Qui à x associe le point K.
I : La fonction de IR dans…. Pour tout réel x on associe K dans l'intervalle [-1,1].
[…]
P : Voilà, K est le point de l'axe (OI) qui a la même abscisse que M. Pour résumer vous avez défini une fonction de IR dans le segment [II'] qui à tout réel x associe le point K et ce point K, comme vient de nous lire Ikbel, a la même abscisse que M. Alors… est ce que vous pouvez définir maintenant une relation entre x et l'abscisse de M.

Dans ses interventions, l'enseignant fait appel à des signes complexes relevant d'une interprétation des variations géométriques en termes de variations numériques et par l'interprétation de la simultanéité du déplacement de deux points dans Cabri comme une relation de dépendance fonctionnelle. L'extrait montre également une interprétation de la variation géométrique comme une variation numérique et cela en reliant la variation du point N à la variation de son abscisse ainsi que la variation du point K à la variation de son abscisse.

VI. CONCLUSION

L'importance épistémologique d'introduire la notion de fonction trigonométrique en tant que covariation afin de faire le lien entre la trigonométrie et les fonctions trigonométriques nous a amenée à concevoir et expérimenter une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique et visant l'introduction de la fonction « cosinus ». Dans cet article nous avons cherché à étudier l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers l'analyse de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de travail. Le processus d'interaction en classe s'est avéré très lent, complexe et articulé. L'analyse des signes langagiers nous a permis d'identifier quatre étapes pouvant marquer l'évolution du processus de construction de la signification mathématique visée. Cela constitue un exemple des apports potentiels d'une analyse logique du langage pour les études en didactique des mathématiques. Notre étude ne vise pas l'élaboration d'un modèle du processus de construction d'une signification mathématique dans le cas de l'utilisation d'un artefact technologique, compte tenu de la spécificité de l'expérimentation et le fait que notre travail s'est limité à l'analyse des signes langagiers. Néanmoins, cette étude permet de donner un éclairage sur un aspect de ce processus qui reste complexe et très articulé.

L'analyse des différentes phases de la séquence expérimentale nous a également permis de confirmer l'importance du rôle de l'enseignant pour amener les élèves à se détacher de l'activité avec l'artefact et à parvenir à une interprétation mathématique, en se basant sur cette activité comme un milieu commun expérimenté par toute la classe. Il nous semble alors important de souligner dans ce type de séquence d'enseignement la nécessité d'une certaine familiarisation de l'enseignant avec l'utilisation de l'artefact et la gestion des phases de discussion collective pour mener à bien ce type de séance. Cette considération peut donner aux résultats de la séquence étudiée un aspect local et particulier qui n'est pas directement généralisable au niveau de l'enseignement. Une étude plus fine des stratégies de l'enseignant dont l'objectif est de décrire la manière dont les interventions de l'enseignant peuvent être façonnées pour favoriser l'évolution des significations personnelles des élèves vers les connaissances mathématiques s'avère nécessaire.

REFERENCES

Bartolini Bussi M. G. (1996) « Mathematical discussion and perspective drawing in primary school » – *Educational Studies in Mathematics* 31, 1-2 (11-41).

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A., Ferri F. (2003) Semiotic mediation in the Primary School : Durer's glass. In Hoffmann H., Lenhard J., Seeger F. (Eds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte).* Dordrecht : Kluwer Academic.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. D., BartoliniBussi M. G., Jones G. A., Lesh R., Tirosh D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education, 2nd revised edition* (720-749). Mahwah, NG : Lawrence Erlbaum Associates.

Falcade R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Falcade R., Laborde C. & Mariotti M. A. (2007) « Approaching functions : Cabri tools as instruments of semiotic mediation » – *Educational Studies in Mathematics* 66, 3 (317-333).

Genevès B., Laborde C., Soury-Lavergne S. (2005) The room of transformations and functions with Cabri-geometry. *L'insegnamento della matematica e dellescienze integrate*, numero speciale 11-14.

Khalloufi-Mouha F. (2009) *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2^e^ année section scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Tunis.

Khalloufi-Mouha F. (2012) Étude de l'évolution des pratiques d'un enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. In Dorier J. L., Coutat S. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2012.* Université de Genève.

Khalloufi-Mouha F., Smida H. (2012) Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artifact. In *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education* XVI, (207-224).

Khalloufi-Mouha F. (2014) Etude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale* 54, (49-64).

Laborde C., Mariotti M. A. (2002) Grounding the notion of function and graph in DGS. *Actes de Cabri World 2001*, Montreal.

Mariotti M. A. (2009) Artifacts and signs after a Vygotskian perspective : the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education* 41, (427-440).

Mariotti M. A., Maracci M (2010) Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Rennes : PUR et INRP.

Peirce C. S. (1978) *Écrits sur le signe* (rassemblés, traduits et commentés par G. Deledalle). Paris : Le Seuil.

Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function. In Harelet G., Dubinsky E. (Eds.) *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, *MAA notes 25* (pp. 25-58).

Tall D. (1996) Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignementmathématique* 42, (395-415).

Vygotski L. (1938/1997) *Pensée et Langage*. Paris : La Dispute (3e éd).

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE CHANGEMENT DE LANGAGE DANS L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Judith NJOMGANG NGANSOP[*] – Patrick TCHONANG YOUKAP[**]

Résumé – Le travail que nous présentons porte sur le changement de langage en mathématiques. Dans l'enseignement supérieur, la plupart des théorèmes et des définitions sont donnés dans la langue naturelle. Ils sont facilement compréhensibles, mais pas opératoires. Pour les utiliser dans les démonstrations, les étudiants doivent pouvoir les écrire dans le langage formel. Nous présentons brièvement des résultats de deux enquêtes auprès des étudiants de première et de deuxième année de licence de mathématiques, qui montrent que cette activité est source de difficulté pour cette population. Un travail exploratoire nous conduit à faire l'hypothèse que la pratique des langues locales peut avoir des interférences dans le langage mathématique

Mots-clefs : didactique des mathématiques, logique, langage, quantification, implication.

Abstract – The work we present is about the change of language in mathematics. In the higher education, the most of theorems and definitions are given in the natural language. They are easy understandable, but not operating. To use it in the demonstrations, students must be able to write it in the formal language. We briefly present the results of two surveys of undergraduate and graduate students, which show that this activity is a source of difficulty for them. An exploratory work leads us to hypothesize that the practice of local languages may interfere in the mathematics' language.

Keywords: didactic of mathematics, logic, language, quantification, implication.

I. INTRODUCTION

En mathématiques, à l'université, la plupart des théorèmes et définitions sont donnés dans la langue naturelle, ce qui cache la structure logique des énoncés. A ce niveau d'étude, les démonstrations sont généralement construites dans le langage mixte ou formel. Il est donc essentiel de pouvoir identifier la structure logique des énoncés à prouver en les réécrivant dans le langage formel. En effet, l'écriture formelle d'un énoncé apporte des informations dans des activités de preuve :

- comment prouver cet énoncé ;
- comment utiliser l'énoncé dans une preuve.

Ce point de vue est renforcé par les résultats des travaux de Selden & Selden (1995) qui montrent que la capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels[1]

[*] Université de Yaoundé I, École Normale Supérieure de Yaoundé – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr

[**] Université de Yaoundé I, École Doctorale – Cameroun – patricktchonang@yahoo.fr ;

[1] Enoncés donnés dans le langage courant

Njomgang Ngansop J., Tchonang Youkap P. (2015) Le changement de langage dans l'activité mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 752-764.

participe fortement de la construction de la structure de la preuve de ces énoncés et a une part importante dans la construction et la validation des preuves.

Or, les activités de changement de langage sont pour beaucoup d'étudiants une source de difficultés (Duval 1988).

Nous faisons l'hypothèse que dans le contexte universitaire camerounais, les résultats de ces auteurs restent actuels, l'apprentissage du langage du calcul des prédicats n'étant effectué ni dans le secondaire, ni dans l'enseignement supérieur. À ceci s'ajoutent les difficultés éventuelles liées à l'apprentissage des mathématiques dans une langue autre que la langue maternelle (Durand-Guerrier & al. 2014).

Dans notre travail, nous nous intéressons au changement de langage (du langage courant au langage formel) pour les énoncés quantifiés. Nous présentons brièvement dans une première partie, quelques résultats d'une étude épistémologique des concepts de quantification et d'implication. Dans une deuxième partie, nous exposons les raisons pour s'intéresser à la question du changement de langage et dans une troisième partie, nous présentons et analysons les résultats d'une enquête conduite auprès des étudiants de deuxième année de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé[2].

Nous avons choisi comme cadre théorique de notre travail, le calcul des prédicats, cadre idoine pour l'analyse du discours mathématique (Durand-Guerrier 1996 ; Durand-Guerrier & Arsac 2003).

II. LA QUANTIFICATION ET L'IMPLICATION

La notion de quantification est une formalisation de la notion de quantité dans la langue naturelle.

1. La quantification et le calcul des prédicats

Dans le langage du calcul des prédicats standard, il existe deux quantificateurs : le quantificateur universel noté $\forall$ dont la signification dans la langue parlée est *tous*, et le quantificateur existentiel noté $\exists$ dont la signification dans la langue parlée est *il existe au moins un*.

Dans la langue naturelle, plusieurs mots et expressions expriment la notion de quantité : *pour tout*, *quel que soit*, *chaque*, qui sont synonymes de *tous* ; *certains*, *plusieurs* qui sont synonymes de *il existe au moins un*, puis, *il existe un unique*, *aucun*, qui ne sont pas modélisés, mais se traduisent par des formules complexes. Dans le langage courant, le mot *un(e)* est très utilisé. Il rentre dans le groupe de déterminants que F. Corblin (1996) appelle les indéfinis au sens étroit. Il en donne plusieurs interprétations :

- dans le cadre de la logique des prédicats, il cite Russell qui donne la traduction canonique du mot anglais *a* par le quantificateur existentiel ;
- dans le cadre de la Théorie de la Quantification Généralisée (TQG), il est considéré comme un quantificateur universel ;
- dans la Théorie des représentations du discours (DRT), *un* introduit une variable d'individu, c'est-à-dire, un générique.

Étant donné un domaine d'interprétation, le quantificateur universel transforme une phrase ouverte en une proposition vraie lorsque tous les objets de l'univers du discours satisfont la

[2] Ecole de formation des professeurs de lycées d'enseignement général et de professeurs de collèges

phrase ouverte, sinon, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé universellement quantifié est « $\forall x, P(x)$ » où x est une variable et P une fonction propositionnelle.

Un énoncé universellement quantifié est faux dès qu'il existe une instance de la phrase ouverte qui est fausse. Il se peut dans certains cas, que toutes les instances soient fausses.

La prise en compte du domaine de quantification est essentielle pour déterminer la valeur de vérité d'un énoncé quantifié.

Le quantificateur existentiel, quant à lui, transforme une phrase ouverte en une proposition vraie si au moins un élément de l'univers du discours satisfait la phrase ouverte. Dans le cas où aucun objet de l'univers du discours ne satisfait la phrase ouverte, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé existentiel est « $\exists x, P(x)$ » où P et x sont définis comme précédemment.

Il faut signaler que dans le langage courant, le quantificateur existentiel n'est pas souvent explicité. Pour traduire une phrase donnée dans le langage courant dans le langage du calcul des prédicats, on est amené à éclaircir son sens. C'est le cas par exemple de la phrase « *Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 a un diviseur premier* », où n'apparait pas le quantificateur existentiel. Cette phrase se formalise ainsi :

$\forall n, (((n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq 2)) \Rightarrow \exists p, R(p) \wedge (p/n))$, R étant le prédicat « être premier ».

Tant pour la quantification universelle qu'existentielle, on voit l'importance de l'univers du discours sur lequel porte cette quantification.

On peut à partir des formules atomiques, des connecteurs logiques et des quantificateurs, construire des énoncés complexes. Mais la détermination de la valeur de vérité de ces énoncés n'obéit plus pour la plupart, au principe de vérifonctionnalité comme c'était le cas dans le calcul des propositions, du fait que dans le calcul des prédicats, « les propositions complexes ne sont pas des agrégats de propositions plus simples » (Tarski, 1950, 1972). En effet, beaucoup d'énoncés complexes sont constitués d'énoncés imbriqués les uns dans les autres, comme le montre cet exemple :

$\forall f\ \forall a[(\forall u\ (F(u,a)\ \Rightarrow\ G(f,u,a))\ \Rightarrow H(f,a)]$, où F, G et H sont des relations.

C'est la notion de *satisfaction* qui va permettre d'étendre les connecteurs logiques propositionnels au calcul des prédicats, qui de ce fait est vu comme une extension du calcul des propositions.

5. L'IMPLICATION

Dans le calcul des propositions, l'implication est un connecteur binaire qui relie deux variables p et q pour donner la formule notée $p \Rightarrow q$ qui modélise un énoncé conditionnel. On l'appelle implication matérielle ou conditionnel matériel. p et q sont respectivement appelés antécédent et conséquent.

Un tel énoncé n'est faux que dans le cas où son antécédent est vrai et son conséquent est faux. Il est donc vrai dans les trois autres cas.

Dans le langage naturel (ou langage courant), l'implication qu'on retrouve sous la forme « *si …, alors…* » n'engage généralement le locuteur que si l'antécédent est vrai. C'est ce que Quine (1950) a appelé le conditionnel courant. L'utilisation de « *si …, alors…* » dans le langage courant peut induire chez les élèves la *propriété-en-acte de causalité*[3] (Deloustal-Jorrand 2000-2001) selon laquelle il y a un lien de causalité évident entre l'antécédent et le conséquent.

Dans le calcul des prédicats, une formule du type $P(x) \Rightarrow Q(x)$, où P et Q sont des prédicats est interprétée par une phrase ouverte. Pour tout élément a de l'univers du discours, $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est une implication matérielle. Elle n'est fausse que si $P(a)$ est vraie et $Q(a)$ est fausse. Dans les autres cas elle est vraie. On dira alors que a satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$. On définit ainsi le connecteur $\Rightarrow$ dans le calcul des prédicats à partir de l'implication matérielle, et on l'appelle l'*implication ouverte*.

La formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ étant interprétée dans une structure par une phrase ouverte, on peut la clore à l'aide du quantificateur universel ou existentiel.

On obtient pour la clôture universelle, la proposition $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ appelée *implication formelle* (Russel, 1903, 1910) ou *faisceau de conditionnel* (Quine, 1950, 1972). Cette proposition est vraie lorsque pour chaque instance de x l'implication matérielle obtenue est vraie. On voit donc que pour définir l'implication formelle $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, on doit introduire chaque implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$, définie pour une certaine classe d'objets.

Il est à noter que les théorèmes en mathématiques sont généralement donnés sous la forme d'une implication formelle, mais le plus souvent, le quantificateur est omis.
On définit également la clôture existentielle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ qui est $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Elle est vraie s'il existe un élément de l'univers du discours qui satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

III. LE LANGAGE ET L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

1. *Le langage de la quantification*

Susanna Epp (1999) présente une variété d'énoncés quantifiés que nous manipulons d'ordinaire dans l'activité mathématique. L'utilisation de ces énoncés nécessite qu'ils aient du sens pour les étudiants. Par exemple, quelles sont les différentes expressions qui marquent la quantification universelle ? Pour un énoncé universel, à quel moment est-il vrai ? Quand doit-on dire qu'il est faux ? À partir d'un énoncé vrai, que peut-on déduire ? Ces questions sont fondamentales du point de vue didactique. En effet, la multiplicité des mots de la langue et des formes d'expressions ne facilite pas toujours la compréhension des phrases. L'auteure souligne le cas des énoncés universellement quantifiés de la forme « All A are B »[4] qui peuvent se mettre sous la forme conditionnelle « if-then »[5] :

All squares are rectangles[6] » peut être transformé en la forme équivalente « *for all x, if x is a square, then x is a rectangle*[7].

Transformer un énoncé de la forme « tout A est B » en son équivalent dans le langage formel mobilise le concept d'implication dans le calcul des prédicats.

Concernant les énoncés existentiels donnés sous la forme « Some A are B »[8], ils peuvent être reformulés avec l'expression « *il existe au moins un* » :

---

[3] « $A \Rightarrow B$ n'a de raison d'être que lorsque A et B ont un lien de causalité (évident) entre elles », A et B étant des propositions.
[4] Tous les A sont B
[5] Si-alors
[6] Tous les carrés sont des rectangles
[7] Pour tout x, si x est un carré, alors il est un rectangle

Some Rational numbers are integers »[9] peut être écrit « *there exists a rational number x such that x is an integer*[10].

Selon l'auteure, la maîtrise de ces différentes formes langagières facilite la manipulation des énoncés dans les registres de la langue naturelle et formelle. En effet, d'une part, le passage d'un langage à un autre passe par une paraphrase correcte des énoncés, et de ce fait, le choix des expressions justes, et d'autre part, l'identification des objets à partir de leurs formulations variées devient plus aisée.

Les travaux montrent que ces compétences ne s'acquièrent pas spontanément :

> The ability to rephrase statements in alternate, equivalent ways, to recognize that other attractive-looking reformulations are not equivalent, and to have a feeling for truth and falsity of universal and existential statements are crucial in mathematical problem-solving tools. Yet numerous studies show that students do not acquire these abilities spontaneously[11]. (Epp 1999, p.2)

L'usage du langage courant va stabiliser les pratiques langagières et générer de nombreuses erreurs au cours de l'activité mathématique.

2. *Le changement de langage et la preuve en mathématiques*

Dans leur article publié en 1995, intitulé *Unpacking the logic of mathematical statements,* Annie Selden et John Selden soutiennent que les étudiants qui n'arrivent pas à déterminer correctement la structure logique des théorèmes, ne peuvent pas non plus déterminer la validité de leurs preuves (p. 125).

Ces auteurs définissent un énoncé *informel* comme un énoncé qui s'écarte d'une version dans le langage du calcul des prédicats, c'est-à-dire, qui n'utilise pas les expressions telles que « pour tout », « il existe », « et », « ou », « si… alors, … », « si et seulement si », avec leurs variantes.

Ils prennent les exemples suivants :

- « differentiable functions are continuous[12] » : par convention, le quantificateur universel est sous-entendu.
- « a function is continuous whenever it is differentiable[13] » : elle s'exprime sans le « si … alors … » qui traduit le conditionnel.

D'après les auteurs, ces formulations sont très courantes en mathématiques, et ne sont pas considérées comme ambigües ou mal construites, dans la mesure où elles sont comprises par un grand nombre de personnes. Elles sont rarement clarifiées, les conventions permettant leur interprétation précise par les mathématiciens, mais pas nécessairement par les étudiants.

Les auteurs désignent par « expliciter la structure logique d'un énoncé informel », le fait d'associer à cet énoncé informel un énoncé formel d'où ressortent les éléments logiques y compris ceux qui, par convention, sont sous-entendus.

Les auteurs illustrent cette définition par un exemple :

---

[8] Certains A sont B
[9] Certains nombres rationnels sont des entiers
[10] Il existe au moins un nombre rationnel x, tel que x soit un entier
[11] La capacité de reformuler, de reconnaître que des reformulations d'apparence attractive de ne sont pas équivalente, et d'avoir le sentiment de vérité ou de fausseté pour les énoncés universellement et existentiellement quantifiés sont des outils cruciaux pour résoudre les problèmes mathématiques. De nombreuses études montrent que les étudiants n'acquièrent pas spontanément ces capacités.
[12] Les fonctions différentiables sont continues
[13] Une fonction est continue si elle est dérivable

(1) "In a compact semigroup every group is contained in its own maximal group which is closed"(p.128)[14]

Un exemple d'explicitation logique est :

(2) "For every semigroup S and every group G, if S is compact and G is a subgroup of S, then, there is a group H such that H is a subgroup of S, G is a subgroup of H, and H is maximal and closed"[15]

D'après leur expérience, pour les besoins de l'enseignement, les énoncés informels de type (1) sont beaucoup plus compréhensibles que les énoncés formels de type (2), car ils sont plus faciles à appréhender, tandis que les énoncés de type (2) sont utiles pour les preuves.

En effet, un énoncé formel fait ressortir la structure logique cachée de l'énoncé informel qui lui est associé, et donne des indications sur la manière dont on peut engager la démonstration de l'énoncé.

3. *Des résultats d'une expérimentation*

Au mois de décembre de l'année 2010, nous avons soumis 68 étudiants camerounais de première année de licence de mathématiques à un questionnaire portant sur la logique.

Le questionnaire que nous avons proposé aux étudiants comportait 11 questions, la dixième portant sur le changement de langage ; il s'agissait d'écrire la conjecture de Goldbach énoncée en langue naturelle, dans le langage formel :

« *Tout entier naturel pair* n, *supérieur ou égal à* 4 *est la somme de deux nombres premiers* »

Dans notre communication, nous ne nous intéressons qu'aux résultats de cet item.

<u>Présentation du contexte camerounais</u>

Le Cameroun possède deux langues officielles : le français et l'anglais. Le système d'enseignement francophone est différent du système d'enseignement anglophone. Le choix du système d'enseignement pour un enfant s'opère dès la maternelle, et il est difficile de changer de système en cours de cycle primaire ou secondaire. Dans l'enseignement supérieur, les cours sont donnés indifféremment en français et en anglais dans la zone francophone, alors que dans la zone anglophone, ils sont donnés exclusivement en anglais.

En dehors des deux langues officielles, on rencontre environ deux cent trente langues locales[16] qui sont classées en six grands groupes au sein desquels on observe des variations linguistiques plus ou moins grandes. Comme l'a montré Françoise Tsoungui (1980) pour la langue Ewondo, ces langues locales déteignent sur la pratique du français, ce qui n'est en général pas pris en compte dans le cours de mathématiques.

Dans le secondaire comme dans le supérieur, le cours de mathématique est porté par la langue naturelle qui est le français ou l'anglais. Nous avons choisi de nous intéresser exclusivement aux enseignements faits en français.

<u>Brève analyse logique de la conjecture de Goldbach</u>

La conjecture de Goldbach est un problème ouvert, en ce sens que sa démonstration n'est pas encore établie. C'est un énoncé de la forme « tout A est B ».

---

[14] Dans un semi groupe compact, tout groupe est contenu dans son propre groupe maximal qui est fermé.

[15] Pour tout semi groupe S et tout groupe G, si S est compact et G est un sous-groupe de S, alors il existe un groupe H tel que H est un sous-groupe de S, G est un sous-groupe de H, et H est maximal et fermé.

[16] Source : Institut National de la Cartographie (Yaoundé, Cameroun)

Sa formalisation nécessité que soient levés les implicites inhérents à la langue naturelle. La première paraphrase permet la suppression de la quantification bornée (Durand-Guerrier (1996), Durand-Guerrier et Arsac (2003), Chellougui (2004)) et l'introduction d'une variable :

($P1$) « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur ou égal à 4 alors, n est la somme de deux nombres premiers* ».
On obtient une implication formelle où la quantification universelle porte sur la variable n.
La deuxième paraphrase permet d'expliciter le conséquent. On introduit deux lettres de variables qui désignent les deux nombres premiers dont n est la somme :
($P2$) : « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur à 4, alors il existe deux nombres*

premiers p et q tels que leur somme soit égale à n ».

Pour la formalisation de cet énoncé, on note :

R la propriété qui s'interprète par « être premier » ;
$\mathcal{P}$ la propriété qui s'interprète par « être pair » ;
Q la propriété qui s'interprète par « être supérieur ou égal à 4 » ;
S la relation ternaire qui s'interprète par « être la somme de … et de … »

On obtient l'écriture formelle :

(P3) $\forall n\ ((\mathcal{P}(n) \wedge Q(n)) \Rightarrow (\exists p, \exists q, (R(p) \wedge R(q) \wedge S(n, p, q)))$

On obtient un énoncé conditionnel universellement quantifié. Son antécédent est une conjonction de deux formules atomiques et sont conséquent est un énoncé existentiel.

<u>Présentation des résultats</u>

L'explicitation de l'antécédent et du conséquent mettent en évidence plusieurs niveaux de formalisations possibles de cet énoncé, et nous amène à considérer les réponses possibles suivant deux axes :

Suivant le premier axe :

1) Structure globale de la phrase et domaine explicite de quantification en tête de phrase ou non. On distingue :
   a) des énoncés conditionnels universellement quantifiés ou non, où l'antécédent et le conséquent sont respectivement l'expression correcte ou non dans le langage formalisé de « n est un entier naturel pair, plus grand que 4 », et de « n peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » ;
   b) une équivalence ;
   c) des formulations qui ne sont pas des énoncés conditionnels, et que nous avons appelés « linéaires ». C'est une suite de conjonctions ou d'énoncés séparés par une virgule ;
2) Traduction des propriétés et introduction des variables (avec ou sans quantificateur).

Nous adoptons le codage <u>*suivant le premier axe*</u> :

ECQ : énoncé conditionnel universellement quantifié
ECnonQ : énoncé conditionnel non quantifié
EquQ : équivalence universellement quantifiée
Equ*non*Q : équivalence non quantifiée
ELQ : énoncé linéaire universellement quantifié
ELnonQ : énoncé linéaire non quantifié

Suivant le second axe :

Vlib : variable libre

Nous ne signalons pas les variables liées car toutes doivent l'être étant donné qu'on a un énoncé clos.

Exemple :

$\forall n \in \mathbb{N}, (((\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k)\ et\ n \geq 4) \Rightarrow (\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n = p + q)),$
avec p et q premiers

Cette formalisation a une structure ECQ, l'antécédent est correctement énoncé et dans le conséquent, les nombres premiers sont introduits par le QE mais la propriété *être premier* est énoncée à la fin.

Sur les 68 étudiants interrogés, seuls 25 ont proposé une écriture formelle de la conjecture. Les productions sont différentes les unes des autres, mais on retrouve des structures semblables

ECQ conditionnel universellement quantifié	ECnonQ conditionnel non quantifié	EquQ équivalence universellement quantifiée	ELQ linéaire universellement quantifié
10	1	1	13
E02*, E05, E15, E16, E24, E45, E30, E43, E44, E67	E29	E32	E20, E25, E26, E27, E28, E31, E33, E39, E40, E41, E42, E50, E68

Tableau 1 *- Répartition des réponses suivant la structure*

	$\boldsymbol{k}$ **Vlib**	$\boldsymbol{p,q}$ **Vlib**	$\boldsymbol{k,p,q}$ **Vlib**	$\boldsymbol{n}$ **Vlib**	**Enoncés clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels	E16	E24, E43, E45	E44, E67	E29	E05, E15, E30, E02	11
Les énoncés linéaires	E27, E42, E68	E26, E39	E20, E40, E41		E25, E28, E31, E33, E50	13
L'équivalence	E32					1

Tableau 2 *–Répartition des réponses suivant le second axe : traduction des propriétés et introduction des variables*

Quelques exemples de réponses :

E15 : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 4)\ \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k \Rightarrow \exists p_1, p_2 \in P / n = p_{1+}p_2$
Cette réponse est un énoncé clos de type ECQ. Dans l'antécédent, on devrait avoir les énoncés « n pair » et « $n \geq 4$ » liés par le connecteur « et ».
E27 : $\forall n, n = 2k\ (k \in \mathbb{Z}_+^2) n > 4, \exists n_1\ et\ n_2$ premiers tels que $n = n_1 +\ n_2$

La réponse de **E27** est un énoncé linéaire de type ELQ, dans lequel k est une variable libre. Par ailleurs, on y retrouve la traduction littérale de « tout entier n pair, suppérieur ou égal à 4 ».

Notons qu'en toute rigueur, l'énoncé sur lequel porte le quantificateur universel devrait être entre les parenthèses. Nous pouvons attribuer l'absence des parenthèses aux pratiques enseignantes.

Ces résultats montrent que :

- la transformation d'un énoncé de la forme « tout A est B » en un énoncé de la forme « $\forall x, (A(x) \Rightarrow B(x))$ » ne va pas de soi ; les réponses des étudiants sont proches des énoncés congruents à l'énoncé de départ, surtout pour ce qui concerne l'antécédent : lorsque le domaine est $\mathbb{N}$, la formalisation de l'expression de « n pair et supérieur à 4 » n'est pas faite sous la forme une conjonction (hormis **E43**). Chellougui (2004, 2009) a montré que ceci était également présent chez certains auteurs de manuels universitaires ;
- aucun énoncé conditionnel qui a été proposé n'est correct ;
- la syntaxe dans l'usage des symboles est approximative et le phénomène d'imitation repéré chez les étudiants (Gueudet, 2008) est bien présent ;
- le statut des variables n'est pas toujours pris en compte. Certains étudiants ont donné en formulation symbolique un énoncé ouvert, où apparaissaient souvent plusieurs variables libres. La nature de ces variables est précisée, mais dans une syntaxe incorrecte du point de vue logique. On peut penser que pour les étudiants il s'agit d'éléments génériques ;
- l'absence du quantificateur existentiel produit des énoncés congruents à l'énoncé de départ, qui ne traduisent pas cet énoncé.
- Nous retrouvons dans les productions des étudiants, les mêmes phénomènes repérés par Selden & Selden (1995), à savoir, la faible capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels.

Nous pouvons alors conclure que le changement de langage en mathématiques représente une réelle difficulté chez ces étudiants et que cette activité devrait être intégrée dans l'enseignement des mathématiques.

IV. LANGAGE ET CULTURE

Les travaux de Moschkovich (2005), Barwell & al (2007), Njomgang et Durand-Guerrier (2011) montrent l'importance de la prise en compte du multilinguisme dans la recherche en didactiques des mathématiques.

> There are more and more students with an increasing variety of linguistic backgrounds present in classrooms all over the world. Their very presence forces teachers and mathematics educators to ask previously unasked questions: is mathematics 'language-free'; which languages do students use; which should they be encouraged to use; when; why; for how long; what are the consequences for resources and assessment of mathematics? (Barwell & al. 2007, p. 113)

Concernant les étudiants camerounais, nous parlerons de multilinguisme dans les salles de classe dans la mesure où chaque étudiant possède et pratique sa langue maternelle qui n'est ni le français, ni l'anglais comme nous l'avons précisé en amont.

A l'université, dans les filières mathématiques, on constate une prédominance des étudiants de la région de l'ouest du Cameroun (50 à 60%). Nous nous sommes intéressés au langage de la quantification dans deux départements de cette région dont nous sommes originaires, les Hauts-Plateaux et le Nkou-Khi. En nous appuyant sur cette citation de Maurice Houis & al. (1977) :

> Même là où il y a une véritable multiplicité de langues, où aucune ne domine par le nombre de locuteurs, par le prestige ou par l'efficacité pratique, il est fréquent que ces langues, dans une zone déterminée, soient étroitement parentes, que leurs systèmes et leurs structures soient les mêmes d'un point de vue typologique. […] La conséquence est qu'une économie certaine peut être réalisée puisque ces langues entre lesquelles il n'y a pas intercompréhension opèrent néanmoins selon le même type de fonctionnement. » (in Tsoungui 1980, p. 92)

Nous pouvons regrouper les langues de ces départements dont les locuteurs se comprennent généralement, pour présenter des résultats d'une enquête que nous avons conduite auprès des étudiants de niveau 2 de la filière « Mathématiques » de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, et auprès d'un enseignant de cette même école, qui s'exprime correctement dans la langue française et dans la langue Batoufam, une langue pratiquée dans le Nkou-Khi.

1. *Résultats d'un test avec des étudiants de niveau 2 de la filière « mathématiques »*

En janvier 2015, nous avons demandé à 26 étudiants volontaires que nous avons présentés ci-dessus, d'écrire dans le langage formel la conjecture de Goldbach énoncée dans le langage courant.

Nous avons porté notre choix sur cette population du fait que son séjour d'une année à l'université l'aurait familiarisée avec le langage formel.

En nous référant à la grille d'analyse de la section III-3, nous obtenons les tableaux suivants :

ECQ Conditionnel quantifié	EquQ équivalence universellement quantifiée	ELQ énoncé linéaire universellement quantifié	ELnQ
13	1	11	1
E3 ; E1 ; E4 ; E5; E6 ; E7 ; E8 ; E9 ; E10 ; E11 ; E12 ; E13 ; E14	E2	E15 ; E16 ; E17 ; E18 ; E19 ; E21 ; E22 ; E23 ; E24 ; E25 ; E26	E20

Tableau 3 *- répartition des réponses suivant la structure*

	k Vlib	**p, q Vlib**	***n*, p, q Vlib**	***n* Vlib**	**Enoncé clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels		E3	E6 ; E7 ; E9 ;		E13 ; E1; E4; E5; E6 ; E8; E10; E11 ; E12; E14	13
Les énoncés linéaires	E17 ; E22	E26		E20	E15 ; E16 ; E18 ; E19 ; E21 ; E23 ; E24 ; E25	12
L'équivalence	E2					1

Tableau 4- *classification des réponses des étudiants selon leur structure et les différentes variables libres qui y sont contenues.*

Nous obtenons 13 énoncés quantifiés, une équivalence et 12 énoncés linéaires.

Il faut noter qu'aucun étudiant n'a donné une écriture correcte dans le langage formel.

Par ailleurs, parmi les 12 étudiants qui ont donné des énoncés linéaires, 7 sont de l'ouest et parmi les 13 qui ont donné des énoncés conditionnels, 7 sont de l'ouest.

Quelques exemples de productions :

E1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4/\ \exists p \in \mathbb{N}/\ n = 2p \Rightarrow \exists q_1, q_2\ nombres\ premiers\ /\ n = q_1 + q_2$ (EQC)
E2 : $\forall x \in \mathbb{N}\ \ /\ x = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*, x \geq 4 \Leftrightarrow \exists (y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\ y, z \in P\ x = y + z$ (EquQ et kVlib)
E17 : $\forall n \in \mathbb{N}/\ n = 2k\ ,\ k \in \mathbb{N}\ \ et\ n \geq 4\ \ \exists (p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2\ \ p_1, p_2\ premiers\ /\ n = p_1 + p_2$ (ELQ, k Vlib)

D'une manière générale, le résultat du test que nous avons proposé aux étudiants montre que le niveau d'étude n'a pas une grande influence sur leur capacité à pouvoir effectuer de façon satisfaisante le changement de langage. On retrouve pratiquement les mêmes formulations que celles des étudiants de première année, alors que l'usage du formalisme pendant une année académique aurait pu laisser croire qu'ils seraient plus aptes à le manipuler.

2. *Langue maternelle et explicitation du quantificateur*

Dans sa thèse de doctorat, Françoise Tsoungui (1980) a identifié des interférences de la langue *ewondo* dans le français chez des élèves de la classe de sixième au Cameroun. Les observations naturalistes nous conduisent à faire l'hypothèse que la pratique de la langue batoufam et en général des langues de la région de l'ouest peut avoir un impact sur la pratique des mathématiques en français. Nous avons choisi cette langue parce que nous sommes originaires de cette partie du pays et que nous la pratiquons.

Pour notre enquête, nous avons rencontré un enseignant de Biologie de l'École Normale Supérieure de Yaoundé, en raison de sa bonne maîtrise du français et du Batoufam. L'objectif de l'entretien était de savoir si en Batoufam on établit un lien entre les énoncés de la forme « tout A est B » et ceux de la forme « pour tout x, si x est A, alors x est B ».

L'entretien a duré 30 mn, mais l'enseignant n'en a pas autorisé l'enregistrement. Notre corpus est constitué de quelques notes écrites.

Nous lui avons proposé de travailler sur l'énoncé « Tous les enfants du village qui sont dans la concession de Mbo[17] sont des jumeaux » (P).
Nous désignons par **E** l'enquêteur et par **Ens** l'enseignant. Nous présentons les points importants de cet entretien :

E : Pouvez-vous traduire la phrase en Batoufam ?
Ens : *Pô la'a wo la'a Mbo meu Ngne*
E : Peut-on mettre cette phrase sous la forme conditionnelle, c'est-à-dire sous la forme « si … alors » *?*
Ens : *Pô la'a peu la'a Mbo, meu woup Ngne*[18] (1). J'avoue que c'est un exercice que je n'ai pas encore fait, pourtant je pense que j'ai dit la même chose que précédemment !

Notre commentaire : La phrase (1) est linéaire. Le verbe est le mot « *peu* » (être). Il est utilisé au conditionnel et signifie « *s'ils sont* ». Lorsqu'on le prononce, l'intonation est montante.
Le mot « *meu* » signifie *alors*.

E : on ne voit pas bien le « si … alors … ».

[17] Nom du propriétaire de la concession
[18] Si les enfants du village sont dans la concession de Mbo, alors ils sont des jumeaux

Ens : Cette forme est très peu utilisée. C'est surtout la forme et l'intonation des verbes qui renvoient au conditionnel. Le conditionnel explicite existe mais c'est très lourd, c'est pourquoi on ne l'utilise pratiquement pas.

E : Comment va donc se dire cette phrase ?
Ens : On peut aussi dire *Yé pi gue pô la'a pi la'a Mbo, meu woup Ngne* (2). Le groupe de mots *Yé pi gue* signifie *si*. On a ainsi un conditionnel explicite. Je dirais que l'expression *Yé pi gue* a plus la signification « *s'il est vrai que* ».

Notre commentaire : On peut croire que le conditionnel explicite renvoie au conditionnel courant. En effet, la conclusion n'engage le locuteur que si l'antécédent est vrai.

En conclusion, on peut faire l'hypothèse que le fait d'utiliser très souvent les formes linéaires et rarement le conditionnel explicite est une pratique qui peut se répercuter sur la pratique du français, car ils ont généralement tendance à traduire littéralement la langue maternelle[19].

V. CONCLUSION

Les résultats des deux enquêtes que nous avons présentés indiquent que le passage de la langue naturelle au langage formel de langage en mathématiques reste, même pour des étudiants d'un niveau avancé, une source de difficultés. Compte tenu de la place du langage dans l'activité mathématique –aide à la conceptualisation, ces difficultés doivent être prises en compte dans la classe de mathématiques, bien avant l'arrivée des étudiants dans l'enseignement supérieur.

Par ailleurs, la pratique du français rencontre de nos jours, beaucoup de difficultés dans le secondaire comme à l'université. D'après Onguene Essono (2003), le français apparaît comme une langue apprise et utilisée à l'école et par l'école ; l'exclusion de langue culturelle de l'apprenant à l'école induit des difficultés énormes propres aux activités inhérentes à la scolarisation qui peuvent retarder la compréhension.

Une perspective de recherche serait d'approfondir notre travail sur les pratiques langagières locales afin d'identifier celles qui entrent en conflit avec le français, langue d'apprentissage dans l'espace francophone. Une autre perspective de recherche consisterait, en restant dans la perspective du changement de langage, à conduire un travail sur la transformation des énoncés donnés dans le langage formel en langue naturelle, qui représente un enjeu important en mathématiques. Cela permettra de développer des modalités de travail sur la logique et le langage en relation avec l'activité mathématique.

REFERENCES

Barwell R., Barton B., Setati M (2007) Multilingual issues in mathematics education: introduction. *Educational Studies in Mathematics* 64, 113-119.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, Thèse en cotutelle, diplôme de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, Université de Tunis.

Corblin F. (1997) Les indéfinis : variables et quantificateurs. *Langue française* 116(1), 8-32.

Deloustal-Jorrand V. (2000-2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit X 55*, 35-70.

[19] Il est important de souligner que ce ne sont pas seulement chez les étudiants de l'ouest qu'on retrouve les traductions littérales de leur langue en français.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, octobre 1996.

Durand-Guerrier V., Kazima M., Libbrecht P., Njomgang Ngansop J., Salekhova L., Tuktamyshov N., Winsløw C. (2014) Challenges and opportunities for second language learners in undergraduate mathematics. In *ICMI Study 21 Book*. Springer

Duval R. (1988) Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* 1, 7-23.

Epp S. (1999) The language of Quantification in mathematics Instruction. *Developping Mathematical Reasoning in Grades K-12*, chapitre 16.

Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiairy transition. *Educational Studies in Mathematics* 67, 237-254.

Houis M., Bole-Richard R. (1977) *Intégration des langues africaines dans une politique d'enseignement*. AGECOP, UNESCO.

Moschkovich J. (2005) Using two languages when learning mathematics, in *Educational Studies in Mathematics* 64*,* 121-144.

Njomgang Ngansop J., Durand-Guerrier V. (2014) Negation of Mathematical Statements In French In Multilingual Contexts – *An example in Cameroon. Actes du colloque ICMI 21.*

Onguéné Essono C. (2003) Les productions écrites d'adolescents des cycles d'éveil et d'orientation en français langue seconde au Cameroun : une interlangue marquée. *Langues et Communication* 2(3), 175-194.

Quine W. V. O. (1950) *Methods of Logic*. New York : Holy, Rinehart & Winston.

Russell B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique*. PUF : Paris 1989

Russell B. (1910) *Principia Mathematica* traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique.* PUF : Paris 1989

Selden J., Selden A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements, in *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151

Tsoungui F. (1980) *Le français écrit en classe de 6ème à Yaoundé. Recherches des interférences de l'Ewondo dans le français et proposition pédagogiques*. Thèse de 3ème cycle, Université de la Sorbonne Nouvelle.