Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNER DES MÉTHODES POUR DONNER AUX ÉTUDIANTS UNE EXPERTISE EN RESOLUTION DE PROBLEMES: UN EXEMPLE EN LICENCE

Janine ROGALSKI[*], Marc ROGALSKI[**]

Résumé. Le texte entend redonner vie à la problématique d'enseignement de méthodes de résolution de problèmes aux étudiants, visant leur conceptualisation opérationnelle et leur expertise. Après avoir rappelé des acquis des travaux antérieurs, on présente le contenu textuel d'une méthode pour l'étude des suites réelles, enseignée en licence, comme exemple de l'affinement d'heuristiques "à la Polya" allant vers un guidage opérationnel de l'étude. La mise en oeuvre sur une suite non triviale en montre l'efficacité. On souligne le caractère général des modalités d'enseignement de cette méthode. On conclut par la proposition de relance d'un ensemble de questions de recherche.

Mots-clefs : méthodes, expertise, résolution de problèmes, opérationnalisation des savoirs

Abstract. The paper aims at revitalizing the issue of training students to use problem-solving methods, to support their operational conceptualization and expertise. After recalling results from previous researches, we present the textual content of a method for the study of real series, taught at the first year of University, as an example of how to refine "à la Polya" heuristics in order to organize an operational guidance of student's activity. Its implementation for a non trivial series shows its efficacy. The organization of teaching is then presented as a generic case. In conclusion, theoretical and practical questions are proposed about teaching methods at the University level.

Keywords: methods, expertise, problem solving, knowledge operationalization

I. INTRODUCTION : RETOUR SUR L'ENSEIGNEMENT DE METHODES ?

La problématique des méthodes de résolution de problèmes et de leur enseignement a connu un développement autour des années 80-90, puis une extinction. Lui ont succédé des questions plus générales sur la métacognition, dont la place des activités réflexives des élèves lors de la résolution de problème. Schoenfeld a également relevé cette évolution dans la recherche anglophone : " *le travail sur la résolution de problème en tant que telle est retombé significativement au début des années 90* " ; parmi les raisons, il souligne que le travail d'ingénierie (élaboration de méthodes et mise en oeuvre avec les élèves) n'était ni assez excitant ("*glamourous*") ni valorisé, bien que sa faisabilité ait été démontrée : "*les stratégies heuristiques générales pouvaient être décomposées en familles de stratégies plus spécifiques,*

[*] Directeur de recherche CNRS honoraire, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Denis Diderot Paris – France - rogalskij@univ-paris8.fr

[**] Professeur émérite Université Lille I, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie, Paris et Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Denis Diderot Paris – France - marc.rogalski@imj-prg.fr

Rogalski J., Rogalski, M. (2015) Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes : Un exemple en licence. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 687-700.

et les étudiants, avec un enseignement approprié pouvaient apprendre à les utiliser" (Schoenfeld 2007, pp. 539-540, notre traduction). Nous proposons de rouvrir la discussion sur cette problématique spécifiée pour l'enseignement supérieur, à partir de la présentation complète d'une méthode effectivement utilisée en licence.

Reprenons d'abord une définition générale (explicitée à propos des méthodes de programmation en informatique : Rogalski, Samurçay & Hoc 1988, pp. 310-311). « *Une méthode peut être considérée comme un guide explicite et systématique pour la recherche et la gestion de stratégies de résolution de problèmes d'une certaine classe* […] » : c'est ce que montrera l'exemple développé pour l'étude des suites numériques. « *(Elle) est élaborée par des spécialistes d'un domaine d'activité pour expliciter ce qui se dégage de commun dans des pratiques efficaces de résolution et pour rationaliser ces pratiques* […] *(Sa) mise en œuvre suppose une adaptation au problème concerné* [le traitement d'une suite particulière illustre une telle adaptation] *et aux connaissances des sujets* » [c'est l'objet du premier point de la méthode présentée].

Concernant l'enseignement et l'apprentissage de méthodes de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques à l'université, on se propose d'illustrer les idées développées dans (Rogalski 1990a) par l'exemple paradigmatique de l'étude des suites numériques en licence, détaillée en (II.1). Nous montrerons sur une suite particulière la pertinence mathématique de cette méthode (II.2). Nous donnerons en III des éléments sur son enseignement. Nous concluerons par une discussion sur des problèmes ouverts.

Commençons par les apports des travaux antérieurs sur l'enseignement de méthodes en mathématiques, avec une liste de méthodes ayant déjà été enseignées, dans divers domaines mathématiques.

1. Des travaux antérieurs sur l'enseignement de méthodes en mathématiques

Nous résumons en six points les apports convergents de diverses contributions : (Polya 1965), (Robert, Rogalski & Samurcay 1987), (Robert & Rogalski 1988), (Robert & Tenaud 1989), (.Rogalski 1989), (Rogalski, Samurçay & Hoc 1988), (Rogalski 1990a), (Schoenfeld 1978, 1980, 1985, 2007).

• On apprend les mathématiques en résolvant des problèmes, et c'est par la résolution de problèmes que se fait l'évaluation de l'apprentissage. Mais on constate souvent un écart important entre l'ambition de l'enseignement et le faible degré d'expertise attendu pour les contrôles, et par suite dans les problèmes étudiés en classe. D'où une faible expertise des étudiants dans la résolution de problèmes, et par suite une faible compréhension des concepts utiles dans cette résolution.

• Pour s'approprier le sens de concepts mathématiques, il faut les rendre *opérationnels pour la résolution de problèmes* (Douady 1986).

• Des problèmes trop simples ou trop élémentaires ne suffisent pas à balayer l'essentiel des facettes d'un concept et des points de vue qu'il peut présenter pour être opérationnel.

• La capacité à résoudre des problèmes suffisamment difficiles autour d'un concept demande un *apprentissage explicite*, qui appelle un *enseignement de méthodes*.

• Ni l'heuristique générale au sens de (Polya 1965), ou de (Schoenfeld 1980, 1985), ni le « problem solving » général au sens de (Larson 1983) ou de (Schoenfeld 1985) ne répondent à la question (M. Rogalski 1990a). Pour être efficaces, des méthodes doivent rendre opérationnelles des idées générales de l'épistémologie ou de l'heuristique en les spécifiant pour un domaine mathématique précis ou un concept (c'est le cas de l'exemple de méthode que nous présentons au § II). Du coup elles ne peuvent en général s'appliquer à un domaine différent.

• Une *méthode* sur un champ donné des mathématiques *n'est pas un algorithme* : elle ne prétend pas apporter une réponse automatique, mais *elle génère des questions qui organisent les activités :* classement des problèmes, classement des outils et démarches possibles dans le domaine (stratégies, tactiques, techniques), organisation temporelle de la résolution, et enfin procédures de contrôle. Il s'agit donc de mettre en œuvre *une approche explicitement métamathématique qui porte sur des concepts précis* (Robert et Robinet 1996 ; Dorier 1997).

2. *Des exemples de méthodes enseignées, de la terminale à la licence*

Notre but ici est d'analyser un exemple qui montre comment expliciter une méthode de résolution de problème dans un domaine précis (les suites à l' université), et en quoi le degré d'expertise lié à l'opérationalisation des concepts est ainsi élargi. Il s'agit aussi de montrer, par l'exemple d'un dispositif d'apprentissage en Licence, comment on peut organiser un enseignement de méthode. Nous le situons au préalable dans la diversité des domaines dans lesquels des méthodes ont effectivement été utilisées dans l'enseignement (de la terminale scientifique à la licence) avec les visées suivantes :

(1) faire résoudre des problèmes de géométrie en terminale scientifique (Robert et Tenaud 1989).
(2) enseigner la géométrie des espaces affines et la théorie des groupes (licence formation continue) (Robert 1992).
(3) enseigner l'algèbre linéaire (Rogalski 1992,1994), (Dorier 1997).
(4) rechercher des lieux géométriques en géométrie cartésienne (Rogalski 1995b).
(5) chercher des primitives (Guyou 1946 ; Schoenfeld 1978 ; Rogalski 1987).
(6) pour étudier qualitativement une équation différentielle (M. Rogalski 1989).
(7) étudier la convergence d'une suite réelle (Rogalski 1988 ; 1990b).
(8) établir des inégalités en analyse (Rogalski 1999).
(9) résoudre des problèmes d'arithmétique élémentaire (Rogalski 1995a).

La méthode (4), enseignée par Charles Guyou dans les années 50-60 en classe préparatoire aux grandes écoles, a été exploitée pour l'enseignement des prolégomènes d'algèbre linéaire à Lille dans les années 80. La méthode (5) a été à la base d'un projet d'un Enseignement Intelligemment Assisté par Ordinateur expérimenté à Lille (Delozanne 1994) et d'une réflexion sur les limites de ce type de logiciel en analyse (Rogalski 1994). La méthode (8) a été utilisée plusieurs années (2000-2006) en formation d'enseignants.

La méthode (7) a été choisie pour illustrer notre démarche.

II. UN EXEMPLE DE METHODE SUR LA CONVERGENCE DES SUITES, ENSEIGNEE PLUSIEURS ANNEES EN L1

Il s'agit d'un exemple emblématique de méthode utilisant de façon opérationnelle les concepts du domaine des suites numériques. Elle a été enseignée plusieurs années (1988-1996), à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Nous commençons par donner des extraits substantiels du document qui décrit la méthode, distribué aux étudiants *en fin d'enseignement* - le texte *in extenso* figure dans (Rogalski 1988, 1990b). Nous détaillons ensuite un exemple de son utilisation sur une suite particulière, assez difficile, pour montrer sa pertinence mathématique.

Enfin, nous parlerons (III) des modalités de son enseignement (L1, DEUG A première année à l'époque), de son utilisation par les étudiants et de son impact.

1. La description de la méthode

Le *plan* de la méthode, en cinq sections, introduit le document.

PLAN

0. Connaissances disponibles nécessaires.
 (1) Les théorèmes généraux sur les suites.
 (2) Les suites et les fonctions à connaître en toutes occasions.
 (3) Trois techniques indispensables.

I. Stratégie de classement.
 (1) Classer le problème en problème général ou problème particulier..
 (2) Classer une suite particulière.
 (3) Autres moyens de classement.

II. Stratégie de recherche.
 (1) Faire des tests préliminaires.
 (2) Etudier des cas particuliers.
 (3) Changer de point de vue.
 (4) Faire « n = ∞ ».
 (5) Localiser la difficulté principale.

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve.
 (1) Si on a deviné la limite.
 (2) Pour montrer une divergence.
 (3) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite.
 (4) Identifier la limite.
 (5) Tactique «□ - N avec encadrement».
 (6) Partager une somme $\sum_{0\leq p\leq n} v_{n,p}$ en deux termes.
 (7) Traiter une suite de type classique par les techniques standard.
 (8) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration.

IV. Contrôler, redémarrer.
 (1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ?
 (2) Contrôler par l'extérieur.
 (3) Redémarrage.

V. Pour s'entraîner à la méthode.

Certains des titres font ici penser à l'heuristique générale, telle qu'elle est présentée dans (Polya 1965) ou (Schoenfeld 1980) : c'est souvent le cas dans les *plans* de méthodes. Mais nous allons montrer, sur les sections 0 à III, comment interviennent les concepts de convergence des suites – nous en donnons les extraits les plus significatifs, les points non développés sont remplacés par le symbole […].

0. Exemples des connaissances disponibles nécessaires

(1) *Les théorèmes généraux sur les suites*

Formulation en «ε-N», suites monotones, adjacentes. Théorème d'« encadrement à ε près » : si on a $v_n\leq u_n\leq w_n$, et si on sait que $v_n\to v$, $w_n\to w$, alors si l'entier n est assez grand on a l'encadrement $v-\varepsilon\leq u_n\leq w+\varepsilon$. Théorème de Cauchy.

(2) *Exemples de suites à bien connaître*
Suites et séries géométriques et arithmétiques ; séries de Riemann ; comportements comparés de n^{α}, a^{n}, $n!$; suites récurrentes linéaires à un terme (calcul du terme général) ; suites $(1+x/n)^{n}$ et $\sum_{0\leq p\leq n} x^{p}/p!$.

(3) *Exemples de techniques indispensables*
Savoir majorer et minorer (signe et/ou monotonie de la dérivée). Raisonner par récurrence (en particulier «récurrence paramétrée» : chercher C pour que $H_n(C) \Rightarrow H_{n+1}(C)$). Utiliser les développements limités.

I. Stratégie de classement

(1) *Classer le problème en problème général ou problème particulier.*
(2) *Classer une suite particulière parmi :*

les suites définies par une formule $f(n)$;
les suites définies implicitement par une équation, par exemple : u_n est la plus grande racine de $x^{3}-3x-n=0$;
les sommes de séries ;
les récurrences fixes à un terme : $u_{n+1}=f(u_n)$;
les récurrences variables à un terme : $u_{n+1}=f_n(u_n)$;
les récurrences linéaires (à un ou deux termes) ;
les suites s'écrivant $\sum_{0\leq p\leq n} v_{n,p}$.

(3) *Autres moyens de classement*

• Simplifier l'écriture *en donnant un nom* à un groupement, par exemple si on étudie $u_{n+1} = \left([(n+\sin n)/(n+\ln n)]+u_n\right)^{1/2}$, poser $a_n = (n+\sin n)/(n+\ln n)$ et étudier le problème général $u_{n+1} = \left(a_n+u_n\right)^{1/2}$, quand $a_n \to m$. On a ainsi *changé de point de vue* en passant d'un problème particulier à un problème général.

• Modifier u_n pour la comparer à des suites plus simples. Par exemple, si on étudie la suite écrite avec n racines carrées $u_n = \left(1/n+\left(1/n+\ldots(1/n)^{1/2}\right)^{1/2}\ldots\right)^{1/2}$, alors $v_n \leq u_n \leq w_n$ où $v_n = (1/n)^{(1/2^{n})}$ et $w_n = (1/n+w_{n-1})^{1/2}$.

II. Stratégie de recherche : faire des hypothèses, se donner des idées, conjecturer

Les questions à se poser concernent : convergence, divergence, identification de limite, monotonie, majoration ou minoration, comportement séparé de u_{2n} et u_{2n+1}, comparaison à des suites connues, etc.

[…]

(1) *Faire des tests préliminaires*

[…]

(b) Peut-on encadrer la suite par des suites connues ? ou l'encadrer à □ près par des suites connues, pour n assez grand ?
(c) Que suggère un dessin ? Attention : un dessin peut suggérer plusieurs pistes différentes ; si on décide d'en suivre une, ne pas oublier les autres si celle-ci ne marche pas.

[...]

(e) La suite est-elle *évidemment* monotone (ce qui donne une piste de recherche) ? Exemple : $u_{n+1}=(u_n^2+2)^{1/2}$.

(f) Calculer littéralement u_1, u_2, u_3, u_4,… pour deviner une formule éventuelle. Exemples : $u_{n+1} = 2(u_n)^{1/2}$ ou $u_n = 1/2!+2/3!+…+(n-1)/n!$.

[…]

(2) *Dans un problème général, étudier des cas particuliers*

Exemple : si $u_n \square m$, que fait $v_n=(u_1+u_2+…+u_n)/n$? Etudier le cas $u_n \square m$.

Ou : si $u_{n+1}=\left(a_n+u_n\right)^{1/2}$, avec $a_n \square m$, que fait u_n ? Etudier le cas $a_n \square m$.

(3) *Changer de point de vue sur la suite*

(a) Changer la formule ou l'expression. Exemples :

- $u_0=1$, $u_{n+1}=(1+u_0^2+u_1^2+…+u_n^2)/(n+1)$ peut se définir par $u_0=1$, $u_1=2$, et pour $n\geq 3$ par l'expression $u_{n+1}=u_n\,(u_n+n)/(n+1)$.
- $u_{n+1}=(1/n+u_n^2)^{1/2}$ peut se définir par $u_n^2=1/(n-1)+1/(n-2)+…+1+u_1^2$.

[…]

(b) Passer du cadre numérique au cadre graphique et inversement

- Pour une suite $u_{n+1}=f(u_n)$, tracer le graphe de f et la bissectrice $y=x$, « l'escalier » ou le « colimaçon ».
- Pour une suite $u_{n+1}= f_n(u_n)$, tracer les courbes $y= f_n(x)$, l'escalier ou le colimaçon. Interpréter le comportement de u_n sur le dessin en termes de propriétés des f_n vues sur le graphique, et qu'il faudra prouver. Par exemple, comparer u_n et le point fixe x_n de f_n.
- Si $u_n = f(1)+f(2)+…+f(n)$, tracer le graphe de f, en déduire des encadrements, par exemple au moyen d'une intégrale de f.

(c) Passer d'un problème général à un problème particulier, et inversement.

(d) Passer de l'étude de u_n à celle de $u_{n+1}-u_n$, et inversement. Par exemple, dans le cas de la suite $u_{n+1} = u_n\,(u_n+n)/(n+1)$, avec $u_1=2$, alors $u_{n+1}-u_n = u_n(u_n-1)/(n+1)\geq 2/(n+1)$ dès que $n\geq 1$, donc $u_n\geq 2/n+2/(n-1)+…+2/2+2$.

(e) Passer de l'étude de u_n à celle de u_{n+1}/u_n et inversement (utile si $|u_{n+1}/u_n|\leq k<1$).

(4) *Faire «n=∞»*

Dans l'expression de u_n, on remplace certains termes $\square(n)$ par leur limite quand $n\square\infty$ (si on la connaît sans ambiguïté : attention aux $(a_n)^n$, par exemple) pour deviner le comportement de u_n. Il faut alors rendre précis le raisonnement, et dire «si n est grand, $\phi(n)$ vaut presque m», qu'on précise en : si $n\geq N_\varepsilon$, $m-\varepsilon\leq\phi(n)\leq m+\varepsilon$; on peut alors faire des encadrements (dépendant de ε) de u_n pour $n\geq N_\varepsilon$.

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve

Ecrire d'abord un plan de démonstration, avec l'emboîtement tactiques-techniques suggéré par la stratégie de recherche. Un tel plan va comporter en général des tactiques typiques, successives ou imbriquées, et comportant plusieurs techniques, dans la mesure où il va apparaître dans la résolution des *sous-buts* (suites auxiliaires, majorations préalables, etc).

(1) *Si on a deviné la limite m, montrer par des majorations que u_n- m tend vers 0.*

Il s'agit en général de majorer $|u_n-m|$ par une suite classique tendant vers 0, le plus souvent du type C/n^{α} avec $\alpha>0$. Cela peut assez souvent se montrer par une *récurrence paramétrée* : on note la propriété $|u_n-m|\leq C/n^{\alpha}$ par $H_n(C, \alpha)$, et on cherche C et α pour que l'implication de récurrence $H_n(C, \alpha) \Rightarrow H_{n+1}(C, \alpha)$ soit vraie à partir d'un certain rang N_0 ; il faut ensuite trouver un rang $n_0\geq N_0$ tel que $H_{n_0}(C, \alpha)$ soit vraie. Il est souvent utile de poser $v_n=u_n-m$.

Exemple : si $u_0=1$ et $u_{n+1}=1+[(n+2)/2(n+1)]u_n$, on devine facilement que la limite éventuelle est 2 ; en posant $v_n=u_n-2$, on cherche à majorer $|v_n|$ par C/n [voir la section II.2].

(2) *Pour montrer une divergence.*

(a) Montrer que la suite est non majorée ou non minorée. Plusieurs possibilités :

- minorer u_n par une suite non majorée ; exemple : $u_{n+1}=nu_n^3$ avec $u_1\geq 1$, on montre par récurrence que $u_n\geq 1$, puis $u_n\geq n-1$;
- par l'absurde : si $u_n=n^{1/u_{n-1}}$, on suppose $u_n\leq M$ avec $M\geq 1$, et on voit qu'on aurait $n\leq M^M$!

(b) Exclure la seule limite possible, ou montrer qu'une limite ne peut pas exister. Exemples :

- $u_0=1$, $u_{n+1}=u_n+1/u_n$; la suite croît et si $u_n\to m$, m=m+1/m, absurde ;
- $u_0= -1/4$, $u_{n+1}=u_n (2-u_n)$; u_n décroît, si $u_n\to m$, $m \leq -1/4$, mais on a m=0 ou m=1 !
- $u_0=2$, $u_{n+1}=3u_n-2$; si $f(x)=3x-2$, la seule limite possible m=1 vérifie $f'(m)=3$, donc est répulsive ; or $u_n=1$ à partir de n_0 implique $u_0=1$!

(c) Trouver une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui ne peuvent avoir la même limite. Exemples :

- $u_0=0$, $u_{n+1}=3/(1+2u_n^2)$: $u_{2n}\leq 1/2$ et $u_{2n+1}\geq 2$;
- $u_n=n/[n+2+(-1)^n(n+\sin n)]$: $u_{2n}\to 1/2$ et $u_{2n+1}\to+\infty$.

(d) Nier le critère de Cauchy. En général il faut minorer $|u_{n+p}-u_n|$ par un nombre strictement positif fixe, pour p convenable éventuellement dépendant de n. Par exemple, pour $u_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n$, $u_{n+p}-u_n\geq p/(n+p)\geq 3/4$ pour $p\geq 3n$.

(3) *Prouver la convergence sans s'occuper de la limite*

(a) Prouver la monotonie de u_n (calcul et/ou récurrence). Pour les suites $u_{n+1}=f(u_n)$, utiliser la monotonie de f ou le signe de $f(x)-x$ sur un intervalle invariant.

(b) Majorer ou minorer u_n (calcul et/ou récurrence). Dans le cas des suites récurrentes, pour trouver un majorant C on se laisse guider par le dessin, ou on choisit C pour que la preuve de $(u_n \leq C) \square (u_{n+1} \leq C)$ marche, au moins pour n assez grand (récurrence paramétrée).

(c) Etudier séparément u_{2n} et u_{2n+1} ; c'est une méthode bien adaptée aux suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f décroissante. Exemple : $u_0=0$, $u_{n+1}=e^{-u_n}$: u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes.

(d) Utiliser le critère de Cauchy. C'est souvent en désespoir de cause. Deux exemples importants quand même :

- somme de série $u_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$, avec v_n très petit pour n grand ;
- $u_{n+1}=f(u_n)$, avec $|f'|\leq K<1$: $|u_{n+p}-u_n|\leq[K^n/(1-K)]|u_1-u_0|$.

(e) Montrer que u_{n+1}/u_n a une limite □ : si $|\square|<1$, $u_n \square 0$.

(f) Utiliser la *série* de terme général $u_{n+1}-u_n$, en montrant par des encadrements qu'elle converge ; exemple : $u_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n-\ln n$.

(g) Encadrer u_n entre deux suites convergentes. En particulier, dans le cas $u_{n+1}=f_n(u_n)$, comparer u_n aux points fixes x_n des f_n.

(4) *Identifier la limite*

(a) Si $u_n=f(n)$, f connue ayant une limite en $+\infty$, alors $\lim u_n=\lim_{x \square +\infty} f(x)$.

[…]

(c) Si $u_{n+1}=f(u_n)$, f continue sur [a,b], et si u_n converge vers m □[a,b], on a $f(m)=m$; si on peut éliminer tous les points fixes (par exemple les points répulsifs) sauf un, on peut conclure.

(d) Plus généralement, si on peut éliminer tous les candidats à être la limite, sauf un. Exemple : si u_n est la racine positive de $x^n+x^{n-1}+x^2-x-1=0$, alors $0<u_n<1$, u_n est croissante ; si t<1 on peut montrer que t ne peut être limite, donc la limite est 1.

(5) *Tactique « □ – N avec encadrement »*

Cette tactique est souvent utile pour les suites $u_{n+1}=f_n(u_n)$ et pour les suites à la marge de la classification. Il s'agit d'encadrer u_n, pour $n\geq N(\square)$, par deux suites dépendant de □ et plus faciles à étudier, en s'appuyant sur ce qu'on a deviné dans la tactique de recherche d'hypothèses «faire n = +∞». Exemples :

- si $u_n \square m$, que fait $v_n=(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)/n$? Si $n\geq N(\square)$ $m-\square\leq u_n\leq m+\square$, donc $s_n\leq v_n\leq t_n$, où $s_n=[u_1+u_2+\ldots+u_{N(\square)}+(n-N(\square))(m-\square)]/n$, et t_n est analogue ; les limites de s_n et t_n sont faciles, donc, si n est grand, on a $m-2\square\leq s_n\leq v_n\leq t_n\leq m+2\square$ …
- si $u_1=1$, $u_{n+1}=(1/n+u_n)^{1/2}$, pour $n\geq N$ on a $0<1/n<\square$; on pose $v_N=w_N=u_N$, et pour $n>N$ $v_{n+1}=(\square+v_n)^{1/2}$ et $w_{n+1}=w_n^{1/2}$; alors $w_n\leq u_n\leq v_n$. Mais $\lim w_n=1$ et $\lim v_n=[1+(1+4\square)^{1/2}]/2$, donc on a $1-\square\leq u_n\leq[1+(1+4\square)^{1/2}]/2+\square\leq 1+2\square$.

(6) *Partager une somme* $\sum_{0\leq p\leq n} v_{n,p}$ *en deux termes*

On sommera de 0 à q d'une part et de q+1 à n de l'autre. Dans certains cas q sera fixé assez grand pour que l'un des morceaux soit inférieur à □/2, puis n tendra vers l'infini dans le deuxième morceau (voir le premier exemple de (5), et la suite $(1+x/n)^n - \sum_{0\leq p\leq n} x^p/p!$). Dans d'autre cas il faudra prendre q variable avec n par exemple q=[n/2] ou $q=[n-n^{1/2}]$ ou…

2. *Utilisation de la méthode pour étudier la suite :* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 1 + [(n+2)/2(n+1)]u_n$

Après cette présentation de la méthode, nous allons illustrer sa mise en œuvre pas à pas sur une suite non triviale, en notant les tâches de la méthode utiles à accomplir.

I. La stratégie de classement

(2) On peut classer la suite dans deux catégories :

∗ suite *linéaire à un terme*, à coefficients variables; on peut donc espérer trouver une forme explicite pour le terme général de la suite, mais qui risque d'être compliquée ; une variante plus simple sera vue plus loin avec la tactique notée $\boxed{F}$.

∗ *suite du type* $u_{n+1}= f_n(u_n)$, avec $f_n(x)=1+[(n+2)/2(n+1)]x$; on peut donc penser que la tactique "□-N avec encadrement" pourra être essayée : tactique nommée ici $\boxed{A}$.

II. La stratégie de recherche

(1) Faire des tests préliminaires

(b) En tant que suite de la forme $u_{n+1}=f_n(u_n)$, on regarde s'il y a un *encadrement* de la partie de l'expression qui dépend de n ; on constate que (n+2)/2(n+1)□1/2 quand n□+∞, donc qu'on a l'encadrement 1/2-□≤[(n+2)/2(n+1)]≤1/2+□ pour n assez grand, ce qui peut fournir, compte tenu de la croissance des fonctions f_n, la tactique $\boxed{A}$ de preuve en «□-N avec encadrement».

(c) *Que suggère un dessin* ?

Dans la figure 1, on voit que la monotonie n'est pas claire au delà de n=3. Il n'est même pas clair que la suite converge vers 2, point fixe de la fonction $f(x)=1+(1/2)x$, limite des $f_n(x)$, et le dessin ne dit rien de sa monotonie ultérieure. Par contre, il semble raisonnable d'essayer la tactique $\boxed{B}$: encadrer u_n par deux suites convergentes, en particulier en la comparant aux points fixes x_n des fonctions f_n.

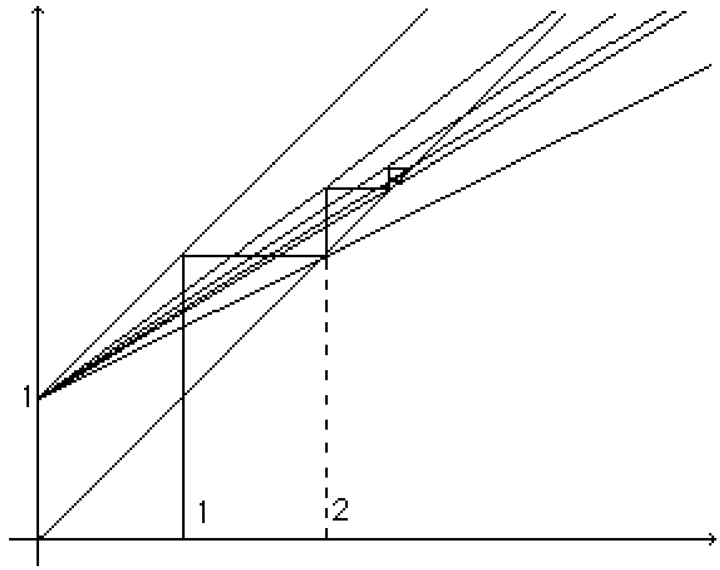

Figure 1. Les graphes des f_n et l'itération

1. *(d)* Calcul de quelques valeurs

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n =	1	2	2,5	2,6666.	2,6666.	2,6	2,516..	2,4380	2,3714	2,3174	2,2746

On peut faire l'hypothèse que la suite est décroissante à partir de n=4, est minorée par 1 et converge vers 2. D'où deux tactiques de preuve possibles : la tactique $\boxed{C}$: suite décroissante minorée, on identifie la limite ensuite ; et la tactique $\boxed{D}$: majorer $|u_n-2|$ par une suite du type $C/n^{\square}$.

(f) *Calculer littéralement*

On trouve successivement pour les valeurs de u_n : 1, 2=1+1, 1+3/2=1+1/2+1, 2+2/3=1+ 1/3+1/3+1 …

On peut soupçonner que les inverses des coefficients binomiaux ont à voir avec le problème … On trouve effectivement l'égalité u_4=1+1/4+1/6+1/4+1, puis u_5=1+1/5+1/10+1/10+1/5+1… D'où une tactique $\boxed{E}$: comparer u_n à la suite $v_n=1+1/C_n^1+1/C_n^2+\cdots+1/C_n^{n-1}+1$, en espérant que ce soient les mêmes. On aura ainsi fait un grand *changement de point de vue* sur la suite de départ !

(3) Changer de point de vue

(a) *Changer la formule*

(∗) On remarque qu'il y a 1/(n+1) en coefficient devant u_n, et que si on divise par n+2 on trouve 1/(n+2) en coefficient devant u_{n+1}. D'où l'idée de poser $v_n=[1/(n+1)]u_n$, et on obtient la nouvelle suite récurrente linéaire $v_{n+1}=1/(n+2)+(1/2)v_n$, $v_0=1$. Le coefficient constant 1/2 et la linéarité nous incitent à essayer une tactique $\boxed{F}$: calculer le terme général de la suite v_n, en déduire une formule pour u_n et chercher directement sa limite sur l'expression obtenue ; on peut prévoir que v_n s'écrira $\sum_{0\leq p\leq n} t_{p,n}$, qu'il faudra couper en deux.

(*) Autre manière de changer la formule : faire disparaître le 1 en posant $v_n=u_n-1$. On obtient : $v_0=1$, $v_{n+1}=[(n+2)/2(n+1)](v_n+1)$. En posant $c_{n+1} = (n+2)/2(n+1)$, et $c_0=v_0$ par convention, on trouve *en calculant formellement* les termes successifs à partir de la relation $v_{n+1}=c_{n+1}(v_n + 1)$: $v_0=c_0$, $v_1= c_1c_0+c_1$, $v_2=c_2c_1c_0+c_2c_1+c_2$, $v_3=c_3c_2c_1c_0+c_3c_2c_1+c_3c_2+ c_3$, etc. Comme c_n converge vers 1/2 quand n tend vers l'infini, on peut penser à une tactique $\boxed{G}$: étant donnée une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ de nombres de [-1,1] tendant vers un nombre a de]-1,1[, déterminer la limite de la suite définie par $v_n=c_n+c_nc_{n-1}+c_nc_{n-1}c_{n-2} +\ldots+c_nc_{n1}\ldots c_2c_1+ c_nc_{n-1}\ldots c_1c_0$. Grand changement de point de vue !

(b) *Passage au graphique*

Nous avons déjà fait ce changement de point de vue, suggéré par la tactique $\boxed{B}$.

(c) *Passer du problème particulier à un problème général*

Ici, chaque f_n a un point fixe x_n unique, et chaque f_n est, pour $n\geq 1$, 3/4-lipschitzienne. Peut-être y a-t-il un énoncé général de convergence sous ce type de conditions ? D'où une tactique $\boxed{H}$: chercher un énoncé général de convergence pour des suites du type $u_{n+1}= f_n(u_n)$, chaque f_n étant k-lipschitzienne, k<1, et ayant un point fixe unique x_n.

(4) Faire « n = ∞ »

Ici, le facteur (n+2)/2(n+1)□1/2 quand n□+∞, donc on peut penser à la tactique déjà repérée « □-N avec encadrement » : tactique $\boxed{A}$.

III. Les stratégies de preuve

Elles correspondent à chacune des tactiques repérées. Nous laissons au lecteur le soin de mettre en œuvre lui-même les 8 solutions possibles appelées par chacune des 8 tactiques : il constatera que chacune marche, avec des techniques plus ou moins faciles, certaines pouvant être trop difficiles pour les étudiants (certaines décompositions d'une somme en deux morceaux).

Commentaire : cet exemple non trivial montre surtout l'efficacité de la méthode pour étudier des suites pas trop standard du niveau licence : elle donne assez facilement accès à plusieurs pistes de solutions, même s'il subsiste des difficultés dans certaines d'entre elles. Par ailleurs, cet exemple est particulièrement adapté pour faire travailler des étudiants en petit groupes (Robert 2008 ; Robert et Tenaud 1989). Les tactiques $\boxed{A}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{F}$ devraient apparaître spontanément dans plusieurs groupes d'étudiants, du moins si certains exemples plus ou moins analogues ont été traités en exercices.

III. ENSEIGNER CONCRÈTEMENT UNE METHODE

Nous nous appuyons sur l'exemple des suites, en présentant la trame de son enseignement tel qu'il a eu lieu plusieurs années.

Après l'introduction de la convergence des suites, par exemple par l'ingénierie de (Robert 1983), l'enseignant apporte un vocabulaire heuristique en commentant ce qu'il fait lors des preuves des énoncés généraux sur les suites (« on va faire de la méthode, on va classer, chercher à faire des hypothèses, chercher des pistes de démonstration… »...), bref un discours « *méta* », qui commence à « *donner des mots* » pour *dire* l'activité mathématique.

L'enseignant traite ensuite, en cours, une dizaine de suites avec des comportements divers, en utilisant explicitement la méthode, avec son vocabulaire déjà précis (techniques, tactiques, stratégies, changements de point de vue,…). Il nomme, explique et illustre certaines tactiques délicates et certaines manières d'explorer un problème de comportement de suite.

Un renforcement en travaux dirigés a alors lieu, traitant un à deux exemples de chaque type de comportement et de tactique ou stratégie. L'enseignant insiste pour *faire produire des commentaires* méta *par les étudiants*, sur les classements, les choix de stratégies et de tactiques.

C'est après ce processus qu'on expose *explicitement* - en cours magistral - *le contenu de la méthode*, en s'appuyant sur les exemples traités, et de nouveaux, pour montrer comment l'utiliser. Des commentaires *méta* plus généraux – épistémologiques et didactiques – sont apportés : pourquoi des méthodes, qu'est-ce que « résoudre un problème de mathématiques », quels grands principes de recherche (classer, simplifier, ramener à des situations connues, contrôler). C'est alors seulement qu'on distribue aux étudiants le texte écrit de la méthode. Une difficulté principale sera d'empêcher ensuite les étudiants de croire à une utilisation algorithmique de la méthode.

En TD, les étudiants travaillent alors par petits groupes (3 ou 4), sur une ou au maximum deux suites déjà assez élaborées, avec le contrat de mettre en évidence la ou les tactiques utilisées et comment ils les ont trouvées méthodiquement. L'organisation en petits groupes vise à ce que se développent échanges et discussions. On a ainsi utilisé la suite $u_1=1/2$, $u_{n+1}=[2n/(n+1)](u_n)^{1/2}$, en demandant aux groupes, dans un compte-rendu écrit, de noter les tactiques essayées, abandonnées, les raisons de ces choix, ce qui a mené au but… (On peut aussi plus tard utiliser l'exemple du II).

Quelle évaluation ? C'est une question difficile, comme pour tous les « projets longs » (Robert 1992). En particulier il est impossible de les évaluer comme on peut le faire de situations didactiques bien délimitées. Dans le cas présenté ici, d'un enseignement annuel où on a utilisé de nombreuses autres méthodes que celle sur les suites, en tenant régulièrement un important discours « *méta* » (en cours comme en travaux dirigés ou en atelier), il est très difficile d'avoir une évaluation spécialement ciblée sur cette méthode. Nous avons cependant deux indicateurs spécifiques au domaine des suites.

D'abord, nous avons donné dans un examen partiel l'énoncé suivant : « u_0 étant donné, on définit la suite u_n par : $u_{n+1}=u_n^2+\ln u_n$ si $u_n>0$, $u_{n+1}= -1989$ si $u_n\leq 0$. Quelles conjectures faites-vous sur cette suite ? ». Cet énoncé a eu un bon taux de succès.

Puis nous avons fait travailler en petits groupes les étudiants sur la suite présentée plus haut : $u_1=1/2$, $u_{n+1}=[2n/(n+1)](u_n)^{1/2}$. Chaque groupe a réussi à identifier au moins une tactique de solution, et plusieurs différentes sont apparues dans les ateliers.

Nous avons également un indice global : le taux de succès au diplôme du DEUG (en 2 ou 3 ans) a été de 59 % pour nos étudiants - mis en DEUG seconde année dans un enseignement « *standard* » -contre 48 % pour les autres étudiants, issus d'une section « *ordinaire* » de première année.

Certes, cet indice est d'interprétation délicate, car il dépend d'autres facteurs que le pur enseignement de méthodes en mathématiques : utilisation du discours « méta » toute la première année, rôle des autres disciplines, diversité des enseignants…

IV. CONCLUSION : QUESTIONS DE RECHERCHES

À l'issue de la présentation d'un exemple emblématique d'une méthode de résolution de problème effectivement utilisée, on peut revenir sur quelques questions, théoriques et pragmatiques. Tout d'abord, est-il utile et même nécessaire d'élaborer et d'enseigner l'utilisation de tels outils aux étudiants ? Le traitement de "suffisamment" d'exemples pourrait-il leur permettre d'élaborer une organisation de leur activité de résolution de problème (pas seulement aux très bons étudiants) ? Les exemples que les étudiants peuvent aborder par eux-mêmes seront-ils "assez riches" pour mettre en fonctionnement les concepts du domaine, les rendre opérationnels ? L'apport d'une méthode est son caractère organisé, systématique et la référence qu'offre sa forme rédigée. Ensuite, comment élaborer pratiquement une méthode ? ou comment s'approprier - en l'adaptant " à sa main " - une méthode existante ? L'enseignant peut-il se fonder sur sa propre activité de résolution, en visant à expliciter ce qu'il met en oeuvre dans des problèmes non triviaux (mais accessibles aux étudiants) ? Quel peut en être le coût et quelle valorisation ? Les conditions institutionnelles souhaitables ou nécessaires sont-elles rédhibitoires ? Reprendre la recherche sur l'enseignement de méthodes et sur les moyens d'évaluation de leur impact sur les étudiants – sur la résolution de problèmes et sur la conceptualisation - nous paraît donc nécessaire, malgré les difficultés d'évaluation d'ingénieries longues.

Enfin, il reste le problème difficile de l'apprentissage de méthodes par les enseignants et des manières dont ils peuvent les intégrer dans l'enseignement.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Une recherche d'ingénierie sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Grenoble : IMAG.

Delozanne E. (1994) Un projet pluridisciplinaire : ELISE un logiciel pour donner des leçons de méthode, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (1/2), 211–250.

Dorier J.-L. (ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question (panorama de la recherche didactique sur ce thème)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5–31.

Guyou C. (1946) *Algèbre et analyse*. Vuibert : Paris.

Larson L. C. (1983) *Problem-Solving Through Problems*. Springer Verlag.

Polya G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème*. Paris : Dunod.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en Deug. *Bulletin de l'APMEP* 340, 431–449.

Robert A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(2/3), 181–220.

Robert A. (2008) Laisser chercher les élèves : les faire travailler en petits groupes ? *L'ouvert* 117, 31–46.

Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1), 31–70.

Robert A., Rogalski J. (1988) Teaching and learning methods for problem-solving : some theoretical and psychological issues. *Proceedings of the 12 International Meeting for PME* (pp. 528–535). Veszprem, Hungary.

Robert A., Rogalski J., Samurcay R. (1987) *Enseigner des méthodes*. Cahiers de Didactique des Mathématiques 38, Paris : IREM.

Robert A., Tenaud I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(1), 31–70.

Rogalski J., Samurçay R., Hoc J.-M. (1988) L'apprentissage de méthodes de programmation comme méthodes de résolution de problèmes. *Le Travail Humain* 51(4), 309–320.

Rogalski M. (1987) *Comment chercher une primitive ?* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL, 22 pages.

Rogalski M. (1988) *Comment étudier la convergence d'une suite réelle? Un exemple de méthode.* Publication de l'UFR de mathématique de l'USTL, 8 pages.

Rogalski M. (1989) *L'étude qualitative des équations différentielles.* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL, 43 pages.

Rogalski M. (1990a) Enseigner des méthodes en mathématiques. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 65-79). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. (1990b) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. (1992) *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année.* Cahiers DIDIREM 11. Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. (1994) Les concepts de l'EIAO dépendent-ils du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 14(1/2), 43–66.

Rogalski M. (1995a) *De quelques méthodes en arithmétique élémentaire.* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL.

Rogalski M. (1995b) *Des méthodes pour la recherche de lieux géométriques en géométrie cartésienne*, 9 pages.Draft.

Rogalski M. (1999) *Quelques méthodes pour établir des inégalités.* Notes manuscrites pour les étudiants de CAPES. Université de Lille 1.

Schoenfeld A. (1978) Presenting a strategy for indefinite integration. *American Math. Monthly*, 673–678.

Schoenfeld A. (1980) Teaching problem-solving skills. *American Math. Monthly*, 794–805.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld A. (2007) Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM: the international journal on mathematics education* 39(5), 537-551.