Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

UTILISATION DE LA VISUALISATION DANS LE DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DES SÉRIES AVANT LE 17E SIÈCLE. UNE ANALYSE À TRAVERS LES OSTENSIFS

Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN[*] – Carlos CORREIA DE SÁ[**]

Résumé – Dans cet article, une revue de la littérature existante nous amène à souligner l'importance du raisonnement visuel pour l'apprentissage des mathématiques, en particulier des séries numériques ; or, l'enseignement actuel semble négliger cet aspect (le raisonnement visuel) et présente les séries souvent réduites aux aspects algébriques. En nous questionnant pour savoir si le développement historique des séries a fait appel à des ostensifs dans le cadre géométrique, nous faisons une révision du travail de mathématiciens avant le 17e siècle qui démontre le rôle important que ces ostensifs ont joué dans le développement des idées premières sur les séries.

Mots-clefs : séries, visualisation, ostensif, enseignement postsecondaire, analyse historique

Abstract – In this paper, a revision of literature leads us to stress the importance of visual reasoning for mathematics learning, in particular regarding numerical series ; however, current teaching practices seem to neglect this aspect (visual reasoning) and to introduce series usually reduced to algebraic aspects. Wondering whether the historical development of series has recurred to the use of ostensives in the geometric frame, we have made a revision of some mathematicians' work before the 17th century which shows the important role that these ostensives have played in the development of the first ideas about series.

Keywords: series, visualisation, ostensive, postsecondary education, historical analysis

I. INTRODUCTION

Cet article dresse un portrait sommaire de l'enseignement des séries infinies de nombres réels (*séries* dans ce qui suit), en faisant ressortir la prédominance d'un travail algorithmique et basé sur la manipulation symbolique pour ensuite présenter quelques moments de l'histoire des séries, en démontrant le rôle que les représentations visuelles (ou un raisonnement visuel) ont joué dans le travail de certains mathématiciens. Ceci nous amènera à nous questionner sur la disparition de ces représentations visuelles dans l'enseignement et leur rôle potentiel pour favoriser l'apprentissage des étudiants.

[*] Département de Didactique (Université de Montréal) – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca
[**] CMUP – Centro de Matemática da Universidade do Porto – Portugal – csa@fc.up.pt

González-Martín, A.S., Correia de Sá, C. (2015) Utilisation de la visualisation dans le développement historique des séries avant le 17e siècle. Une analyse à travers les ostensifs. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 653-665.

La notion de série joue un rôle central dans l'Analyse, ayant joué un rôle important dans son développement. Les séries peuvent être utilisées comme base pour d'autres notions mathématiques (telles que le calcul de l'aire sous une courbe en additionnant les aires de rectangles sous elle ou le développement décimal de nombres périodiques) et aussi pour modéliser plusieurs phénomènes (tels que l'intérêt cumulatif dans un compte bancaire ou la distribution d'un médicament dans l'organisme). Il est possible que ces éléments puissent en partie expliquer la présence des séries dans les programmes d'études de mathématiques postsecondaires dans plusieurs pays, souvent sous l'étiquette de « Fondements de l'Analyse Classique » (voir, par exemple, Hairer & Wanner 1996).

Dans le cas du Canada, l'éducation n'est pas une responsabilité du gouvernement fédéral, mais de chacune des provinces qui ont le mandat d'organiser leur propre système éducatif. Dans la province du Québec, l'éducation obligatoire se divise en deux niveaux : éducation primaire (6 à 11 ans) et éducation secondaire (12 à 16 ans). Les étudiants qui veulent poursuivre des études universitaires doivent compléter une formation de préparation à l'université de deux ans, appelée *collégial* ou *cégep*. C'est dans le cadre des études collégiales que les séries sont introduites en première année, pour les étudiants voulant poursuivre une carrière scientifique-technique. Cependant, malgré l'importance de cette notion dans les mathématiques et de sa présence dans les programmes d'études, son apprentissage n'est pas sans difficultés, comme nous le discutons dans la section qui suit.

II. PROBLÉMATIQUE

La quantité d'articles de recherche dans la littérature internationale sur la notion de série est plutôt restreinte. Cette notion apparait des fois implicitement dans certains travaux sur les suites ou la convergence (Boschet 1983; Robert 1982) et rares sont les travaux centrés sur la notion de série elle-même. Il faut aussi préciser que, parmi les travaux dans la littérature internationale sur les séries, la majorité analyse leur apprentissage, mais il n'existe pas beaucoup de travaux contemporains analysant leur enseignement. La révision de la littérature qui suit s'organise autour de trois axes principaux : le recensement de quelques difficultés qu'éprouvent les étudiants quand ils apprennent les séries, certaines recommandations pour leur enseignement et la présentation des séries dans les manuels.

Les séries étant étroitement liées à d'autres notions mathématiques telles que les limites, les suites et la convergence, il est naturel que les difficultés propres à ces notions soient aussi présentes avec les séries (par exemple, en ce qui concerne la convergence, voir Robert 1982). Par rapport aux difficultés d'apprentissage propres aux séries, nous considérons le travail de Kidron (2002), qui identifie plusieurs des difficultés principales avec les séries. Certaines parmi elles sont communes à la majorité des notions de l'Analyse : la vision de la somme infinie comme un processus ou comme un objet, l'intuition du processus infini comme un processus *potentiellement infini* ou comme une *somme infinie achevée*[1], et les contradictions trouvées chez les étudiants en ce qui a trait à leur *concept image* et leur *concept definition*. Kidron (2002) a aussi souligné les différences cognitives entre le fait de lire de gauche à droite ou de droite à gauche l'égalité $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ Elle identifie par ailleurs des difficultés évidentes dans l'utilisation de la notation symbolique par les étudiants. Cette dernière remarque est aussi faite par Mamona (1990), qui a souligné la confusion chez les étudiants entre suites et séries, en plus de leur résistance à voir les suites comme un type de fonction. Enfin, il a été aussi souligné que les difficultés avec les séries peuvent avoir un

[1] Nous préférons cette traduction pour « *actual infinity* » et l'avons déjà utilisée dans González-Martín (2011).

impact sur l'apprentissage de la notion d'intégrale (Bezuidenhout & Olivier 2000; González-Martín 2006).

En ce qui a trait aux recommandations concernant l'enseignement des séries, Bagni (2000, 2005) a suggéré que le recours à des exemples historiques pourrait aider les étudiants à surmonter certaines fausses conceptions, telles que « l'addition d'un nombre infini de termes implique une somme infinie » et met en garde qu'une transposition didactique pour enseigner les séries devrait prendre en compte les possibles réactions des étudiants, qui pourraient être semblables à celles des mathématiciens dans le passé. Par ailleurs, il distingue deux niveaux de conceptualisation pour les séries, l'opérationnel et le structurel et il mentionne que cette distinction n'est pas usuellement prise en compte dans l'enseignement ; notons que ces deux stages semblent proches des notions *outil – objet* présentés par Douady (1986). L'utilisation du raisonnement visuel pourrait aussi être avantageuse pour les étudiants (Alcock & Simpson 2004), surtout dans le but de les aider à attribuer un sens à la notion. En particulier, Alcock et Simpson (2004) ont argumenté que l'utilisation du raisonnement visuel pourrait être utile pour aider les étudiants à établir des liens entre les représentations formelle et visuelle des séries et suggèrent aussi que les étudiants qui utilisent régulièrement des images visuelles dans leur raisonnement en Analyse, en particulier sur les suites et les séries, partagent certaines caractéristiques positives : « tous voient les construits mathématiques en tant qu'objets, ils tirent rapidement des conclusions sur des ensembles d'objets et ils sont à ce point convaincus de leurs propres affirmations qu'ils les considèrent évidentes » (p.29).

Finalement, en ce qui concerne la présentation des séries dans les manuels, le travail pionnier de Robert (1982) relève diverses, et souvent inadéquates, représentations mentales et écrites sur la convergence des suites détenues et développées par des étudiants universitaires en France. Cette inadéquation était attribuée, du moins en partie, à la nature limitée des exercices utilisés lors de l'enseignement. Ces résultats coïncidaient avec ceux de Boschet (1983), obtenus à partir de l'analyse de la présentation des suites numériques dans les cours universitaires (en particulier, dans les manuels et les notes de cours des étudiants et des professeurs). Entre autres, elle a remarqué que les exemples existants promouvaient plutôt une variété de représentations pas toujours adéquates et que les suites n'étaient pas vues comme des cas particuliers des fonctions, ce qui a, à nouveau, été observé par Mamona (1990) quelques années plus tard. Boschet (1983) a aussi signalé que l'enseignement habituel inclut très peu d'exemples de représentations graphiques de la convergence, ce qui semble aller à l'encontre des recommandations d'Alcock et Simpson (2004).

Intéressés par l'enseignement des séries, nous avons mené une recherche pour étudier leur enseignement et l'impact potentiel de celui-ci sur l'apprentissage des étudiants. La première étape de cette recherche a considéré un échantillon de 17 manuels utilisés au niveau *collégial* sur une période de 15 ans (de 1993 à 2008 ; voir González-Martín, Nardi & Biza 2011). Dans ce niveau préuniversitaire, la converge des séries est introduite de façon formelle et l'accent est rapidement mis sur l'apprentissage des critères de convergence. Dans les manuels, le recours au visuel reste anecdotique et les auteurs prennent souvent pour acquis que les étudiants interpréteront d'une façon adéquate les images présentées, ce qui est loin d'être vrai (González-Martín 2014). Étant donné les recommandations de la recherche en général sur l'utilisation de la visualisation dans l'apprentissage des mathématiques et celles d'Alcock et Simpson (2004), particulièrement, en ce qui concerne les séries, nous nous demandons pourquoi l'enseignement des séries fait aussi peu recours aux aspects visuels possibles de cette notion. Se peut-il que cette notion ait été développée par les mathématiciens sans besoin de représentations visuelles ? Cela nous a amenés à nous intéresser au développement historique de la notion, plus particulièrement pour savoir si l'utilisation de représentations visuelles a joué un rôle important dans l'évolution des séries. Avant de formuler notre question de recherche de façon définitive, nous exposons les outils théoriques qui guident notre recherche et qui seront présents dans cette formulation.

III. CADRE THÉORIQUE

Afin de savoir s'il existe des *distances* importantes, surtout en ce qui concerne les aspects visuels, entre le savoir savant et le savoir à enseigner (Chevallard 1985) par rapport aux séries, nous présentons ici les outils principaux dont nous nous servons, issus de la théorie anthropologique. L'un des apports importants de cette théorie est donné par l'introduction de la notion clé d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie* (Chevallard 1999), attribuant un rôle important à la notion de *tâche* et établissant le postulat que « *l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique* » (Bosch & Chevallard 1999, p.83). La théorique anthropologique établit que la plupart des tâches institutionnelles sont des tâches routinières ; cependant, des types de tâches *problématiques* peuvent apparaître, puisqu'il n'existe pas de technique appropriée pour leur accomplissement. Ce type de tâches peut être à l'origine d'un *progrès* visant à étudier le problème dans le but de construire la technique manquante (p.84). En particulier, un *changement de cadres* peut s'avérer un moyen d'obtenir des formulations différentes à un problème, permettant sa résolution (Douady 1986, p. 11).

L'accomplissement des tâches, routinières ou *problématiques*, peut être associé à l'utilisation de matériels, soit physiques soit abstraits. Spécifiquement, les objets tels que les écritures, les formalismes, les graphismes, les mots et les discours, interviennent souvent en tant que *signes*, occupant la place d'autres objets qu'ils *représenteraient* (Bosch & Chevallard 1999, p.89). Ces objets, à leur tour, ont une fonction signifiante, qui permet de produire des objets mathématiques, mais qui en même temps conditionne l'activité mathématique qui les met en jeu. En particulier, « l'analyse didactique du développement du savoir mathématique – saisi dans la durée historique, dans l'histoire de vie d'une personne, ou dans la vie d'une classe – ne peut considérer comme secondaire cette dimension de l'activité, en lui assignant une pure fonction instrumentale dans la construction des concepts » (p.89).

Étant donné l'importance de ces notions, deux types d'objets sont distingués :

> Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). Ainsi, les objets « fonction » et « primitive d'une fonction » sont-ils des objets non ostensifs que nous avons appris à identifier et à activer par le moyen de certaines expressions, écritures et graphismes particuliers mis en jeu dans des pratiques et situations tout autant particulières (pp.88–89).

De la définition de ces deux types d'objets suit que toute activité humaine se laisse décrire comme une manipulation d'objets ostensifs et Bosch et Chevallard posent le principe que « *en toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs* » (p.91). De cette façon, « la mise en œuvre d'une technique se traduit par une *manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs* » (p.91) et la capacité à identifier et à manipuler ces ostensifs est le produit d'une construction institutionnelle. En ce qui concerne le développement historique d'une notion :

> […] Du point de vue de la genèse des objets, on peut dire que les ostensifs et les non-ostensifs *émergent ensemble* dans la praxis humaine, qu'ils sont des *émergents* de cette praxis, sans qu'on puisse établir *a priori* d'antériorité des uns par rapport aux autres. Toutefois, si l'on se restreint à une institution ou à un ensemble d'institutions données, et dans une période historique donnée, les situations peuvent montrer tantôt une avance du système des instruments ostensifs par rapport à un certain système de non-ostensifs – un concept peut manquer par exemple –, tantôt l'inverse, quand manquent un ou plusieurs objets ostensifs – par exemple une notation – qui donneraient aux objets non ostensifs un meilleur rendement dans le pilotage de l'activité (p.94).

Finalement, plusieurs registres ostensifs sont identifiés : « registre de l'*oralité*, registre de la *trace* (qui inclut graphismes et écritures), registre de la *gestualité*, enfin registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, la *matérialité quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés » (p.95).

Tous ces outils deviennent précieux pour nous. Dans l'évolution historique des séries, nous cherchons à analyser certains épisodes du développement du non ostensif « série » où la résolution de tâches *problématiques* a mis en place la manipulation d'ostensifs dans le registre de la trace, faisant appel à des représentations visuelles. Nos recherches se concentrent ici sur les travaux développés par des mathématiciens avant le 17e siècle et le début de la formalisation des séries et nous présentons les résultats principaux dans la section qui suit.

IV. ÉPISODES DANS LE DEVELOPPEMENT HISTORIQUE DES SÉRIES AVANT LE 17E SIECLE

La première chose que l'on constate en analysant les documents historiques sur les séries, c'est que cette notion n'a pas une très longue histoire. Les anciens grecs abhorraient tout usage de l'infini actuel, au moins à partir d'Aristote, ce qui empêchait la considération de sommes infinies. D'ailleurs, tant pendant l'Antiquité que pendant le Moyen-âge et la Renaissance, les cas où la mention des séries serait pertinente ne sont pas très nombreux. Ce n'est qu'à partir de la fin du 17e siècle que les séries acquièrent une importance de plus en plus grande en mathématiques.

Par ailleurs, à partir du 17e siècle, les séries apparaissent tout de suite comme des objets à caractère analytique : elles sont définies à partir de l'expression d'un terme général (donné d'habitude par une formule) et elles sont manipulées symboliquement avec le recours à l'écriture algébrique. À l'exception du critère de l'intégrale, il n'y a pas de représentation géométrique associée aux séries, que ce soit dans le Calcul Fluxionnel de Newton ou dans le Calcul Infinitésimal de Leibniz. Ce trait analytique des séries se maintient pendant tout le 18e siècle et reste dominant jusqu'à nos jours.

Pourtant, dans la longue période qui va de l'Antiquité jusqu'à la création du Calcul, on trouve des occurrences isolées où le lecteur moderne peut discerner la présence du non ostensif « série », avec comme référence, le développement graduel d'ostensifs pour s'y référer. Puisque les ostensifs correspondant à l'écriture analytique ne sont pas encore mis au point, le raisonnement du mathématicien doit ou bien s'exprimer de façon purement discursive, avec des ostensifs du registre de l'oralité, ou bien recourir à des ostensifs du registre de la trace liés à la géométrie. On a ainsi quelques occasions (qui restent malheureusement peu nombreuses) d'observer des représentations visuelles que les mathématiciens se faisaient des sommes infinies, avant d'en avoir une théorie analytique plus ou moins formalisée. Dans ce qui suit, nous allons nous arrêter sur quelques cas particuliers.

1. *Zénon d'Élée*

Le plus ancien exemple d'une somme infinie avec une valeur finie apparaît avec Zénon d'Élée (5[ième] siècle a. J.-C.) dans son paradoxe *Dichotomie* (Zafiropulo 1950, pp. 180–181). L'original du travail de Zénon ne nous est pas parvenu, mais la tradition nous a transmis la version suivante du paradoxe : Pour aller de A à B, un mobile doit passer d'abord par C, entre les deux ; mais avant d'arriver à C, le mobile doit passer par D ; et ainsi de suite (Fig.1). Selon ce raisonnement, le mobile n'arrivera donc jamais à B.

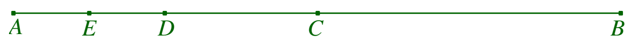

Figure 1 *– Paradoxe Dichotomie*

Le segment de droite AB est divisé en sous-segments, en quantité infinie, ayant chacun une longueur positive. Ce paradoxe permet d'une certaine façon de confronter le point de vue de l'infini potentiel (il faut passer étape par étape, alors le processus ne finit jamais) avec celui de l'infini achevé (on part d'une longueur finie, qui est décomposée en une infinité de morceaux, mais la longueur initiale reste inchangeable). On voit dans cette réflexion de Zénon les débuts de l'origine de l'objet « série » et ces origines semblent être liées à un raisonnement qui appelle à l'utilisation d'ostensifs visuels. Bien sûr, ce non ostensif n'inclut pas en ce moment historique toute la richesse et la complexité qu'il inclut actuellement ; il n'est réduit qu'à l'idée intuitive d'additionner, liée à un raisonnement qui appelle à des ostensifs visuels.

Cette interprétation visuelle est aussi présente dans son deuxième paradoxe, *Achille et la tortue*, qui a une apparence plus complexe parce qu'il fait intervenir deux mobiles (Zafiropulo 1950, pp. 181–182). Selon ce paradoxe, si dans une course Achille donne de l'avance à une tortue, il ne pourra jamais l'attraper. Supposons qu'Achille et la tortue partent des points A_0 and T_0 respectivement (Fig.2) :

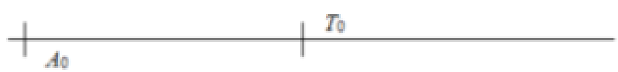

Figure 2 *– Configuration initiale du paradoxe Achille et la tortue*

Quand Achille arrivera au point de départ de la tortue (T_0, que l'on désignera maintenant aussi A_1), la tortue, elle, aura aussi avancé jusqu'au point T_1 (Fig. 3) :

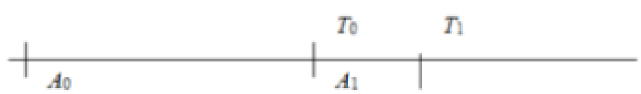

Figure 3 *– Deuxième étape du paradoxe Achille et la tortue*

À nouveau, quand Achille arrivera au point T_1 (que l'on désignera aussi A_2), la tortue aura encore avancé pour se rendre jusqu'au point T_2, et ainsi de suite. Ce processus se répétant à l'infini, Achille ne parviendra jamais à attraper la tortue, car il devra toujours atteindre d'abord une position déjà occupée par celle-ci et, pendant qu'il le fait, elle avancera encore un peu.

Évidemment, les grecs anciens savaient, aussi parfaitement que nous le savons aujourd'hui, que le rapide Achille arrive bien à attraper la lente tortue. Encore une fois, ce paradoxe appelle (ou semble provenir de) un raisonnement visuel, où il est légitime de se représenter le segment de droite qui va du point A_0 jusqu'au point où Achille rejoint la tortue. Ainsi, le paradoxe *Achille et la tortue* pourra alors apparaître comme étant essentiellement le même que celui de la *Dichotomie* : un segment de droite est divisé en un nombre infini de sous-segments de longueur positive, dont il est la somme. Si les vitesses d'Achille et de la tortue sont constantes, il s'agira même d'une série géométrique, comme dans le cas de la *Dichotomie*. Pourtant, il y a une différence qui peut être significative. Dans la *Dichotomie*, on part d'une totalité pour trouver ensuite la série dont elle est la somme, tandis que la formulation traditionnelle d'*Achille et la tortue*, par contre, conduit d'abord aux segments de droite élémentaires marqués par les positions des deux coureurs ; ces segments constituent la série et le cœur du paradoxe réside justement dans l'intuition fautive selon laquelle de telles parcelles ne sauraient avoir une somme finie (puisqu'elles sont en quantité infinie et chacune est positive). On y fait donc le parcours inverse, qui est aussi le plus habituel dans l'enseignement des séries.

Nous voyons alors que les origines du non ostensif « série » sont liées à l'idée intuitive d'addition d'une part et, d'autre part, à l'absence de volonté de créer une théorie, ce qui peut être associé au niveau opérationnel identifié par Bagni (2000, 2005) ou au niveau outil de Douady (1986). Et la naissance de cet objet est liée à l'utilisation d'ostensifs dans le registre de l'oralité, probablement basés sur une vision ou intuition d'ostensifs géométriques. Nous verrons que ces ostensifs restent présents dans les travaux ultérieurs des grecs, avec une complexification des ostensifs géométriques.

2. *Euclide et Archimède*

La méthode d'exhaustion, caractéristique des mathématiques anciennes, est attribuée à Eudoxe de Cnide (4ième siècle a. J.-C.) dont les travaux ne nous sont pas parvenus. Le mathématicien qui en a fait le plus grand usage a été Archimède de Syracuse (3ième siècle a. J.-C.), mais le premier registre historique de la méthode se trouve dans les *Éléments* d'Euclide (environ 300 a. J.-C.). Le fondement de la méthode d'exhaustion se trouve dans la première proposition du Livre X des *Éléments* d'Euclide (Peyrard 1993, pp. 258–259). Selon cette proposition-ci, étant données deux grandeurs A et B, du même type (c'est-à-dire, deux longueurs, deux aires, deux volumes, deux intervalles de temps, deux poids…), A étant plus grande que B, si on retire à A une partie plus grande que sa moitié, et si ensuite on retire à ce qui reste une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite, il en restera à un moment donné une grandeur plus petite que B.

Tout d'abord, on remarquera le caractère tout à fait finitiste de cet énoncé ; il en est de même pour les applications pratiques de la méthode d'exhaustion dans l'Antiquité, que ce soit chez Euclide ou chez Archimède. Cela n'empêche pas que l'on puisse rapprocher cette méthode de la somme de séries, où elle donne des exemples visuellement intéressants d'aires curvilignes comme *limite* ou comme *somme* d'aires polygonales inscrites. À titre d'illustration, voyons l'usage qu'en fait Euclide dans la deuxième proposition du Livre XII des *Éléments* (Peyrard 1993, pp. 445–446) et auquel Archimède fait référence dans la deuxième proposition de *La Mesure du Cercle* (Ver Eecke 1959, pp. 127–128). Étant donné un cercle, on lui enlève plus de sa moitié lorsqu'on enlève le carré inscrit (Fig. 4) :

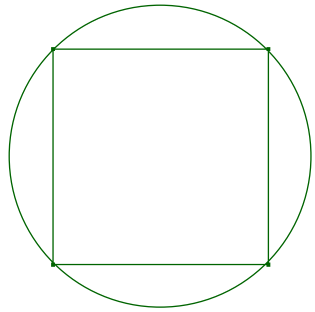

***Figure 4** – Première étape de La Mesure du Cercle*

Il reste alors quatre segments circulaires. Quand on y retire les quatre triangles isocèles montrés dans la Figure 5, il reste aux segments circulaires moins de la moitié :

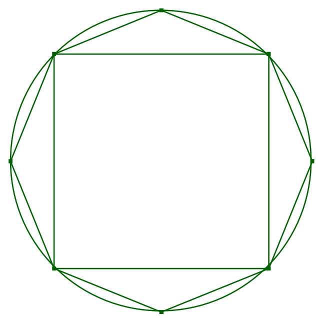

***Figure 5** – Deuxième étape de La Mesure du Cercle*

Si l'on continue ce processus, par la proposition *Éléments* X, 1 d'Euclide, on obtiendra une grandeur aussi petite qu'on le désire. Cette démarche peut être interprétée d'un point de vue analytique : la différence entre l'aire du cercle et l'aire des polygones réguliers inscrits peut se rendre aussi petite que l'on le veut, tout simplement en doublant successivement le nombre de côtés du polygone inscrit. Mais on peut aussi l'interpréter du point de vue des sommes de séries : si l'on additionne à l'aire du carré celle des quatre triangles isocèles, puis l'aire des huit triangles isocèles encore plus petits, et ainsi de suite, la somme de toutes ces aires sera égale à l'aire du cercle.

Dans ce travail, il est possible de voir l'utilisation explicite d'ostensifs géométriques pour développer une idée liée au non ostensif « limite », mais aussi au non ostensif « série ». Après Aristote, les grecs évitaient l'utilisation de l'infini achevé et nous voyons ici une façon de contourner cette limitation pour résoudre une tâche *problématique*, soit le calcul de l'aire du cercle, moyennant un changement de cadre. Ainsi, la notion de série qui était apparue pour réfléchir sur l'utilisation dangereuse de l'infini, devient un outil clé pour la résolution de certaines tâches avec la méthode d'exhaustion et les ostensifs associés se développent en conséquence.

3. Nicole Oresme

Nicole Oresme était un membre du clergé du 14$^{\text{ème}}$ siècle qui enseignait à l'Université de Paris. C'est dans son *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Clagett 1968, pp.

157–435) que se fait la première mention claire d'une somme infinie[2], apparaissant aussi apparaître une expression, un nouvel ostensif, pour cette notion.

Oresme prend deux carrés d'aire connue et décompose l'un d'entre eux en une quantité infinie de rectangles dont l'aire sera, respectivement, la moitié, le quart, le huitième, le seizième… de l'aire du carré original (Fig.6).

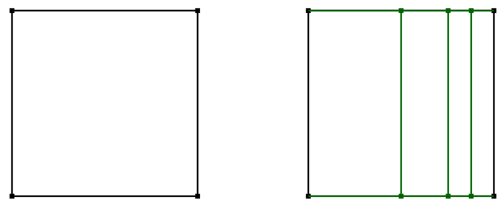

Figure 6 *– Deux carrés égaux*

Ensuite, il donne une nouvelle configuration à cet ensemble de rectangles, les posant « en escalier » les uns sur les autres et sur le premier carré (Fig.7). De cette façon, Oresme construit une figure qui n'est pas bornée, mais dont la valeur de l'aire est finie et connue à l'avance : c'est une aire égale à celle des deux carrés.

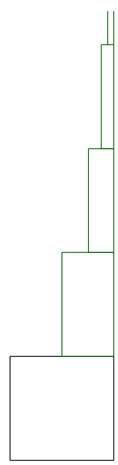

Figure 7 *– Nouvelle configuration de l'aire des deux carrés*

Oresme conclut alors (en langage contemporain) que la qualité[3] totale égale quatre fois celle de la première moitié ou, en termes de cinématique, que l'espace parcouru dans le temps total égale quatre fois l'espace parcouru pendant la première moitié du temps. D'un point de vue moderne, on peut interpréter la construction d'Oresme comme une intégrale impropre, puisqu'il s'agit d'une figure illimitée avec une aire finie. Mais il est aussi possible de l'interpréter comme une somme infinie d'aires. Si chacun des carrés de départ a une aire égale à 1, alors on aura la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...=2$.

[2] Oresme est aussi connu pour sa preuve que la série harmonique n'a pas de somme finie, qui se trouve dans *Questiones Super Geometriam Euclidis* (Mazet, 2003, pp. 70–71). Son raisonnement est identique à celui que l'on peut retrouver dans les livres d'Analyse d'aujourd'hui. Il ne fait donc aucun appel à la visualisation géométrique et ne sera donc pas considéré dans cet article.

[3] Il s'agit du langage utilisé à l'époque, faisant référence souvent à des magnitudes ou des *qualités*.

Une nouvelle tâche *problématique*, soit le calcul de l'aire d'une figure infinie, se présente à Oresme et encore une fois la notion de série, encore en développement et loin de la notion actuelle, devient un outil pour l'accomplissement de cette tâche. Cette configuration fait penser plutôt au raisonnement développé pendant le paradoxe *Dichotomie*, dans le sens où une grandeur connue est décomposée en une infinitude de parties, sans que la valeur initiale de la grandeur ne change. On observe aussi que la stratégie de reconfiguration permet, d'une certaine façon, d'éviter la notion de convergence (plus présente dans la méthode d'exhaustion) à travers une utilisation de l'infini achevé : la valeur est connue a priori et l'on ne fait que réorganiser les pièces.

4. *Leibniz*

Entre Oresme et Leibniz deux mathématiciens font appel à des changements de cadres utilisant des ostensifs visuels : il s'agit de Grégoire de Saint-Vincent et de Álvaro de Tomás. L'espace restreint dans cet article nous empêche de développer ici une analyse de leur travail fort intéressant en ce qui concerne les séries ; ceci sera fait dans d'autres publications futures.

Dans un travail intitulé *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, qui n'a été publié qu'en 1993 par Eberhard Knobloch, Gottfried Wilhelm Leibniz donne une construction géométrique pour la somme d'une série géométrique (Ferraro 2008, p. 26). Pour ce faire, il prend deux segments de droite colinéaires et consécutifs de longueur *a* et *b*, les deux premiers termes d'une série géométrique (Fig. 8), ayant pour but de résoudre une nouvelle tâche *problématique* : construire un segment de droite représentant la somme totale de la série géométrique.

Figure 8 *– Composition initiale de Leibniz*

La construction géométrique de la somme de la série continue comme il suit. On trace des perpendiculaires aux segments précédents de longueurs égales à *a* et *b* (si le segment de longueur *a* est à gauche, les perpendiculaires seront tracées par les extrémités gauches des segments donnés, comme dans la Figure 9).

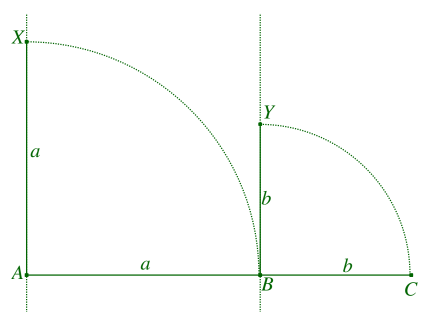

Figure 9 *– Traçage des perpendiculaires dans la composition de Leibniz*

La droite qui joint les extrémités supérieures de ces segments perpendiculaires coupera la droite sur laquelle se placent les segments initiaux de longueurs *a* et *b* en un point *S* (Fig. 10).

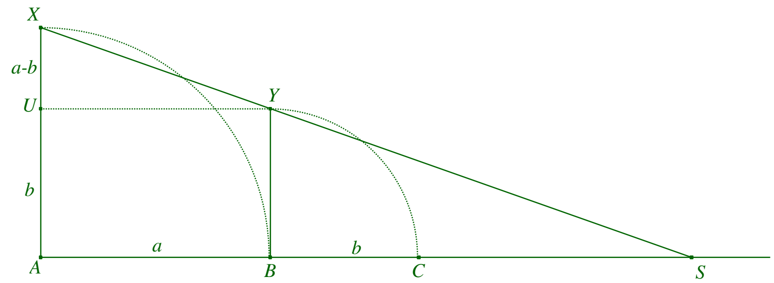

Figure 10 *– Repère du point S*

Alors, si l'on désigne $\overline{AB}$ le premier segment de longueur a, $\overline{AX}$ le segment de même longueur sur la perpendiculaire qui passe par A, $\overline{BC}$ le premier segment de longueur b et $\overline{BY}$ le segment de même longueur sur la perpendiculaire qui passe par B (et $\overline{AU}$ sa projection sur le segment $\overline{AX}$), Leibniz démontre que le segment $\overline{AS}$ a la même longueur que la somme de la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, où r désigne la raison (donc $b = ar$). Pour ce faire, il considère la similitude des triangles AXS et UXY et les rapports $\frac{m(\overline{AX})}{m(\overline{AS})} = \frac{m(\overline{UX})}{m(\overline{UY})}$, cette expression étant équivalente à : $m(\overline{AS}) = \frac{m(\overline{AX}) \times m(\overline{UY})}{m(\overline{UX})}$; cette dernière égalité peut être écrite comme : $m(\overline{AS}) = \frac{a \times a}{a-b} = \frac{a^2}{a-ar} = \frac{a}{1-r}$, qui est la formule bien connue pour la somme d'une progression géométrique de premier terme a et raison $r < 1$.

Dans ce cas, nous voyons que le résultat de la somme d'une série géométrique est associé à une nouvelle interprétation géométrique, qui permet, d'une certaine façon, sa réinterprétation, c'est-à-dire, en ce moment historique donné, le non ostensif est enrichi avec ce nouvel ostensif. Ce travail de Leibniz, cependant, n'a pas de signification historique dans le sens où il n'a pas eu de conséquences ultérieures pour les travaux d'autres mathématiciens.

Leibniz réussit à donner une réinterprétation à la notion de série géométrique en mettant en lien des ostensifs géométriques avec des ostensifs de l'écriture symbolique, récemment développée. Il met même en évidence un parallèle entre deux ostensifs opérationnels, à savoir, l'ostensif algébrique de la formule pour la somme d'une série géométrique et l'ostensif visuel de la construction géométrique de cette somme. Cet enrichissement du non ostensif, cependant, semble avoir été oublié et il est souvent absent des ouvrages sur les séries.

V. CONCLUSIONS

Nous nous étions demandés, à la fin de la problématique, s'il était possible que la notion de série ait été développée par les mathématiciens sans besoin de représentations visuelles et notre objectif était d'analyser quelques moments du développement historique des séries pour voir si la résolution de tâches *problématiques* avait mis en place la manipulation d'ostensifs dans le registre de la trace, faisant appel à des représentations visuelles, ceci pour nous questionner sur le potentiel possible de ces représentations pour favoriser l'apprentissage des étudiants. Notre recherche dans des documents historiques montre que les premières apparitions des séries (ou d'une notion qui serait reliée à ce que l'on appelle présentement série) étaient liées à des raisonnements ou des représentations ostensives géométriques.

Il semble être légitime de dire que les premières intuitions sur les séries, avant leur formalisation et leur développement analytique, s'appuyaient sur la création de ces ostensifs plutôt visuels et que cela a aussi été lié au développement de la méthode d'exhaustion (qui mène naturellement à la notion de limite) et à des configurations qui permettent de contourner les difficultés propres à l'utilisation de l'infini achevé. Néanmoins, à partir du 17e siècle, ces ostensifs se font rares avec l'utilisation de plus en plus usuelle des symbolismes. Cette réalité a déjà été exprimée par Bosch et Chevallard (1999) :

> […] on ne peut ignorer que, au moins depuis Viète, les mathématiques progressent par le biais du symbolisme écrit, de telle sorte que l'on peut presque suivre toute l'histoire de ce progrès en restant dans le registre de l'écriture. Les tendances formalistes nées de la crise des fondements de la fin du XIXe siècle ont porté cette évolution à son extrême, comme si l'écriture symbolique pouvait remplacer tous les autres registres, ne serait-ce que pour la formulation et la démonstration des vérités mathématiques (p.103).

Il semble que ce phénomène général en mathématiques ne fait pas exception dans le cas des séries et que les ostensifs développés en premier lieu sont relégués à une seconde place :

> Il convient maintenant de distinguer, dans l'analyse des objets ostensifs mobilisés dans une activité mathématique concrète, ceux qui, comme les notations, les symbolismes et certaines expressions verbales acquièrent un statut mathématique clair et jouent le rôle d'*instruments* de l'activité, de ceux qui, bien que fonctionnant comme des *moyens* indispensables au travail mathématique, sont considérés comme un accompagnement presque contingent de l'activité. Les développements antérieurs peuvent se traduire en disant que la mathématisation conduit à reléguer les objets matériels, les gestes et certains graphismes au simple statut de *moyens* du travail mathématique, en accordant le statut d'*instrument* aux seuls ostensifs appartenant au registre de l'écrit et, de façon moins nette, aux registre du graphique et de l'oral (Bosch & Chevallard 1999, p.105).

Si l'on prend en compte les recommandations de Bagni (2000, 2005), pour développer dans l'enseignement d'abord un niveau opérationnel et après un niveau structurel, ainsi que les résultats d'Alcock et Simpson (2004), la reconsidération de ces ostensifs dans l'enseignement pourrait avoir des effets intéressants pour l'apprentissage des étudiants. Pour les mathématiciens, les premières expériences avec le non ostensif « série » ont eu lieu à travers des ostensifs liés plutôt au visuel et il semble légitime se poser la question de si un cheminement semblable pourrait être utile pour les étudiants. Peut-être des activités de changement de cadre permettraient de donner une signification appropriée au symbolisme pour qu'il devienne un véritable *instrument* dans l'activité de l'étudiant. La construction donc d'activités menant à des organisations praxéologiques où ces ostensifs visuels aient un rôle d'instrument peut être une piste prometteuse pour des futures recherches, ainsi que pour la construction d'ingénieries, visant à améliorer l'apprentissage des étudiants.

REFERENCES

Alcock L., Simpson A. (2004) Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics 57*, 1-32.

Bagni G. (2000) Difficulties with series in history and in the classroom. In Fauvel J, Maanen J (eds.) *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 82-86). Dordrecht: Kluwer.

Bagni G. (2005) Infinite series from history to mathematics education. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. En ligne dans l'adresse: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf (avril 2010)

Bezuidenhout J., Olivier A. (2000) Students' conceptions of the integral. In Nakahara T., Koyama M. (eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 73-88). Hiroshima: PME.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-124.

Boschet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 141-163.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Clagett M. (Ed.) (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison: The University of Wisconsin Press.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Ferraro G. (2008) *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*. New York: Springer.

González-Martín A.S. (2006) *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Thèse de Doctorat, Université de La Laguna (Espagne).

González-Martín A.S. (2011) L'introduction du concept de somme infinie: une première approche à travers l'analyse de manuels. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes Colloque International Espace Mathématique Francophone 2009* (EMF2009) (pp. 1048-1061). Dakar (Sénégal). En ligne sous l'adresse: http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Gonzales.pdf

González-Martín A.S. (2014) Pre-university students' personal relationship with the visualisation of series of real numbers. In Liljedahl P., Nicol C., Oesterle S., Allan D. (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 201-208). Vancouver (Canada): PME.

González-Martín A.S., Nardi E., Biza I. (2011) Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 42(5), 565-589.

Hairer E., Wanner G. (1996) *Analysis by its History*. New York: Springer.

Kidron I. (2002) Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. In Cockburn A.D, Nardi E. (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 209-216). Norwich: PME.

Knobloch E. (Hg.), Leibniz G.W. (1993) *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen.

Mamona J. (1990) Sequences and series – Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 21*, 333-337.

Mazet E. (2003) La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne. « Questions 1 et 2 sur la Géométrie d'Euclide ». *Revue d'Histoire des Mathématiques* 9, 33-80.

Peyrard F. (1993) *Les Œuvres d'Euclide*. Paris : Albert Blanchard.

Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3), 307-341.

Ver Eecke P. (1959) *Les œuvres complètes d'Archimède suivies des Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* (Tome I). Paris : Albert Blanchard.

Zafiropoulo J. (1950) *L'École Éléate*. Paris : Les Belles Lettres.