

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AUX NIVEAUX POST- SECONDAIRE ET SUPÉRIEUR

Compte-rendu du Groupe de Travail n°7

Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN* – Stéphanie BRIDOUX** –

Imène GHEDAMSI*** – Nicolas GRENIER-BOLEY****

I. PRÉSENTATION

Les activités du groupe de travail ont été organisées dans un esprit de continuité avec les groupes de travail sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et universitaire lors des manifestations précédentes de EMF à Sherbrooke (2006 – GT6), à Dakar (2009 – GT7) et à Genève (2012 – GT7). Dans ce sens, nous avons identifié trois points d'intérêt prioritaires dans l'appel à communications :

- PI1. les difficultés liées à l'apprentissage de certains contenus mathématiques ; les organisations mathématiques dans ces niveaux et leurs conséquences sur l'apprentissage ; les difficultés liées au raisonnement, au formalisme et au symbolisme ;
- PI2. les difficultés liées à la transition secondaire/supérieur, notamment les micro-ruptures qui ont été mises en valeur entre ces deux institutions et dont l'accumulation conduit à une véritable rupture (Bloch & Ghedamsi 2005 ; Praslon 2000 ; Robert 1998) ;
- PI3. les difficultés liées aux pratiques des enseignants, par exemple le fait qu'elles prennent en partie pour référence les pratiques "expertes" des mathématiciens professionnels, cette référence n'étant toutefois ni explicite, ni tout à fait analogue d'un enseignant à l'autre (Robert 1998).

En nous appuyant de plus sur la thématique du colloque EMF 2015 « *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour enseignement et apprentissage* », nous avons choisi de ne pas occulter la double dimension, plurielle et universelle, des mathématiques. Les tensions entre ces deux dimensions se nourrissent, dans

* Université de Montréal – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca

** Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

*** Université de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr

**** Université de Rouen – France – nicolas.grenier-boleyn@univ-rouen.fr

une même institution, entre autres, des conceptions ou représentations qu'ont aussi bien les élèves/étudiants que les professeurs des notions mathématiques en jeu et du formalisme qu'elles requièrent. De plus, le caractère plus formel et plutôt universel des notions abordées dès la fin de l'enseignement secondaire est susceptible d'accentuer ces phénomènes et de rendre plus difficile le travail des étudiants et la gestion du professeur.

Dans ce contexte, l'appel à contribution du groupe de travail témoignait d'un double enjeu :

- situer les travaux du groupe dans la continuité de recherches antérieures faisant état de différents types de difficultés agissant sur l'enseignement/apprentissage des mathématiques à ces niveaux : celles liées à des contenus mathématiques spécifiques, celles liées à la transition secondaire/postsecondaire, celles liées aux pratiques des enseignants ;
- questionner les liens entre ces difficultés et certaines spécificités ou différences culturelles, voir dans quelle mesure les résultats de recherche obtenus ou les ressources conçues dans un certain contexte culturel en dépendent, voire pourraient être adaptés à d'autres contextes culturels.

Les propositions reçues et qui ont été retenues pour les actes du colloque traitent plutôt du premier enjeu. Par ailleurs, des questions relatives à la transition¹, au rôle du formalisme et à la pluralité des racines culturelles ont été abordées dans nos discussions. Nous y reviendrons à la fin de ce texte.

Les présentations qui ont eu lieu dans le groupe ont particulièrement abordé les aspects épistémologiques, institutionnels et cognitifs de l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur. Les discussions au sein du groupe ont par ailleurs permis de soulever de nouveaux éléments de réflexion que nous explicitons dans la section suivante. Plus précisément, les travaux ont notamment concerné :

- l'importance de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques dans le travail didactique ;
- l'analyse des difficultés des élèves/étudiants ;
- les propositions d'interventions didactiques ;
- la collaboration entre chercheurs et enseignants pour concevoir des situations d'enseignement.

Nous en venons maintenant à la synthèse des présentations qui ont eu lieu et que l'on décline suivant ces quatre axes, en ajoutant aussi les éléments principaux que ces présentations nous ont amenés à discuter.

II. TRAVAUX PRÉSENTÉS DANS LE GROUPE

Comme nous venons de le dire, les présentations qui ont eu lieu au sein de notre groupe ont été organisées autour de quatre axes. Ces quatre axes suivent, d'une certaine façon, les étapes du travail de recherche visant à intervenir aux niveaux postsecondaires : les analyses épistémologiques, les analyses institutionnelles et des difficultés des étudiants, l'élaboration et l'expérimentation d'alternatives ainsi que le travail de collaboration entre chercheurs et enseignants. Dans ce qui suit, nous résumons le contenu qui a été présenté dans le groupe de travail.

¹ Les articles ayant comme sujet principal des questions relatives à la transition ont fait l'objet des travaux du Projet spécial 3 (voir la section consacrée à ce projet spécial dans ces actes).

1. *L'importance de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques dans le travail didactique.*

Plusieurs travaux soulignent l'importance de la dimension épistémologique dans la recherche en didactique des mathématiques (voir par exemple les articles classiques de Artigue 1990, 1992), en particulier aux niveaux postsecondaires étant donnée la complexité des notions mathématiques en jeu (voir par exemple l'article récent de González-Martín, Bloch, Durand-Guerrier et Maschietto 2014). Dans ce sens, le travail présenté par González-Martín et Correia de Sá fait une revue du développement historique des séries numériques pour identifier les différents ostensifs utilisés par les mathématiciens. Leur travail fait ressortir l'importance que le cadre géométrique a eu dans l'évolution des premières intuitions relatives aux séries numériques, questionnant son absence dans les pratiques d'enseignement postsecondaire. Le travail mathématique dépend d'une façon fondamentale des ostensifs disponibles et de ceux qui sont accessibles aux étudiants (y compris à travers le professeur) ; or les ostensifs généralement mis en œuvre dans le cadre géométrique présentent des opportunités suffisamment conséquentes du point de vue de la visualisation. En lien avec la thématique du colloque EMF 2015, cette absence du cadre géométrique peut être justifiée, entre autres, par des phénomènes de transposition didactique qui véhiculent une vision universelle des mathématiques, où l'utilisation du langage formel prime, rendant plus difficile le travail des étudiants. Cette difficulté qui est liée à l'usage du symbolisme mathématique a déjà fait l'objet de plusieurs travaux de recherche (Bridoux 2011; Chellougui 2009 ; Durand-Guerrier & Arzac 2003 ; Weber & Alcock 2004). Ces travaux et d'autres ont clairement montré que la maîtrise par les étudiants du symbolisme mathématique (y compris formel) ne peut s'appuyer exclusivement sur une manipulation syntaxique d'ostensifs spécifiques.

Dans cet ordre d'idée, l'analyse de l'évolution des signes utilisés par les mathématiciens tant pour l'avancée du savoir mathématique que le développement de la pensée mathématique, peut s'avérer une piste prometteuse dans la construction d'ingénieries didactiques (Bloch & Gibel 2011). En particulier, les situations conçues sur la base d'une prise en compte des changements de cadres (Douady 1986) et/ou des conversions entre divers registres de représentations sémiotiques (Duval 1995), permettraient le maniement par les étudiants d'un canevas d'ostensifs (Bosch & Chevallard 1999) allant dans le sens d'une meilleure acquisition des savoirs du post-secondaire et du supérieur. En lien avec les points d'intérêts PI2 et PI3, l'étude de pratiques enseignantes intégrant l'utilisation de plusieurs cadres et/ou registres de représentations sémiotiques dans l'approche de certaines notions mathématiques abstraites pourrait donner des pistes sur la mise en œuvre de nouvelles organisations mathématiques pouvant faciliter, dans certains cas, la transition entre les niveaux pré-universitaire et universitaire.

Nos discussions nous ont, de plus, menés à mieux souligner le rôle des symboles mathématiques et de la visualisation dans l'acquisition des mathématiques du niveau postsecondaire et supérieur. Le rôle des représentations visuelles dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques aux niveaux postsecondaires a déjà fait l'objet de plusieurs travaux anglophones mais aussi de travaux issus de la communauté francophone tels que ceux de Maschietto (2001) et de Bloch (2003). Il nous a, néanmoins, semblé que ce sujet est toujours d'actualité et peut donner lieu à un champ de recherche de plus en plus fécond. Ainsi, il nous a paru primordial de développer davantage de recherches aux niveaux postsecondaires afin de mieux comprendre le développement des différents ostensifs liés à certains concepts mathématiques abstraits, tant dans une perspective historique que par leur usage en pratique, et de voir dans quelle mesure l'utilisation de certains ostensifs pourrait permettre une meilleure appréhension d'autres ostensifs. Par exemple, Aspinwall, Hacıomeroglu et Presmeg (2008) ont élaboré un modèle pour mesurer la préférence d'usage d'ostensifs algébriques ou

d'ostensifs visuels (de types graphique ou géométrique) en ce qui concerne les dérivées. Leurs résultats semblent indiquer que les étudiants qui réussissent le mieux basent leur travail sur un usage mixte d'ostensifs. Par ailleurs, il semblerait qu'un usage approprié du langage verbal permettrait aussi bien de maîtriser les divers types d'ostensifs que des liens qu'ils entretiennent. D'autres travaux sont encore nécessaires, surtout pour des notions mathématiques plus abstraites, pour mieux comprendre l'utilisation des différents ostensifs par les étudiants et mieux comprendre comment cette utilisation (et les liens construits entre les différents ostensifs et représentations) permet aux étudiants d'appréhender les notions mathématiques en jeu.

2. *L'analyse des difficultés des élèves/étudiants.*

Le travail de Litim, Zaki et Benbachir fait une analyse des difficultés rencontrées par les étudiants de première année universitaire dans l'apprentissage de la convergence des suites numériques, identifiant plusieurs origines pour ces difficultés. Parmi ces difficultés, ressortent celles liées à la manipulation de symboles abstraits, à la confusion entre suite et série, à l'application incorrecte de propriétés et de théorèmes et à l'interprétation des propriétés topologiques. Les résultats de ces auteurs rejoignent ceux qui ont été identifiés par d'autres chercheurs depuis longtemps (par exemple, le travail de Cornu 1991 ; Robert 1983). La persistance de ces difficultés chez les étudiants semble témoigner de l'absence d'une réelle prise en compte de celles-ci au sein de l'enseignement aux niveaux postsecondaires : pour quelles raisons les résultats de recherche au niveau postsecondaire ont-ils eu aussi peu d'impact sur les pratiques ordinaires d'enseignement (sujet déjà abordé, entre autres, par Artigue 2001) ?

En lien avec le point d'intérêt PI1, nos discussions dans cet axe nous ont menés à discuter de la pertinence de considérer la notion de convergence en tant que notion FUG (formalisatrice, unificatrice, généralisatrice – voir Robert 2008) et des difficultés d'apprentissage que cela implique. La conception d'une séquence d'enseignement consacrée à la notion de convergence considérée comme notion FUG est justement traitée dans le travail de Grenier-Boley et ses collègues, que nous discutons plus bas. Nos échanges nous ont fait aussi réfléchir à l'effet qu'ont les pratiques d'enseignement habituelles sur l'apprentissage des étudiants et au fait que les tâches présentées dans certains livres ou recueils conduisent les étudiants à développer certaines (in)compréhensions, voire à des représentations erronées de la notion, pouvant même mener certains d'entre eux à un niveau de réussite technique acceptable, en dépit d'une compréhension des notions en jeu. Ce type de résultats a été explicité depuis longtemps (Boschet 1983) et la situation ne semble pas s'améliorer plus de trente ans plus tard. Dans ce sens, l'étude des différentes micro-ruptures dans le passage lycée – université, mais aussi entre différents domaines des mathématiques (*Calculus – Analyse, Analyse – Algèbre, ...*) semble être l'une des pistes prometteuses pour mieux comprendre certaines difficultés et proposer, dans le même temps, des interventions didactiques (voir par exemple le cas des espaces duaux dans Winsløw, Barquero, De Vleeschouwer & Hardy 2014).

Tenant compte de la thématique du colloque EMF 2015, il serait intéressant de développer des travaux ayant pour but d'amener une dimension plutôt plurielle (et moins universelle, du moins au tout départ) des mathématiques postsecondaires. Étant donné le fait que plusieurs des difficultés identifiées par la littérature sont en lien avec le langage et les modes de raisonnement formels, une co-construction de certaines notions et de leur sens pourrait éventuellement aider à pallier à certaines de ces difficultés (voir par exemple Ghedamsi 2008).

3. *Les propositions d'interventions didactiques.*

Dans cet axe, les travaux de Grenier-Boley et la Commission Inter-IREM Université, ainsi que de Rogalski et Rogalski ont été présentés. Le premier en lien avec l'introduction à la définition formelle de limite (tant pour les fonctions que pour les suites numériques) et le deuxième en lien avec la problématique d'enseignement des méthodes pour la résolution de tâches (avec le cas particulier des suites numériques). Dans les deux cas, les auteurs ont en particulier discuté des conditions pour la mise en place effective de pratiques innovantes au niveau postsecondaire, en parallèle de conditions permettant d'assurer le déroulement efficace de telles innovations en termes de recherche. En reprenant deux ingénieries didactiques du début des années quatre-vingt, Grenier-Boley et ses collègues démontrent comment les aspects épistémologiques liés à une notion mathématique peuvent être pris en compte pour sélectionner des variables didactiques permettant de les adapter à un public d'étudiants actuels. En revanche, le travail de Rogalski et Rogalski montre dans quelle mesure la transposition du travail du mathématicien en salle de classe par le biais des méthodes de résolution de problèmes revêt un caractère général dans ses modalités d'enseignement.

Ces travaux font un lien entre les points d'intérêt PI1 et PI3, démontrant – s'il en était besoin – le rôle clé que les analyses préalables peuvent jouer pour l'essai de nouvelles approches. En particulier, des liens avec les deux axes précédents ont été discutés, tels que l'utilisation de différents ostensifs, l'importance de la prise en compte d'une dimension épistémologique et la prise en charge par la nouvelle séquence didactique des difficultés des étudiants. Ces éléments deviennent clés aux niveaux postsecondaires et essentiels pour la construction d'ingénieries (voir par exemple González-Martín et al. 2014), tel que souligné dans des colloques EMF précédents, par exemple, dans le cas de la topologie. Le travail de Bridoux (2011), centré sur les premières notions de topologie, là encore interprétées comme des notions FUG, propose une gradation d'ostensifs pour élaborer une séquence d'introduction aux premiers concepts de topologie et les résultats indiquent que l'intervention a permis aux étudiants de mieux mettre en fonctionnement les notions dans les exercices proposés par l'enseignant, notamment dans la manipulation du formalisme et dans l'utilisation d'ostensifs graphiques.

Nous voyons là encore des liens avec la thématique du colloque EMF 2015. Les interventions didactiques citées dans cette section témoignent bien du fait que le caractère universel et formalisé des mathématiques, surtout aux niveaux postsecondaires, n'est pas toujours la meilleure porte d'entrée pour les étudiants et qu'il est possible, à travers des interventions adéquates, de permettre un accès graduel aux notions mathématiques. La création d'une nouvelle culture et le passage progressif à la « culture mathématique » semblent possibles à travers diverses gradations qui soient plus sensibles aux aspects épistémologiques et aux difficultés des étudiants. Cette co-construction d'une culture commune est abordée dans l'axe suivant.

4. *La collaboration entre chercheurs et enseignants pour concevoir des situations d'enseignement.*

Le travail de Squalli, Bombardier, Adihou et Raymond introduit la notion de *situation signifiante* comme outil de travail collaboratif entre les chercheurs et les enseignants de mathématiques au niveau postsecondaire (*collégial* au Québec). Il est montré que la combinaison de différentes expertises dans des travaux de recherche-action peut être à l'origine de la production d'activités mathématiques où la modélisation acquiert un rôle fondamental. De plus, les tensions qui existent parfois entre la communauté de mathématiciens et celle des didacticiens pourraient être minimisées par des éléments qui

relient ces deux communautés, surtout aux niveaux « avancés », donnant ainsi naissance à des collaborations fructueuses (voir par exemple Nardi 2008).

Cette présentation, en lien avec les points d'intérêt PI2 et PI3, souligne les difficultés de la double transition vécues au Québec par les étudiants du *collégial* (deux années de préparation à l'université) : une première transition est vécue entre la fin du secondaire et le *collégial*, puis une deuxième aura lieu entre le *collégial* et l'université. Dans le travail présenté, une acclimatation à la « nouvelle culture » du *collégial* a lieu et de nouvelles tâches sont construites par une équipe composée de mathématiciens et de didacticiens, impliquant un processus de modélisation. La recherche internationale a évoqué l'importance croissante de la modélisation pour l'apprentissage des mathématiques et ce, du primaire à l'université (Blum, Galbraith, Henn, Niss 2007). En particulier, la recherche a souligné récemment l'intérêt d'aborder l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques auprès de clientèles avec un profil plutôt professionnel (tel qu'en ingénierie, par exemple – voir Artigue, Batanero, Kent 2007). Le rôle des mathématiques pour ces clientèles, en particulier ses aspects très formalisés, est questionné et des approches qui mettent la modélisation (surtout de phénomènes qui feront partie du quotidien des futurs professionnels) au cœur des pratiques d'enseignement semblent être des pistes à explorer. De plus, il a été souligné que les connaissances, les croyances et les pratiques des enseignants de mathématiques aux niveaux postsecondaires n'ont fait l'objet que de recherches récentes (Rasmussen, Marrongelle, Borba 2014), et qu'il serait en particulier primordial de développer davantage de travaux de recherche sur les pratiques d'enseignement au niveau universitaire (Speer, Smith, Horvath 2010). Le type de travail collaboratif présenté dans cet axe pourrait être l'une des façons de mieux documenter ces pratiques, en plus de pouvoir avoir une incidence sur le manque de formation à l'enseignement habituel aux niveaux postsecondaires.

Ces éléments de discussion nous ont amenés à revenir à la thématique du colloque EMF 2015, pour voir qu'il est possible de reconstruire une certaine « culture de l'enseignement des mathématiques avancées » auprès des enseignants de ces niveaux. De plus, le contexte est très présent dans le travail discuté ici, car il s'agit d'aider les étudiants dans la double transition que leur contexte éducatif impose. Ces résultats, pourtant, peuvent être transférables dans d'autres contextes, dans la visée de donner à la modélisation un rôle clé et de promouvoir le travail collaboratif entre didacticiens et enseignants des mathématiques aux niveaux postsecondaires.

III. PISTES POUR LA RECHERCHE À VENIR

Nos discussions se sont situées de façon naturelle en continuité avec les trois thématiques identifiées par les participants au GT7 dans le colloque EMF 2012 (Azrou, Bridoux & Tanguay 2012) :

- Les difficultés récurrentes en matière de formalisme et le rôle du registre symbolique dans la formalisation des notions enseignées, ainsi que l'importance d'un travail sémantique sur les notions enseignées à mener en parallèle avec un travail syntaxique.
- Le développement d'interventions pour prendre en charge les difficultés des étudiants, ainsi que le développement d'aptitudes plus « transversales » aux mathématiques.
- Le rôle de l'enseignant, le rôle du discursif et celui des commentaires méta-mathématiques.

Cependant, plusieurs thématiques ont été identifiées comme absentes (ou peu présentes) tant dans les présentations faites au sein de notre groupe que dans la recherche en général. Nous en citons ici quelques-unes :

1. Un peu par hasard, le contenu mathématique abordé dans les présentations ne concernait que des notions de l'Analyse (suites, séries, limites et convergence). La remarque faite par Artigue (2001) sur le fait que la recherche au niveau postsecondaire s'était centrée sur un nombre limité de notions semble être toujours d'actualité. Bien que de grands pas aient été amorcés pour aborder d'autres notions (l'algèbre linéaire, la théorie de groupes, la statistique, la topologie...), il semble que les notions des premières années de l'Analyse dominent encore les travaux de recherche. Ceci a été souligné aussi récemment dans le cas du congrès PME, où la proportion d'articles traitant les fonctions, les dérivées, les intégrales et les limites est très grande en comparaison avec le nombre d'articles traitant d'autres sujets (équations différentielles, fonctions à deux variables... – voir Hitt & González-Martín, à paraître).
2. Il existe peu de travaux dans la littérature sur les pratiques des mathématiciens professionnels et une meilleure compréhension de leurs pratiques et appréhension des mathématiques pourrait permettre de mieux guider les étudiants au niveau universitaire (Harel, Selden & Selden 2006). Dans ce sens, par exemple, le travail de Inglis et Alcock (2012) a analysé la façon de lire des démonstrations formelles chez des mathématiciens et chez des étudiants, identifiant des différences significatives; ces différences, ainsi que la prise en compte des éléments importants pour la lecture d'une preuve chez les mathématiciens, ont eu des implications pédagogiques importantes.
3. En lien avec le point précédent, nous n'avons pas une connaissance suffisante, en tant que communauté de recherche, de l'utilisation que font les mathématiciens experts de la visualisation (dans un sens large), en particulier dans les domaines mathématiques très abstraits. Nous avons besoin de recherches sur le rôle que les différents ostensifs peuvent jouer dans leur compréhension des notions mathématiques, ainsi que pour avancer dans leur travail (faire des conjectures, construire un modèle...), car cela pourrait mener à introduire ces usages dans les pratiques d'enseignement.
4. Tel que nous l'avons dit plus haut, il y a une lacune importante en recherche par rapport à l'analyse de pratiques enseignantes aux niveaux postsecondaires (Speer et al. 2010), ainsi que sur les sources de connaissances qui sous-tendent ces pratiques. Le manque d'une formation didactique et à l'enseignement fait qu'il est légitime de se questionner sur la manière dont les enseignants du postsecondaire construisent leurs connaissances sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ainsi que la manière dont les pratiques mobilisées par leur formation disciplinaire initiale éventuellement influencent leurs pratiques ultérieures et leur vision de l'enseignement universitaire.
5. Nous avons aussi souligné plus haut l'émergence de tout un champ de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans des facultés autres que celle de mathématiques. Quelles mathématiques sont nécessaires pour former de futurs professionnels, quelles notions peuvent être utilisées sans être formalisées, quel serait le rôle de la modélisation...? Ce sont des questions qu'il paraît nécessaire de traiter en recherche pour guider les prises de décisions institutionnelles, étant donné le nombre croissant d'étudiants qui s'inscrivent dans des facultés professionnelles, ainsi que les taux élevés d'abandon et ce, depuis les années 80 (Rasmussen & Ellis 2013).

6. Enfin, parmi les sujets discutés, nous citons celui de l'évaluation aux niveaux postsecondaires. Il est vrai qu'il existe peu de travaux de recherche sur les pratiques d'évaluation, ses enjeux et ce qui est vraiment évalué, entre autres, aux niveaux primaire et secondaire, et cela demeure encore plus vrai aux niveaux postsecondaires. Étant donnés les différents profils d'étudiants qui reçoivent des enseignements de mathématiques, il est primordial de mieux comprendre comment ces étudiants sont évalués, comment l'évaluation influence les pratiques d'enseignement, ainsi que la manière dont l'évaluation prépare (ou non) de façon adéquate les futurs professionnels.

Nous espérons que ce compte-rendu reflète de façon fidèle l'essentiel de nos discussions et échanges pendant le colloque. Plusieurs pistes de recherche s'ouvrent et nous espérons voir dans l'avenir des travaux abordant ces thématiques.

De plus, le domaine de la recherche aux niveaux postsecondaires se consolide sur le plan international et plusieurs des participants au GT7 sont impliqués dans d'autres activités à venir :

- Le premier colloque du réseau *International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM), qui aura lieu à Montpellier en mars 2016.
- Les *topic study groups 2 (Mathematics education at tertiary level)* et 16 (*Teaching and learning of calculus*) dans le prochain congrès ICME13, en Allemagne en juillet 2016.
- Le *Thematic Working Group 14 (University Mathematics Education)* dans le prochain congrès européen CERME10, qui aura lieu en février 2017 en Irlande.
- La nouvelle revue internationale *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, dont le premier numéro est paru en avril 2015.

Étant données les nombreuses opportunités pour poursuivre les échanges et partager des résultats de recherche sur les niveaux postsecondaires, nous espérons vivement que les activités du GT7 vont se multiplier et que nos échanges continueront sur ces plusieurs forums, en attendant la tenue du prochain EMF 2018.

REFERENCES

- Artigue M. (1990) Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (2.3), 241-286.
- Artigue M. (1992) The importance and limits of epistemological work in didactics. In Geeslin W., Graham K. (Eds.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 195-216). Durham: PME.
- Artigue M. (2001) What can we learn from educational research at the university level? In Holton D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study* (pp. 207-220). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Artigue M., Batanero C., Kent P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In Lester F.K. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011-1049). Greenwich, CT: NCTM / Information Age.
- Aspinwall L., Haciomeroglu E.S., Presmeg N. (2008) Students' verbal descriptions that support visual and analytic thinking in Calculus. In Figueras O., Cortina J.L., Alatorre S., Rojano T., Sepúlveda A. (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME32 and PME-NA 30* (vol. 2, pp. 97-104). Mexico: Cinvestav-UMSNH.
- Azrou N., Bridoux S., Tanguay D. (2012) Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur – *Compte rendu du Groupe de Travail n°7*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le*

- 21^e siècle – Actes du colloque EMF 2012 (GT7, pp. 945-952). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Bloch I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52, 3-28.
- Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? *Petit x* 69, 7-30.
- Bloch I., Gibel P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(2), 191-227.
- Blum W., Galbraith P., Henn H., Niss M. (2007) (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York : Springer.
- Bosch M., Chevillard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19 (1), 77-124.
- Boschet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 141-163.
- Bridoux S. (2011) Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot – Paris VII.
- Chellougui F. (2009) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université : entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29 (2), 123-154.
- Cornu B. (1991) Limits. In Tall D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 5-31.
- Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.
- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchâtel : Peter Lang.
- Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse de Doctorat. Université Bordeaux 2.
- González-Martín A.S., Bloch I., Durand-Guerrier V., Maschietto M. (2014) Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education* 16 (2), 117-134.
- Harel G., Selden A., Selden J. (2006) Advanced mathematical thinking. Some PME perspectives. In Gutiérrez A., Boero P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172). Sense Publishers.
- Hitt F., González-Martín A.S. (à paraître) Generalization, covariation, functions and calculus. PME contributions in the last ten years. In Gutiérrez A., Boero P., Leder G. (Eds.) *Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Sense Publishers.
- Inglis M., Alcock L. (2012) Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education* 43 (4), 358-390.
- Maschietto M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21 (1-2), 123-156.
- Nardi E. (2008) *Amongst mathematicians. Teaching and learning mathematics at university level*. New York: Springer.

- Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- Rasmussen C., Ellis J. (2013) Who is switching out of calculus and why. In Lindmeier A.M., Heinze A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 73-80). Kiel (Germany): PME.
- Rasmussen C., Marrongelle K., Borba M.C. (2014) Research on calculus : what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education* 46 (4), 507-515.
- Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* 340, 431-449.
- Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.
- Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 45-56). Toulouse : Octarès.
- Speer N.M., Smith J.P., Horvath A. (2010) Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior* 29(2), 99-114.
- Weber K., Alcock L. (2004) Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics* 56(2-3), 209-234.
- Winsløw C., Barquero B., De Vleeschouwer M., Hardy N. (2014) An institutional approach to university mathematics education : from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education* 16 (2), 95-111.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



« PROGRESSER EN GROUPE » (PEG)
ET « APPRENTISSAGE PAR PROBLÈMES ET PAR PROJETS » (APP):
DEUX PÉDAGOGIES COLLABORATIVES EFFICACES

Kouider BEN-NAOUM*, Christophe RABUT**, Vincent WERTZ*

Résumé – Nous présentons rapidement dans cet article les pédagogies PEG et APP, nous en comparons le mode opératoire et les exigences vis-à-vis des étudiants. Diminution drastique du nombre de cours magistraux, efficacité de la collaboration entre les étudiants, alternance du travail individuel et du travail en groupe, tels sont les mots clefs et points communs des pédagogies collaboratives en question.

Mots-clefs : Pédagogies collaboratives, Apprentissage par Problèmes et par Projets, Progresser en Groupe

Abstract – We present in this paper two collaborative learnings, « Working In Groups » (WIG) and Problem Based Learning (PBL). We compare the ways of doing and the main items required to the students. Important decrease of the number of lectures, efficiency of student collaboration, alternating personal and group working, here are the main features and the common points of these two collaborative learnings.

Keywords: collaborative learning, Problem based learning, Working in Groups

I. INTRODUCTION

Tous ces dispositifs utilisent le point fondamental que le travail en groupe permet de faire bien davantage et bien mieux que le travail uniquement individuel. La combinaison et l'alternance du travail individuel et du travail en groupe permettent d'une part une bien meilleure compréhension, acquisition et assimilation des concepts, d'autre part de résoudre des difficultés qu'aucun des individus composant le groupe n'aurait pu résoudre seul.

L'APP part d'un *problème* et l'étudiant doit acquérir certaines notions, concepts et savoir-faire pour pouvoir le résoudre. Le problème est donc le moteur de motivation pour l'étudiant. C'est un défi pour l'étudiant, puisqu'il ne dispose pas encore des outils nécessaires à sa résolution. L'étudiant va donc rechercher et acquérir de nouvelles notions et outils pour pouvoir apporter une réponse au problème posé.

Au contraire, PEG part du postulat que les notions et concepts méritent d'être étudiés en tant que tels et qu'il est préférable de les acquérir indépendamment de leur utilisation dans le cadre d'un problème. En ce sens PEG est davantage orienté « matière » que l'APP.

Le détail du travail à faire est indiqué plus précisément pour PEG que pour l'APP. Par ailleurs le rôle et le séquençement des séances sont plus proches du dispositif traditionnel pour PEG que pour l'APP. Beaucoup croient que les pédagogies collaboratives s'appliquent mal au cas des mathématiques. Ce qui est une erreur. Nous estimons donc utile de les présenter rapidement ici.

II. L'APPRENTISSAGE PAR PROBLEMES

Le principe de la méthode est de poser un exercice ou un problème aux étudiants, dont la résolution nécessite d'assimiler une partie du cours pas encore étudiée. Ils doivent donc identifier clairement de quelle partie ils ont besoin, acquérir les notions et théorèmes en question, puis résoudre l'exercice ou le problème. Pour « résoudre » un problème, les élèves répartis en équipes de 4 à 6 travaillent ensemble encadrés par un enseignant. Le rôle de celui-ci est essentiellement d'accompagner l'équipe dans sa démarche d'apprentissage, de s'assurer qu'elle travaille de manière collaborative, de guider le travail d'investigation en orientant celui-ci par de nouvelles questions, d'aider à ce que celui-ci soit le plus efficace possible.

Les cinq étapes suivantes jalonnent cette activité :

- Introduction du problème et identification des concepts mathématiques nécessaires.
- Acquisition des concepts, travail personnel, puis confrontation en équipe.
- Mise en pratique des apprentissages (exercices).
- Approfondissement des concepts, étude théorique, en travail individuel et/ou en équipe ;
- Maîtrise des concepts (cours de restructuration).

III. PROGRESSER EN GROUPE

Faire travailler les étudiants sur le cours, en équipe, est l'idée centrale de la méthode PEG. Deux moyens sont proposés pour cela ; ils sont basés sur le fait que les étudiants travaillent individuellement puis en équipes (une équipe est idéalement constituée de 4 étudiants), et qu'ils échangent sur le contenu du cours en tant que tel ([Rabut]).

Il faut éviter la répartition des tâches. Pour cela on ne demande aucun rendu d'équipe. Le but du travail en groupe est de s'aider mutuellement à acquérir et assimiler les savoirs et les compétences visés par l'enseignant. Il faut exiger un **travail personnel préparatoire précis** ; ce travail nivelle par le haut le niveau des étudiants et il fait gagner du temps en séance ; il rend donc le travail des étudiants comme de l'enseignant plus efficace.

Dans les deux approches présentées ci-dessous il n'y a pas de cours magistral présentant les notions nouvelles, et l'assimilation des notions est faite essentiellement en équipe, avec la présence et l'aide de l'enseignant.

1. *L'étude du cours : première approche*

Les étudiants doivent lire avant la séance et en travail personnel une partie précise d'un document (« de la page tant à la page tant » d'un polycopié, d'un livre), en identifiant ce qui n'est pas clair pour eux, ce qui est difficile et/ou mal compris, ce qui est important enfin.

En séance, les étudiants sont regroupés en équipes et discutent sur leur travail, sur le contenu du cours : ils confrontent leurs difficultés, tentent de résoudre ensemble les difficultés de tel ou tel membre de l'équipe, approfondissent les notions et les points importants,

discutent éventuellement sur leurs conséquences. Lorsque, malgré la discussion, une difficulté persiste, l'équipe doit formuler une question qu'elle pose à l'enseignant, et celui-ci y répond.

2. *L'étude du cours : deuxième approche : le cours problématisé*

Le cours est transformé en un problème, lequel doit suivre la même progression que le cours : au lieu d'affirmer et puis dérouler les explications et démonstrations, il faut d'abord présenter le contexte et la situation puis poser les questions de réflexion (« que pensez-vous de ... ? », « faites un schéma illustrant ce qui se passe ... ») ou des questions de réalisation (« démontrez que... », « donnez la valeur de ... »). Il faut ensuite établir et mettre clairement en valeur les résultats importants.

IV. CONCLUSION

Ces pédagogies collaboratives sont très motivantes pour les étudiants, mais aussi pour les enseignants. Notre expérience nous permet aussi d'affirmer que les apprentissages ainsi réalisés sont plus durables que ceux résultant de méthodes de « transmission » plus classiques. Nous encourageons vivement nos collègues à faire le pas et mettre leurs étudiants en équipes, que ce soit pour faire de l'APP ou du PEG.

REFERENCES

Rabut C. (2014) « Progresser En Groupe » (PEG) : une méthode pédagogique globale basée sur le travail en petits groupes. *ESAIM : Proceedings and survey* 45, 255-264.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



UTILISATION DE LA VISUALISATION DANS LE DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DES SÉRIES AVANT LE 17^E SIÈCLE. UNE ANALYSE À TRAVERS LES OSTENSIFS

Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN* – Carlos CORREIA DE SÁ**

Résumé – Dans cet article, une revue de la littérature existante nous amène à souligner l'importance du raisonnement visuel pour l'apprentissage des mathématiques, en particulier des séries numériques ; or, l'enseignement actuel semble négliger cet aspect (le raisonnement visuel) et présente les séries souvent réduites aux aspects algébriques. En nous questionnant pour savoir si le développement historique des séries a fait appel à des ostensifs dans le cadre géométrique, nous faisons une révision du travail de mathématiciens avant le 17^e siècle qui démontre le rôle important que ces ostensifs ont joué dans le développement des idées premières sur les séries.

Mots-clefs : séries, visualisation, ostensif, enseignement postsecondaire, analyse historique

Abstract – In this paper, a revision of literature leads us to stress the importance of visual reasoning for mathematics learning, in particular regarding numerical series ; however, current teaching practices seem to neglect this aspect (visual reasoning) and to introduce series usually reduced to algebraic aspects. Wondering whether the historical development of series has recurred to the use of ostensives in the geometric frame, we have made a revision of some mathematicians' work before the 17th century which shows the important role that these ostensives have played in the development of the first ideas about series.

Keywords: series, visualisation, ostensive, postsecondary education, historical analysis

I. INTRODUCTION

Cet article dresse un portrait sommaire de l'enseignement des séries infinies de nombres réels (*séries* dans ce qui suit), en faisant ressortir la prédominance d'un travail algorithmique et basé sur la manipulation symbolique pour ensuite présenter quelques moments de l'histoire des séries, en démontrant le rôle que les représentations visuelles (ou un raisonnement visuel) ont joué dans le travail de certains mathématiciens. Ceci nous amènera à nous questionner sur la disparition de ces représentations visuelles dans l'enseignement et leur rôle potentiel pour favoriser l'apprentissage des étudiants.

* Département de Didactique (Université de Montréal) – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca

** CMUP – Centro de Matemática da Universidade do Porto – Portugal – csa@fc.up.pt

La notion de série joue un rôle central dans l'Analyse, ayant joué un rôle important dans son développement. Les séries peuvent être utilisées comme base pour d'autres notions mathématiques (telles que le calcul de l'aire sous une courbe en additionnant les aires de rectangles sous elle ou le développement décimal de nombres périodiques) et aussi pour modéliser plusieurs phénomènes (tels que l'intérêt cumulatif dans un compte bancaire ou la distribution d'un médicament dans l'organisme). Il est possible que ces éléments puissent en partie expliquer la présence des séries dans les programmes d'études de mathématiques postsecondaires dans plusieurs pays, souvent sous l'étiquette de « Fondements de l'Analyse Classique » (voir, par exemple, Hairer & Wanner 1996).

Dans le cas du Canada, l'éducation n'est pas une responsabilité du gouvernement fédéral, mais de chacune des provinces qui ont le mandat d'organiser leur propre système éducatif. Dans la province du Québec, l'éducation obligatoire se divise en deux niveaux : éducation primaire (6 à 11 ans) et éducation secondaire (12 à 16 ans). Les étudiants qui veulent poursuivre des études universitaires doivent compléter une formation de préparation à l'université de deux ans, appelée *collégial* ou *cégep*. C'est dans le cadre des études collégiales que les séries sont introduites en première année, pour les étudiants voulant poursuivre une carrière scientifique-technique. Cependant, malgré l'importance de cette notion dans les mathématiques et de sa présence dans les programmes d'études, son apprentissage n'est pas sans difficultés, comme nous le discutons dans la section qui suit.

II. PROBLÉMATIQUE

La quantité d'articles de recherche dans la littérature internationale sur la notion de série est plutôt restreinte. Cette notion apparaît des fois implicitement dans certains travaux sur les suites ou la convergence (Boschet 1983; Robert 1982) et rares sont les travaux centrés sur la notion de série elle-même. Il faut aussi préciser que, parmi les travaux dans la littérature internationale sur les séries, la majorité analyse leur apprentissage, mais il n'existe pas beaucoup de travaux contemporains analysant leur enseignement. La révision de la littérature qui suit s'organise autour de trois axes principaux : le recensement de quelques difficultés qu'éprouvent les étudiants quand ils apprennent les séries, certaines recommandations pour leur enseignement et la présentation des séries dans les manuels.

Les séries étant étroitement liées à d'autres notions mathématiques telles que les limites, les suites et la convergence, il est naturel que les difficultés propres à ces notions soient aussi présentes avec les séries (par exemple, en ce qui concerne la convergence, voir Robert 1982). Par rapport aux difficultés d'apprentissage propres aux séries, nous considérons le travail de Kidron (2002), qui identifie plusieurs des difficultés principales avec les séries. Certaines parmi elles sont communes à la majorité des notions de l'Analyse : la vision de la somme infinie comme un processus ou comme un objet, l'intuition du processus infini comme un processus *potentiellement infini* ou comme une *somme infinie achevée*¹, et les contradictions trouvées chez les étudiants en ce qui a trait à leur *concept image* et leur *concept définition*. Kidron (2002) a aussi souligné les différences cognitives entre le fait de lire de gauche à droite ou de droite à gauche l'égalité $S = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$. Elle identifie par ailleurs des difficultés évidentes dans l'utilisation de la notation symbolique par les étudiants. Cette dernière remarque est aussi faite par Mamona (1990), qui a souligné la confusion chez les étudiants entre suites et séries, en plus de leur résistance à voir les suites comme un type de fonction. Enfin, il a été aussi souligné que les difficultés avec les séries peuvent avoir un

¹ Nous préférons cette traduction pour « *actual infinity* » et l'avons déjà utilisée dans González-Martín (2011).

impact sur l'apprentissage de la notion d'intégrale (Bezuidenhout & Olivier 2000; González-Martín 2006).

En ce qui a trait aux recommandations concernant l'enseignement des séries, Bagni (2000, 2005) a suggéré que le recours à des exemples historiques pourrait aider les étudiants à surmonter certaines fausses conceptions, telles que « l'addition d'un nombre infini de termes implique une somme infinie » et met en garde qu'une transposition didactique pour enseigner les séries devrait prendre en compte les possibles réactions des étudiants, qui pourraient être semblables à celles des mathématiciens dans le passé. Par ailleurs, il distingue deux niveaux de conceptualisation pour les séries, l'opérationnel et le structurel et il mentionne que cette distinction n'est pas usuellement prise en compte dans l'enseignement ; notons que ces deux stages semblent proches des notions *outil – objet* présentés par Douady (1986). L'utilisation du raisonnement visuel pourrait aussi être avantageuse pour les étudiants (Alcock & Simpson 2004), surtout dans le but de les aider à attribuer un sens à la notion. En particulier, Alcock et Simpson (2004) ont argumenté que l'utilisation du raisonnement visuel pourrait être utile pour aider les étudiants à établir des liens entre les représentations formelle et visuelle des séries et suggèrent aussi que les étudiants qui utilisent régulièrement des images visuelles dans leur raisonnement en Analyse, en particulier sur les suites et les séries, partagent certaines caractéristiques positives : « tous voient les construits mathématiques en tant qu'objets, ils tirent rapidement des conclusions sur des ensembles d'objets et ils sont à ce point convaincus de leurs propres affirmations qu'ils les considèrent évidentes » (p.29).

Finalement, en ce qui concerne la présentation des séries dans les manuels, le travail pionnier de Robert (1982) relève diverses, et souvent inadéquates, représentations mentales et écrites sur la convergence des suites détenues et développées par des étudiants universitaires en France. Cette inadéquation était attribuée, du moins en partie, à la nature limitée des exercices utilisés lors de l'enseignement. Ces résultats coïncidaient avec ceux de Boschet (1983), obtenus à partir de l'analyse de la présentation des suites numériques dans les cours universitaires (en particulier, dans les manuels et les notes de cours des étudiants et des professeurs). Entre autres, elle a remarqué que les exemples existants promouvaient plutôt une variété de représentations pas toujours adéquates et que les suites n'étaient pas vues comme des cas particuliers des fonctions, ce qui a, à nouveau, été observé par Mamona (1990) quelques années plus tard. Boschet (1983) a aussi signalé que l'enseignement habituel inclut très peu d'exemples de représentations graphiques de la convergence, ce qui semble aller à l'encontre des recommandations d'Alcock et Simpson (2004).

Intéressés par l'enseignement des séries, nous avons mené une recherche pour étudier leur enseignement et l'impact potentiel de celui-ci sur l'apprentissage des étudiants. La première étape de cette recherche a considéré un échantillon de 17 manuels utilisés au niveau *collégial* sur une période de 15 ans (de 1993 à 2008 ; voir González-Martín, Nardi & Biza 2011). Dans ce niveau préuniversitaire, la convergence des séries est introduite de façon formelle et l'accent est rapidement mis sur l'apprentissage des critères de convergence. Dans les manuels, le recours au visuel reste anecdotique et les auteurs prennent souvent pour acquis que les étudiants interpréteront d'une façon adéquate les images présentées, ce qui est loin d'être vrai (González-Martín 2014). Étant donné les recommandations de la recherche en général sur l'utilisation de la visualisation dans l'apprentissage des mathématiques et celles d'Alcock et Simpson (2004), particulièrement, en ce qui concerne les séries, nous nous demandons pourquoi l'enseignement des séries fait aussi peu recours aux aspects visuels possibles de cette notion. Se peut-il que cette notion ait été développée par les mathématiciens sans besoin de représentations visuelles ? Cela nous a amenés à nous intéresser au développement historique de la notion, plus particulièrement pour savoir si l'utilisation de représentations visuelles a joué un rôle important dans l'évolution des séries. Avant de formuler notre

question de recherche de façon définitive, nous exposons les outils théoriques qui guident notre recherche et qui seront présents dans cette formulation.

III. CADRE THÉORIQUE

Afin de savoir s'il existe des *distances* importantes, surtout en ce qui concerne les aspects visuels, entre le savoir savant et le savoir à enseigner (Chevallard 1985) par rapport aux séries, nous présentons ici les outils principaux dont nous nous servons, issus de la théorie anthropologique. L'un des apports importants de cette théorie est donné par l'introduction de la notion clé d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie* (Chevallard 1999), attribuant un rôle important à la notion de *tâche* et établissant le postulat que « *l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique* » (Bosch & Chevallard 1999, p.83). La théorie anthropologique établit que la plupart des tâches institutionnelles sont des tâches routinières ; cependant, des types de tâches *problématiques* peuvent apparaître, puisqu'il n'existe pas de technique appropriée pour leur accomplissement. Ce type de tâches peut être à l'origine d'un *progrès* visant à étudier le problème dans le but de construire la technique manquante (p.84). En particulier, un *changement de cadres* peut s'avérer un moyen d'obtenir des formulations différentes à un problème, permettant sa résolution (Douady 1986, p. 11).

L'accomplissement des tâches, routinières ou *problématiques*, peut être associé à l'utilisation de matériels, soit physiques soit abstraits. Spécifiquement, les objets tels que les écritures, les formalismes, les graphismes, les mots et les discours, interviennent souvent en tant que *signes*, occupant la place d'autres objets qu'ils *représenteraient* (Bosch & Chevallard 1999, p.89). Ces objets, à leur tour, ont une fonction signifiante, qui permet de produire des objets mathématiques, mais qui en même temps conditionne l'activité mathématique qui les met en jeu. En particulier, « l'analyse didactique du développement du savoir mathématique – saisi dans la durée historique, dans l'histoire de vie d'une personne, ou dans la vie d'une classe – ne peut considérer comme secondaire cette dimension de l'activité, en lui assignant une pure fonction instrumentale dans la construction des concepts » (p.89).

Étant donné l'importance de ces notions, deux types d'objets sont distingués :

Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). Ainsi, les objets « fonction » et « primitive d'une fonction » sont-ils des objets non ostensifs que nous avons appris à identifier et à activer par le moyen de certaines expressions, écritures et graphismes particuliers mis en jeu dans des pratiques et situations tout autant particulières (pp.88–89).

De la définition de ces deux types d'objets suit que toute activité humaine se laisse décrire comme une manipulation d'objets ostensifs et Bosch et Chevallard posent le principe que « *en toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs* » (p.91). De cette façon, « la mise en œuvre d'une technique se traduit par une *manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs* » (p.91) et la capacité à identifier et à manipuler ces ostensifs est le produit d'une construction institutionnelle. En ce qui concerne le développement historique d'une notion :

[...] Du point de vue de la genèse des objets, on peut dire que les ostensifs et les non-ostensifs *émergent ensemble* dans la praxis humaine, qu'ils sont des *émergents* de cette praxis, sans qu'on puisse établir *a priori* d'antériorité des uns par rapport aux autres. Toutefois, si l'on se restreint à une institution ou à un ensemble d'institutions données, et dans une période historique donnée, les situations peuvent montrer tantôt une avance du système des instruments ostensifs par rapport à un certain système de non-ostensifs – un concept peut manquer par exemple –, tantôt l'inverse, quand manquent un ou plusieurs objets ostensifs – par exemple une notation – qui donneraient aux objets non ostensifs un meilleur rendement dans le pilotage de l'activité (p.94).

Finalement, plusieurs registres ostensifs sont identifiés : « registre de l'*oralité*, registre de la *trace* (qui inclut graphismes et écritures), registre de la *gestualité*, enfin registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, la *matérialité quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés » (p.95).

Tous ces outils deviennent précieux pour nous. Dans l'évolution historique des séries, nous cherchons à analyser certains épisodes du développement du non ostensif « série » où la résolution de tâches *problématiques* a mis en place la manipulation d'ostensifs dans le registre de la trace, faisant appel à des représentations visuelles. Nos recherches se concentrent ici sur les travaux développés par des mathématiciens avant le 17^e siècle et le début de la formalisation des séries et nous présentons les résultats principaux dans la section qui suit.

IV. ÉPISODES DANS LE DEVELOPPEMENT HISTORIQUE DES SÉRIES AVANT LE 17^E SIECLE

La première chose que l'on constate en analysant les documents historiques sur les séries, c'est que cette notion n'a pas une très longue histoire. Les anciens grecs abhorraient tout usage de l'infini actuel, au moins à partir d'Aristote, ce qui empêchait la considération de sommes infinies. D'ailleurs, tant pendant l'Antiquité que pendant le Moyen-âge et la Renaissance, les cas où la mention des séries serait pertinente ne sont pas très nombreux. Ce n'est qu'à partir de la fin du 17^e siècle que les séries acquièrent une importance de plus en plus grande en mathématiques.

Par ailleurs, à partir du 17^e siècle, les séries apparaissent tout de suite comme des objets à caractère analytique : elles sont définies à partir de l'expression d'un terme général (donné d'habitude par une formule) et elles sont manipulées symboliquement avec le recours à l'écriture algébrique. À l'exception du critère de l'intégrale, il n'y a pas de représentation géométrique associée aux séries, que ce soit dans le Calcul Fluxionnel de Newton ou dans le Calcul Infinitésimal de Leibniz. Ce trait analytique des séries se maintient pendant tout le 18^e siècle et reste dominant jusqu'à nos jours.

Pourtant, dans la longue période qui va de l'Antiquité jusqu'à la création du Calcul, on trouve des occurrences isolées où le lecteur moderne peut discerner la présence du non ostensif « série », avec comme référence, le développement graduel d'ostensifs pour s'y référer. Puisque les ostensifs correspondant à l'écriture analytique ne sont pas encore mis au point, le raisonnement du mathématicien doit ou bien s'exprimer de façon purement discursive, avec des ostensifs du registre de l'oralité, ou bien recourir à des ostensifs du registre de la trace liés à la géométrie. On a ainsi quelques occasions (qui restent malheureusement peu nombreuses) d'observer des représentations visuelles que les mathématiciens se faisaient des sommes infinies, avant d'en avoir une théorie analytique plus ou moins formalisée. Dans ce qui suit, nous allons nous arrêter sur quelques cas particuliers.

1. Zénon d'Élée

Le plus ancien exemple d'une somme infinie avec une valeur finie apparaît avec Zénon d'Élée (5^{ème} siècle a. J.-C.) dans son paradoxe *Dichotomie* (Zafiropulo 1950, pp. 180–181). L'original du travail de Zénon ne nous est pas parvenu, mais la tradition nous a transmis la version suivante du paradoxe : Pour aller de A à B , un mobile doit passer d'abord par C , entre les deux ; mais avant d'arriver à C , le mobile doit passer par D ; et ainsi de suite (Fig.1). Selon ce raisonnement, le mobile n'arrivera donc jamais à B .



Figure 1 – Paradoxe Dichotomie

Le segment de droite AB est divisé en sous-segments, en quantité infinie, ayant chacun une longueur positive. Ce paradoxe permet d'une certaine façon de confronter le point de vue de l'infini potentiel (il faut passer étape par étape, alors le processus ne finit jamais) avec celui de l'infini achevé (on part d'une longueur finie, qui est décomposée en une infinité de morceaux, mais la longueur initiale reste inchangeable). On voit dans cette réflexion de Zénon les débuts de l'origine de l'objet « série » et ces origines semblent être liées à un raisonnement qui appelle à l'utilisation d'ostensifs visuels. Bien sûr, ce non ostensif n'inclut pas en ce moment historique toute la richesse et la complexité qu'il inclut actuellement ; il n'est réduit qu'à l'idée intuitive d'additionner, liée à un raisonnement qui appelle à des ostensifs visuels.

Cette interprétation visuelle est aussi présente dans son deuxième paradoxe, *Achille et la tortue*, qui a une apparence plus complexe parce qu'il fait intervenir deux mobiles (Zafiropulo 1950, pp. 181–182). Selon ce paradoxe, si dans une course Achille donne de l'avance à une tortue, il ne pourra jamais l'attraper. Supposons qu'Achille et la tortue partent des points A_0 and T_0 respectivement (Fig.2) :

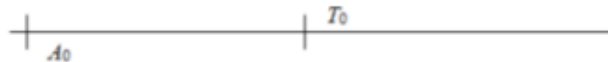


Figure 2 – Configuration initiale du paradoxe Achille et la tortue

Quand Achille arrivera au point de départ de la tortue (T_0 , que l'on désignera maintenant aussi A_1), la tortue, elle, aura aussi avancé jusqu'au point T_1 (Fig. 3) :

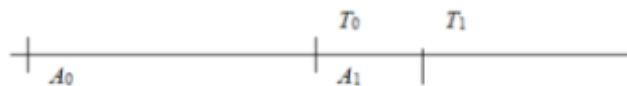


Figure 3 – Deuxième étape du paradoxe Achille et la tortue

À nouveau, quand Achille arrivera au point T_1 (que l'on désignera aussi A_2), la tortue aura encore avancé pour se rendre jusqu'au point T_2 , et ainsi de suite. Ce processus se répétant à l'infini, Achille ne parviendra jamais à attraper la tortue, car il devra toujours atteindre d'abord une position déjà occupée par celle-ci et, pendant qu'il le fait, elle avancera encore un peu.

Évidemment, les grecs anciens savaient, aussi parfaitement que nous le savons aujourd'hui, que le rapide Achille arrive bien à attraper la lente tortue. Encore une fois, ce paradoxe appelle (ou semble provenir de) un raisonnement visuel, où il est légitime de se représenter le segment de droite qui va du point A_0 jusqu'au point où Achille rejoint la tortue. Ainsi, le paradoxe *Achille et la tortue* pourra alors apparaître comme étant essentiellement le

même que celui de la *Dichotomie* : un segment de droite est divisé en un nombre infini de sous-segments de longueur positive, dont il est la somme. Si les vitesses d'Achille et de la tortue sont constantes, il s'agira même d'une série géométrique, comme dans le cas de la *Dichotomie*. Pourtant, il y a une différence qui peut être significative. Dans la *Dichotomie*, on part d'une totalité pour trouver ensuite la série dont elle est la somme, tandis que la formulation traditionnelle d'*Achille et la tortue*, par contre, conduit d'abord aux segments de droite élémentaires marqués par les positions des deux coureurs ; ces segments constituent la série et le cœur du paradoxe réside justement dans l'intuition fautive selon laquelle de telles parcelles ne sauraient avoir une somme finie (puisqu'elles sont en quantité infinie et chacune est positive). On y fait donc le parcours inverse, qui est aussi le plus habituel dans l'enseignement des séries.

Nous voyons alors que les origines du non ostensif « série » sont liées à l'idée intuitive d'addition d'une part et, d'autre part, à l'absence de volonté de créer une théorie, ce qui peut être associé au niveau opérationnel identifié par Bagni (2000, 2005) ou au niveau outil de Douady (1986). Et la naissance de cet objet est liée à l'utilisation d'ostensifs dans le registre de l'oralité, probablement basés sur une vision ou intuition d'ostensifs géométriques. Nous verrons que ces ostensifs restent présents dans les travaux ultérieurs des grecs, avec une complexification des ostensifs géométriques.

2. *Euclide et Archimède*

La méthode d'exhaustion, caractéristique des mathématiques anciennes, est attribuée à Eudoxe de Cnide (4^{ième} siècle a. J.-C.) dont les travaux ne nous sont pas parvenus. Le mathématicien qui en a fait le plus grand usage a été Archimède de Syracuse (3^{ième} siècle a. J.-C.), mais le premier registre historique de la méthode se trouve dans les *Éléments* d'Euclide (environ 300 a. J.-C.). Le fondement de la méthode d'exhaustion se trouve dans la première proposition du Livre X des *Éléments* d'Euclide (Peyrard 1993, pp. 258–259). Selon cette proposition-ci, étant données deux grandeurs A et B , du même type (c'est-à-dire, deux longueurs, deux aires, deux volumes, deux intervalles de temps, deux poids...), A étant plus grande que B , si on retire à A une partie plus grande que sa moitié, et si ensuite on retire à ce qui reste une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite, il en restera à un moment donné une grandeur plus petite que B .

Tout d'abord, on remarquera le caractère tout à fait finitiste de cet énoncé ; il en est de même pour les applications pratiques de la méthode d'exhaustion dans l'Antiquité, que ce soit chez Euclide ou chez Archimède. Cela n'empêche pas que l'on puisse rapprocher cette méthode de la somme de séries, où elle donne des exemples visuellement intéressants d'aires curvilignes comme *limite* ou comme *somme* d'aires polygonales inscrites. À titre d'illustration, voyons l'usage qu'en fait Euclide dans la deuxième proposition du Livre XII des *Éléments* (Peyrard 1993, pp. 445–446) et auquel Archimède fait référence dans la deuxième proposition de *La Mesure du Cercle* (Ver Eecke 1959, pp. 127–128). Étant donné un cercle, on lui enlève plus de sa moitié lorsqu'on enlève le carré inscrit (Fig. 4) :

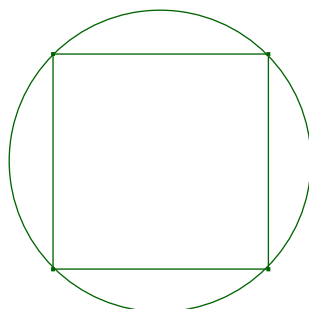


Figure 4 – Première étape de La Mesure du Cercle

Il reste alors quatre segments circulaires. Quand on y retire les quatre triangles isocèles montrés dans la Figure 5, il reste aux segments circulaires moins de la moitié :

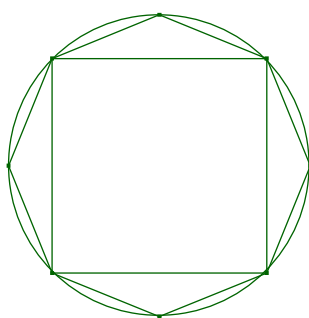


Figure 5 – Deuxième étape de La Mesure du Cercle

Si l'on continue ce processus, par la proposition *Éléments X, 1* d'Euclide, on obtiendra une grandeur aussi petite qu'on le désire. Cette démarche peut être interprétée d'un point de vue analytique : la différence entre l'aire du cercle et l'aire des polygones réguliers inscrits peut se rendre aussi petite que l'on le veut, tout simplement en doublant successivement le nombre de côtés du polygone inscrit. Mais on peut aussi l'interpréter du point de vue des sommes de séries : si l'on additionne à l'aire du carré celle des quatre triangles isocèles, puis l'aire des huit triangles isocèles encore plus petits, et ainsi de suite, la somme de toutes ces aires sera égale à l'aire du cercle.

Dans ce travail, il est possible de voir l'utilisation explicite d'ostensifs géométriques pour développer une idée liée au non ostensif « limite », mais aussi au non ostensif « série ». Après Aristote, les grecs évitaient l'utilisation de l'infini achevé et nous voyons ici une façon de contourner cette limitation pour résoudre une tâche *problématique*, soit le calcul de l'aire du cercle, moyennant un changement de cadre. Ainsi, la notion de série qui était apparue pour réfléchir sur l'utilisation dangereuse de l'infini, devient un outil clé pour la résolution de certaines tâches avec la méthode d'exhaustion et les ostensifs associés se développent en conséquence.

3. Nicole Oresme

Nicole Oresme était un membre du clergé du 14^{ème} siècle qui enseignait à l'Université de Paris. C'est dans son *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Clagett 1968, pp.

157–435) que se fait la première mention claire d'une somme infinie², apparaissant aussi apparaît une expression, un nouvel ostensif, pour cette notion.

Oresme prend deux carrés d'aire connue et décompose l'un d'entre eux en une quantité infinie de rectangles dont l'aire sera, respectivement, la moitié, le quart, le huitième, le seizième... de l'aire du carré original (Fig.6).

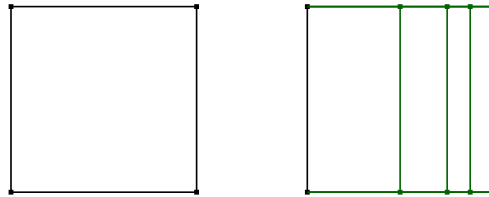


Figure 6 – Deux carrés égaux

Ensuite, il donne une nouvelle configuration à cet ensemble de rectangles, les posant « en escalier » les uns sur les autres et sur le premier carré (Fig.7). De cette façon, Oresme construit une figure qui n'est pas bornée, mais dont la valeur de l'aire est finie et connue à l'avance : c'est une aire égale à celle des deux carrés.

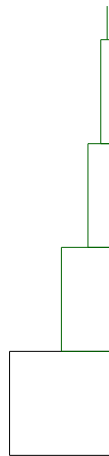


Figure 7 – Nouvelle configuration de l'aire des deux carrés

Oresme conclut alors (en langage contemporain) que la qualité³ totale égale quatre fois celle de la première moitié ou, en termes de cinématique, que l'espace parcouru dans le temps total égale quatre fois l'espace parcouru pendant la première moitié du temps. D'un point de vue moderne, on peut interpréter la construction d'Oresme comme une intégrale impropre, puisqu'il s'agit d'une figure illimitée avec une aire finie. Mais il est aussi possible de l'interpréter comme une somme infinie d'aires. Si chacun des carrés de départ a une aire égale

à 1, alors on aura la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$.

² Oresme est aussi connu pour sa preuve que la série harmonique n'a pas de somme finie, qui se trouve dans *Questiones Super Geometriam Euclidis* (Mazet, 2003, pp. 70–71). Son raisonnement est identique à celui que l'on peut retrouver dans les livres d'Analyse d'aujourd'hui. Il ne fait donc aucun appel à la visualisation géométrique et ne sera donc pas considéré dans cet article.

³ Il s'agit du langage utilisé à l'époque, faisant référence souvent à des magnitudes ou des *qualités*.

Une nouvelle tâche *problématique*, soit le calcul de l'aire d'une figure infinie, se présente à Oresme et encore une fois la notion de série, encore en développement et loin de la notion actuelle, devient un outil pour l'accomplissement de cette tâche. Cette configuration fait penser plutôt au raisonnement développé pendant le paradoxe *Dichotomie*, dans le sens où une grandeur connue est décomposée en une infinitude de parties, sans que la valeur initiale de la grandeur ne change. On observe aussi que la stratégie de reconfiguration permet, d'une certaine façon, d'éviter la notion de convergence (plus présente dans la méthode d'exhaustion) à travers une utilisation de l'infini achevé : la valeur est connue a priori et l'on ne fait que réorganiser les pièces.

4. Leibniz

Entre Oresme et Leibniz deux mathématiciens font appel à des changements de cadres utilisant des ostensifs visuels : il s'agit de Grégoire de Saint-Vincent et de Álvaro de Tomás. L'espace restreint dans cet article nous empêche de développer ici une analyse de leur travail fort intéressant en ce qui concerne les séries ; ceci sera fait dans d'autres publications futures.

Dans un travail intitulé *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, qui n'a été publié qu'en 1993 par Eberhard Knobloch, Gottfried Wilhelm Leibniz donne une construction géométrique pour la somme d'une série géométrique (Ferraro 2008, p. 26). Pour ce faire, il prend deux segments de droite colinéaires et consécutifs de longueur a et b , les deux premiers termes d'une série géométrique (Fig. 8), ayant pour but de résoudre une nouvelle tâche *problématique* : construire un segment de droite représentant la somme totale de la série géométrique.



Figure 8 – Composition initiale de Leibniz

La construction géométrique de la somme de la série continue comme il suit. On trace des perpendiculaires aux segments précédents de longueurs égales à a et b (si le segment de longueur a est à gauche, les perpendiculaires seront tracées par les extrémités gauches des segments donnés, comme dans la Figure 9).

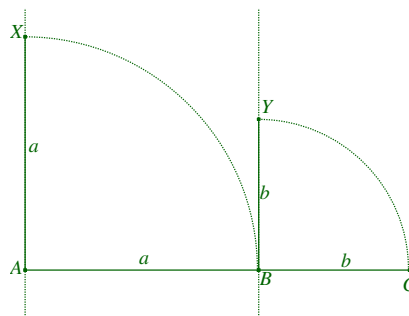


Figure 9 – Traçage des perpendiculaires dans la composition de Leibniz

La droite qui joint les extrémités supérieures de ces segments perpendiculaires coupera la droite sur laquelle se placent les segments initiaux de longueurs a et b en un point S (Fig. 10).

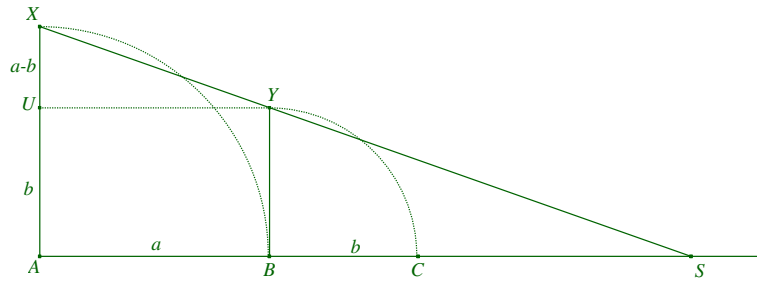


Figure 10 – Repère du point S

Alors, si l'on désigne \overline{AB} le premier segment de longueur a , \overline{AX} le segment de même longueur sur la perpendiculaire qui passe par A , \overline{BC} le premier segment de longueur b et \overline{BY} le segment de même longueur sur la perpendiculaire qui passe par B (et \overline{AU} sa projection sur le segment \overline{AX}), Leibniz démontre que le segment \overline{AS} a la même longueur que la somme de la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, où r désigne la raison (donc $b = ar$). Pour ce faire, il considère

la similitude des triangles AXS et UXY et les rapports $\frac{m(\overline{AX})}{m(\overline{AS})} = \frac{m(\overline{UX})}{m(\overline{UY})}$, cette expression

étant équivalente à : $m(\overline{AS}) = \frac{m(\overline{AX}) \times m(\overline{UY})}{m(\overline{UX})}$; cette dernière égalité peut être écrite

comme : $m(\overline{AS}) = \frac{a \times a}{a - b} = \frac{a^2}{a - ar} = \frac{a}{1 - r}$, qui est la formule bien connue pour la somme

d'une progression géométrique de premier terme a et raison $r < 1$.

Dans ce cas, nous voyons que le résultat de la somme d'une série géométrique est associé à une nouvelle interprétation géométrique, qui permet, d'une certaine façon, sa réinterprétation, c'est-à-dire, en ce moment historique donné, le non ostensif est enrichi avec ce nouvel ostensif. Ce travail de Leibniz, cependant, n'a pas de signification historique dans le sens où il n'a pas eu de conséquences ultérieures pour les travaux d'autres mathématiciens.

Leibniz réussit à donner une réinterprétation à la notion de série géométrique en mettant en lien des ostensifs géométriques avec des ostensifs de l'écriture symbolique, récemment développée. Il met même en évidence un parallèle entre deux ostensifs opérationnels, à savoir, l'ostensif algébrique de la formule pour la somme d'une série géométrique et l'ostensif visuel de la construction géométrique de cette somme. Cet enrichissement du non ostensif, cependant, semble avoir été oublié et il est souvent absent des ouvrages sur les séries.

V. CONCLUSIONS

Nous nous étions demandés, à la fin de la problématique, s'il était possible que la notion de série ait été développée par les mathématiciens sans besoin de représentations visuelles et notre objectif était d'analyser quelques moments du développement historique des séries pour voir si la résolution de tâches *problématiques* avait mis en place la manipulation d'ostensifs dans le registre de la trace, faisant appel à des représentations visuelles, ceci pour nous questionner sur le potentiel possible de ces représentations pour favoriser l'apprentissage des étudiants. Notre recherche dans des documents historiques montre que les premières

apparitions des séries (ou d'une notion qui serait reliée à ce que l'on appelle présentement série) étaient liées à des raisonnements ou des représentations ostensives géométriques.

Il semble être légitime de dire que les premières intuitions sur les séries, avant leur formalisation et leur développement analytique, s'appuyaient sur la création de ces ostensifs plutôt visuels et que cela a aussi été lié au développement de la méthode d'exhaustion (qui mène naturellement à la notion de limite) et à des configurations qui permettent de contourner les difficultés propres à l'utilisation de l'infini achevé. Néanmoins, à partir du 17^e siècle, ces ostensifs se font rares avec l'utilisation de plus en plus usuelle des symbolismes. Cette réalité a déjà été exprimée par Bosch et Chevallard (1999) :

[...] on ne peut ignorer que, au moins depuis Viète, les mathématiques progressent par le biais du symbolisme écrit, de telle sorte que l'on peut presque suivre toute l'histoire de ce progrès en restant dans le registre de l'écriture. Les tendances formalistes nées de la crise des fondements de la fin du XIX^e siècle ont porté cette évolution à son extrême, comme si l'écriture symbolique pouvait remplacer tous les autres registres, ne serait-ce que pour la formulation et la démonstration des vérités mathématiques (p.103).

Il semble que ce phénomène général en mathématiques ne fait pas exception dans le cas des séries et que les ostensifs développés en premier lieu sont relégués à une seconde place :

Il convient maintenant de distinguer, dans l'analyse des objets ostensifs mobilisés dans une activité mathématique concrète, ceux qui, comme les notations, les symbolismes et certaines expressions verbales acquièrent un statut mathématique clair et jouent le rôle d'*instruments* de l'activité, de ceux qui, bien que fonctionnant comme des *moyens* indispensables au travail mathématique, sont considérés comme un accompagnement presque contingent de l'activité. Les développements antérieurs peuvent se traduire en disant que la mathématisation conduit à reléguer les objets matériels, les gestes et certains graphismes au simple statut de *moyens* du travail mathématique, en accordant le statut d'*instrument* aux seuls ostensifs appartenant au registre de l'écrit et, de façon moins nette, aux registres du graphique et de l'oral (Bosch & Chevallard 1999, p.105).

Si l'on prend en compte les recommandations de Bagni (2000, 2005), pour développer dans l'enseignement d'abord un niveau opérationnel et après un niveau structurel, ainsi que les résultats d'Alcock et Simpson (2004), la reconsidération de ces ostensifs dans l'enseignement pourrait avoir des effets intéressants pour l'apprentissage des étudiants. Pour les mathématiciens, les premières expériences avec le non ostensif « série » ont eu lieu à travers des ostensifs liés plutôt au visuel et il semble légitime se poser la question de si un cheminement semblable pourrait être utile pour les étudiants. Peut-être des activités de changement de cadre permettraient de donner une signification appropriée au symbolisme pour qu'il devienne un véritable *instrument* dans l'activité de l'étudiant. La construction donc d'activités menant à des organisations praxéologiques où ces ostensifs visuels aient un rôle d'*instrument* peut être une piste prometteuse pour des futures recherches, ainsi que pour la construction d'ingénieries, visant à améliorer l'apprentissage des étudiants.

REFERENCES

- Alcock L., Simpson A. (2004) Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics* 57, 1-32.
- Bagni G. (2000) Difficulties with series in history and in the classroom. In Fauvel J, Maanen J (eds.) *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 82-86). Dordrecht: Kluwer.
- Bagni G. (2005) Infinite series from history to mathematics education. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. En ligne dans l'adresse: <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf> (avril 2010)
- Bezuidenhout J., Olivier A. (2000) Students' conceptions of the integral. In Nakahara T., Koyama M. (eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 73-88). Hiroshima: PME.

- Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique. Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-124.
- Boschet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 141-163.
- Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Clagett M. (Ed.) (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison: The University of Wisconsin Press.
- Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.
- Ferraro G. (2008) *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*. New York: Springer.
- González-Martín A.S. (2006) *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Thèse de Doctorat, Université de La Laguna (Espagne).
- González-Martín A.S. (2011) L'introduction du concept de somme infinie: une première approche à travers l'analyse de manuels. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes Colloque International Espace Mathématique Francophone 2009 (EMF2009)* (pp. 1048-1061). Dakar (Sénégal). En ligne sous l'adresse: <http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Gonzales.pdf>
- González-Martín A.S. (2014) Pre-university students' personal relationship with the visualisation of series of real numbers. In Liljedahl P., Nicol C., Oesterle S., Allan D. (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 201-208). Vancouver (Canada): PME.
- González-Martín A.S., Nardi E., Biza I. (2011) Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 42(5), 565-589.
- Hairer E., Wanner G. (1996) *Analysis by its History*. New York: Springer.
- Kidron I. (2002) Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. In Cockburn A.D, Nardi E. (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 209-216). Norwich: PME.
- Knobloch E. (Hg.), Leibniz G.W. (1993) *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen.
- Mamona J. (1990) Sequences and series – Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 21, 333-337.
- Mazet E. (2003) La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne. « Questions 1 et 2 sur la Géométrie d'Euclide ». *Revue d'Histoire des Mathématiques* 9, 33-80.
- Peyrard F. (1993) *Les Œuvres d'Euclide*. Paris : Albert Blanchard.
- Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3), 307-341.
- Ver Eecke P. (1959) *Les œuvres complètes d'Archimède suivies des Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* (Tome I). Paris : Albert Blanchard.
- Zafiropoulo J. (1950) *L'École Éléate*. Paris : Les Belles Lettres.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



INTRODUCTION AUX CONCEPTS DE LIMITE DE FONCTION ET DE SUITE EN PREMIÈRE ANNÉE D'UNIVERSITÉ : ADAPTATION DE DEUX INGÉNIERIES

Nicolas GRENIER-BOLEY¹ - Stéphanie BRIDOUX² - Martine De VLEESCHOUWER³ - Viviane DURAND-
GUERRIER⁴ - Denise GRENIER⁵ - Chantal MENINI⁶ - Marc ROGALSKI⁷ - Pascale SÉNÉCHAUD⁸ -
Fabrice VANDEBROUCK⁹ (Commission InterIREM Université)

Résumé Dans cette communication, nous décrivons et argumentons l'adaptation de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences. La première (Robert 1983) vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde (Robinet 1983) vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction. Nous concluons en présentant des prolongements possibles de ce travail.

Mots-clefs : limite d'une suite, limite d'une fonction, ingénierie didactique, formalisme.

Abstract In this paper, we describe and motivate the adaptation of two didactical engineering developed in the eighties for scientific students attending first year university. The first one (Robert 1983) aims to favor the engagement of students toward a conceptual point of view on analysis from activities involving sequences. The second one (Robinet 1983) aims to motivate and introduce the formal quantified definition of the concept of limit of a function. Our conclusion opens on possible developments of this work.

Keywords: limit of a sequence, limit of a function, didactical engineering, formalism.

¹ Université de Rouen (LDAR EA 4434) – France – nicolas.grenier-boleyn@univ-rouen.fr ;

² Université de Mons (LDAR EA 4434) – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be ;

³ Université de Namur (CREAD EA 3875) – Belgique – mdv@math.unamur.be ;

⁴ Université de Montpellier (IMAG UMR 5149), IREM de Montpellier – France – vdurandg@univ-montp2.fr ;

⁵ Université de Grenoble (Institut Fourier UMR 5182), IREM de Grenoble – France – denise.grenier@ujf-grenoble.fr ;

⁶ Université Bordeaux 1 (IMB UMR 5251), IREM de Bordeaux – France - Chantal.Menini@math.u-bordeaux1.fr ;

⁷ Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie et Université Paris Diderot (LDAR EA 4434), IREM de Paris 7 – France – marc.rogalski@imj-prg.fr ;

⁸ Université de Limoges, IREM de Limoges – France – pascale.senechaud@unilim.fr ;

⁹ Université Paris Diderot (LDAR EA 4434), IREM de Paris 7 – France – vandebro@univ.paris-diderot.fr

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous décrivons et argumentons l'adaptation pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France. La première (Robert 1983) vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde (Robinet 1983) vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction.

Le projet de la reprise, en l'adaptant, d'une ingénierie didactique destinée à un public d'un autre temps (ici au début des années quatre-vingt) pose nécessairement question. Ces reprises sont sous-tendues dans les deux cas par un constat et une hypothèse.

Le constat est que les difficultés rencontrées en début d'université sur la compréhension et la formalisation du concept de limite sont toujours d'actualité, ceci étant bien documenté dans la littérature de recherche (voir par exemple Bloch (2000), Ghedamsi (2009), Roh (2010)) et corroborée par les observations naturalistes des enseignants des premières années d'université.

Au sein de la commission Inter IREM Université qui réunit des enseignants chercheurs, des enseignants et des chercheurs en didactique de différentes universités françaises et belges, nous faisons l'hypothèse que malgré ces difficultés récurrentes, on ne peut pas faire l'impasse sur la question de la formalisation, car celle-ci est nécessaire pour une conceptualisation adéquate des concepts de l'analyse et en premier lieu du concept de limite.

On oppose souvent formalisme et signification dans la mesure où la mise en place d'un formalisme opératoire permet un traitement syntaxique des preuves. Néanmoins, dans l'activité mathématique, le contrôle sémantique sur les écritures manipulées joue un rôle essentiel, ceci étant une différence décisive entre novices et experts (Durand-Guerrier et Arzac 2003). En particulier, alors que la langue naturelle est par essence porteuse d'ambiguïté, dans la perspective sémantique initiée par Frege, le langage formel vise à lever ces ambiguïtés, et de ce point de vue, formaliser, c'est choisir une interprétation (Durand-Guerrier 2013). Dans le cas de la notion de limite de suite par exemple, nous pouvons l'illustrer en considérant la traduction formelle d'une définition informelle classique donnée au lycée en France : « la suite u converge vers un réel a en $+\infty$ si et seulement si on peut s'approcher de a aussi près que l'on veut à condition d'aller assez loin ». Pour formaliser un tel énoncé, il faut pouvoir d'une part traduire ce que signifie « s'approcher de a aussi près que l'on veut », ce qui correspond dans le cas qui nous intéresse à définir une distance entre deux réels, ici la valeur absolue, et traduire qu'on peut la rendre inférieure à n'importe quel nombre réel strictement positif fixé à l'avance, d'autre part traduire ce que signifie l'expression « à condition d'aller assez loin ». La formalisation de ce deuxième point s'appuie sur le fait que l'ensemble des entiers naturels est non borné (on peut considérer des entiers aussi grands que l'on veut) ; ceci fait, il reste deux interprétations possibles :

1./ étant donné un réel strictement positif ε , pour tout entier N on peut trouver un entier n supérieur à N tel que la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à ε ; formellement : $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N \mid u_n - a \mid < \varepsilon \square \square$

2./ étant donné un réel strictement positif ε , on peut trouver un entier N tel que quel que soit l'entier naturel n supérieur à N , la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à $\varepsilon \square \square$ formellement : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \mid u_n - a \mid < \varepsilon \square \square$

La première correspond à l'idée de valeur d'adhérence, la deuxième, que nous retenons ici, à la définition de la limite.

Dans ce qui suit, nous expliquons ce que nous avons gardé de ces deux ingénieries et nous insistons sur les choix d'adaptations qui nous semblent nécessaires afin de pouvoir les expérimenter auprès d'étudiants de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences « actuels ».

II. REPRISE ET ADAPTATION DE L'INGENIERIE DE ROBERT

1. Motivations

À partir du dépouillement de copies d'environ 1200 étudiants en début de parcours universitaire, Robert (1983) a mis en évidence des régularités sur l'acquisition de la notion de convergence. Elle avait notamment repéré chez les étudiants deux types de représentation de la notion. Les représentations dynamiques sont des représentations en termes d'action où converger est exprimé en termes de « se rapprocher de ». Les représentations statiques sont des représentations en langue naturelle de la définition formalisée. Or, Robert a montré que les étudiants chez qui le modèle statique était présent réussissaient mieux les exercices portant sur la notion de convergence. Des représentations erronées où converger est assimilé à être « monotone borné » étaient également présentes et menaient au même constat.

Un pré-test visant à étudier les acquis des étudiants (manipulation d'inégalités, ordre sur les réels, la valeur absolue,...) révélait aussi leurs difficultés à donner du sens à des phrases formalisées et à tenir compte de l'ordre des quantificateurs. Cet obstacle du formalisme continue d'être évoqué dans les travaux qui se situent à la transition secondaire-supérieur (Dorier 1997 et Gueudet 2008).

Enfin, l'enseignement au lycée, en Belgique et en France au moins, met l'accent sur l'algèbre des limites ; les exercices proposés aux élèves restent souvent de nature calculatoire. À l'université en revanche, la définition en (ε, N) devient un outil de démonstration et la notion de limite amène également un nouveau point de vue sur l'égalité entre deux nombres réels¹⁰. Il y a donc un saut conceptuel important à franchir par les étudiants pour accepter la nécessité de la définition formalisée de la convergence.

2. Description de l'ingénierie

L'ingénierie comporte deux séquences. Nous n'aborderons ici que la première¹¹. Elle démarre avec les trois questions suivantes:

a) Représenter graphiquement les suites de terme général suivant :

1. $u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).

2. $u_n = (-1)^n$

3. $u_n = \frac{1}{n} \cos n$ (attention, sur les calculettes, n en radians !)

4. $u_n = \cos n$

5. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, u_n = 2$ pour tout $n \geq 5$.

6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).

7. $u_n = \cos n \frac{\pi}{6}$

¹⁰ $\forall a, b$ réels (ou rationnels), $(\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$. Cette propriété peut par exemple être utilisée pour démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

¹¹ Les deux séquences sont présentées dans (Robert, 1983).

8. $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).
9. $u_n = n^2 + 1$
10. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ ($n \geq 2$)

- b) Pouvez-vous classer ces dessins ? Rédigez rapidement les critères permettant vos classements.
- c) Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l et un entier n à partir duquel $|u_n - l|$ reste inférieur à $\frac{1}{10}$ ($\frac{1}{100}$) ; mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

Nous avons choisi de conserver le travail papier-crayon pour la première question en ajoutant un choix d'échelle pour chaque suite et en demandant préalablement de réaliser un tableau de valeurs permettant de calculer les dix premiers termes de chaque suite. Nous faisons l'hypothèse que ce travail peut amorcer une réflexion sur des comportements plus globaux tels que la croissance, le caractère borné ou non des suites et sur leur convergence. Nous avons remplacé la deuxième suite par la suite $\left(\frac{(-1)^n}{20}\right)$. Ce choix sera motivé à la troisième question.

Si les notions de croissance et de suite majorée/minorée/bornée ont déjà été travaillées dans le cours, la question 2 peut être conservée telle quelle. D'autres alternatives seront développées plus loin dans le texte.

Ce travail graphique et les classements établis en petits groupes par les étudiants servent alors d'appui pour introduire, à la troisième question, une formulation « numérique » de la définition en (ε, N) . Nous avons choisi ici de remplacer l'inégalité avec valeur absolue par la double inégalité $l - \frac{1}{10} \leq x_n \leq l + \frac{1}{10}$. Celle-ci peut selon nous être un levier pour faire émerger plus facilement une interprétation géométrique en termes de bande autour de la limite l . Les dessins permettent de répondre pour 1/10 mais pas pour 1/100. La suite 2 que nous avons modifiée vérifie les inégalités avec 1/10 mais pas avec 1/100, alors qu'elle ne converge pas.

La question suivante est alors ensuite proposée aux étudiants.

- d) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos réponses par écrit.
 - i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
 - ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

La suite 10 est un contre-exemple pour la première affirmation. Pour la deuxième affirmation, nous faisons l'hypothèse que la première représentation développée à la question 3 permet aux étudiants de conjecturer le résultat mais pas de le démontrer car il manque une définition de la convergence. C'est à ce moment que la définition formalisée est introduite par l'enseignant.

Sur le plan mathématique, nous n'avons donc apporté que très peu de modifications à l'ingénierie initiale. Une expérimentation de l'ingénierie auprès d'étudiants universitaires donnant notamment des précisions sur le rôle de l'enseignant à chacune de ses étapes est présentée dans Bridoux (2016).

3. Principaux objectifs de l'ingénierie

L'objectif principal de cette ingénierie est de sensibiliser les étudiants aux enjeux de l'analyse réelle à l'Université afin de favoriser une entrée dans le point de vue conceptuel nécessaire pour une appropriation de la notion de limite si l'on ne veut pas se limiter à l'approche intuitive dynamique mentionnée plus haut. Pour cela, il est nécessaire que les étudiants soient capables de mobiliser les différentes manières de traduire l'égalité de deux réels à l'aide des valeurs absolues, des doubles inégalités, des intervalles centrés et des bandes de largeur *arbitrairement petite*, entre *langage naturel*, *représentation graphique* et *langage formel*. Il s'agit de permettre aux étudiants de s'approprier les outils qui permettent d'approcher le concept de nombre réel, sa continuité (ou sa complétude) au sens de Dedekind, qui suivant Sinaceur, réduit la continuité de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels à l'ordre (Vergnac et Durand-Guerrier 2014). Ceci motivant l'introduction d'une définition formelle puisqu'en effet, les représentations graphiques ne permettent pas de distinguer entre la droite rationnelle ou décimale et la droite réelle. Un autre objectif important est de questionner un certain nombre de théorèmes en acte (Vergnaud 1990) que l'on observe fréquemment chez les étudiants tels que par exemple : « Toute suite strictement croissante diverge vers $+\infty$ », ou « Toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang », en proposant aux étudiants un « herbier » de suites leur permettant d'identifier que certaines suites strictement croissantes divergent tandis que d'autres convergent, et que certaines suites convergentes sont monotones, et d'autres non.

4. Des prolongements possibles et leurs effets sur les pratiques en classe

La mise en place de l'ingénierie de Robert telle que décrite plus haut présuppose l'existence préalable d'un milieu organisé pour les étudiants (notion de suite majorée/minorée/bornée, croissante, répertoire de suites). Nous sommes conscients que l'énoncé de la question II laisse aux étudiants une variété de réponses possibles et peut dès lors représenter une difficulté de gestion en classe pour l'enseignant. Nous y reviendrons dans le point suivant. Notons cependant que l'ouverture de cette question II permet de faire émerger des critères liés non seulement à la convergence, mais aussi à la croissance des suites considérées. Cela permet donc de travailler également des conceptions erronées (comme par exemple que "*seules les suites croissantes majorées sont convergentes*"), comme le montre Bridoux (2016).

Enfin, un prolongement de cette ingénierie pourrait être d'amener les étudiants à réfléchir à une manière opérationnelle d'énoncer le "théorème des gendarmes", en appliquant le principe de la bande définie à ε près: "si une suite est comprise entre deux suites convergentes vers la même limite, alors, à partir d'un certain rang, les termes de cette suite sont compris dans une bande de largeur 2ε autour de cette limite". Bien entendu, l'idée de bande à ε près peut encore se traduire au moyen d'une double inégalité comme mentionné plus haut.

5. Conclusions et perspectives

L'objectif premier de cette ingénierie est de faire émerger une première représentation de la notion de convergence, en termes de bande. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la question III, et non comme un travail algébrique pour justifier les inégalités en jeu (comme un mathématicien pourrait être tenté de le faire). Et la nécessité d'une définition en (ε, N) est ressentie, à la deuxième partie de la question IV, comme un outil (Douady 1986) permettant de démontrer une propriété. Cependant, certains pourraient penser que des étudiants de L1 ne sont pas sensibles à cette manière d'amener la définition. Une alternative qui pourrait leur être proposée, dans la perspective de l'approximation de la limite (Bloch (2000) et Ghedamsi

(2008)) serait alors d'être explicite dès la formulation de la question *II* sur le but recherché: étudier le comportement "se rapprocher de". La nécessité d'une définition de la convergence sera alors ici liée à la discrimination des critères fournis par les étudiants dans l'étude du comportement des suites. Reste encore la question de la mise en œuvre de cette alternative dans la classe: continuation de travail en petits groupes ou instauration d'un débat scientifique en amphi (Legrand 1993)?

Nous avons aussi déjà mentionné, en début de cette partie, que cette ingénierie pourrait également poser les jalons d'une réflexion sur la construction des réels (avec une égalité "à epsilon près"). Cette perspective amène aussi la question de l'approximation qui peut être investie pour introduire la notion de convergence. En effet, une généralisation de la question *III* formulée en termes d'approche de la limite à « 10^{-n} près » pourrait permettre à l'enseignant d'utiliser l'image d'une bande (autour de la limite) dont la largeur est en relation avec le degré d'approximation que l'on s'est fixé. L'idée sous-jacente qu'il faudrait alors faire émerger est qu'il y a convergence lorsqu'on peut envisager n'importe quel degré d'approximation.

III. REPRISE ET ADAPTATION DE L'INGENIERIE DE ROBINET

1. Introduction

L'ingénierie construite par Robinet (1983) dans les années quatre-vingt semblait avoir permis, d'après son auteur, de partir d'une étude qualitative pour conduire les élèves de la classe de Première B (filière *économique et social*) vers une définition formalisée du concept de limite, et d'introduire ensuite des théorèmes généraux.

Actuellement au lycée, l'enseignement construit une *conception ponctuelle et technique* de la limite d'une fonction en un point ou en l'infini, la justification des techniques étant renvoyée à l'intuition. Expliquons cela. Conception *ponctuelle*, car les seuls moments où le point de vue « local » est présent sont l'introduction et la définition, et ce point de vue est délaissé ensuite au profit de techniques algébriques opératoires, à partir de fonctions de référence et de nombres dérivés donnés (tels $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Le point de vue analytique est absent : les infiniment petits ou infiniment grands, à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que » ne sont pas travaillés, même si on trouve quelques exercices « alibis ». Conception *technique* : les manuels proposent un grand nombre de « théorèmes » ou propriétés qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi, ou en des règles algébriques sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée. Il manque dans les programmes actuels :

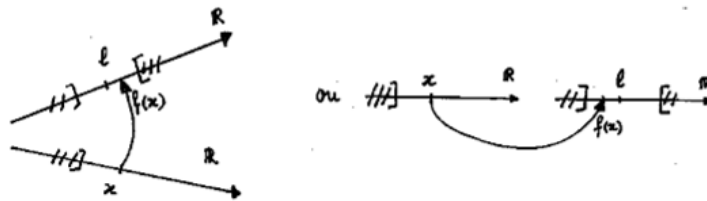
- une approche qualitative du concept de limite de fonction ;
- un travail introductif sur les approximations numériques. Par exemple : que dois-je choisir pour x pour que $f(x)$ soit inférieur en valeur absolue à une puissance de 10 donnée (pour une fonction à limite nulle).
- de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation et les représentations des voisinages (par des bandes) dans l'objectif de donner du sens à des expressions comme « être près de » ou « être plus grand que », etc., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites.

2. Description brève de l'ingénierie de Robinet

Robinet a situé son ingénierie didactique entre deux extrêmes :

- une approche uniquement quantitative, reliant la notion de limite aux phénomènes réels qui peuvent lui donner du sens, mais ne permettant pas d'établir des théorèmes généraux ;
- une approche formalisée qui permet de résoudre des problèmes de limite pour un large ensemble de fonctions (y compris non explicitées), mais risquant de créer des décalages formels (et épistémologiques).

Cette ingénierie était destinée à des élèves de Première B (filière *économique et sociale*) dans les années quatre-vingt. Dans les programmes de l'époque, le cours devait « être assis sur des fondements théoriques précis et clairement définis » – i.e. la théorie générale des fonctions réelles d'une variable réelle appuyée sur la topologie générale, les notions et propriétés devaient être présentées chacune en déduction logique des précédentes, et les théorèmes démontrés. Les manuels étudiés par Robinet révélaient un même schéma d'enseignement : étude topologique de \mathbb{R} , formalisation de la continuité puis définition et formalisation de la limite d'une fonction en un point en termes de voisinages. Robinet avait en revanche constaté une grande diversité d'utilisation des graphiques dans les manuels, plusieurs ne donnant aucune représentation cartésienne des limites et de la continuité, et les seuls graphiques présents étant du type ci-dessous.



Ces graphiques – un peu surprenants – ne représentent en rien la notion de limite ; on peut se demander ce qu'il reste dans la tête des étudiants après de tels dessins « généraux ».

L'ingénierie de Robinet était organisée pour introduire la formalisation comme outil nécessaire pour distinguer différents types de limites à l'infini ou en 0, à partir de l'étude globale et locale de courbes de fonctions. Elle était organisée en trois temps : étude locale puis globale de la parabole, étude des hyperboles et enfin une « généralisation ». Nous n'allons pas décrire cette ingénierie ici, mais elle sera présente en filigrane lorsque nous expliciterons les raisons pour lesquelles nous avons repris (ou non) certaines situations dans notre ingénierie, et les adaptations que nous en avons faites.

3. Choix généraux pour la « nouvelle ingénierie »

Ces choix ont été guidés à la fois par la volonté de garder l'esprit et les objectifs de l'ingénierie de Robinet et la nécessité de l'adapter aux élèves à qui elle est destinée (L1 Sciences) et aux évolutions des programmes depuis 1980. Notre objectif final est de construire des situations qui permettent de justifier l'intérêt et la nécessité de la formalisation pour l'étude générale des limites et des comportements asymptotiques des fonctions. Robinet avait elle aussi cet objectif dans son ingénierie, mais une question est restée ouverte : est-il possible de réduire le saut conceptuel entre une approche intuitive et qualitative du concept de limite (par une étude locale ou globale graphique) et sa formalisation. La mise en relation des notions de voisinage et d'encadrement et leurs représentations graphiques par des « bandes »

peut être un pont entre les ostensifs associés à l'approche intuitive et qualitative et la formalisation.

Nous avons choisi de regrouper paraboles et hyperboles, et d'ajouter d'autres fonctions n'ayant pas d'asymptotes mais pour lesquelles on fait l'hypothèse que les tracés sont connus des étudiants (nous les donnons ci-après). Notre objectif premier est la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$. La situation de départ de l'ingénierie de Robinet (consigne 1 de la phase d'étude de la parabole) est abandonnée. Elle consistait en l'étude au voisinage de points très loin de l'origine ($x = 100, 1000$, etc.) de la position de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow x^2$ relativement à une sécante dans des voisinages de ces points. Nous n'avons pas conservé cette tâche car elle nous a semblé concerner davantage les notions de sécante et tangente à une courbe que la notion de limite. Mais aussi pour d'autres raisons : c'est une tâche chronophage si on l'exécute à la main, et elle pose des questions d'échelles non orthonormées si on utilise un logiciel ; enfin, un doute existe quant à la possibilité de motiver des étudiants sur une telle question.

4. Une expérimentation en 2014 de la « nouvelle ingénierie »

Un membre de notre groupe de travail (Menini) a expérimenté le tout début de notre projet d'ingénierie. Cette expérimentation a été réalisée en classe avec une trentaine d'étudiants, dans un parcours maths-informatique-physique-chimie de L1¹² Sciences au semestre 1, au début d'un cours sur les limites, et après le cours sur les suites. Nous ne donnons ici que les résultats les plus significatifs.

La tâche consistait à tracer l'allure générale des courbes sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et le classement de quelques fonctions, pour moitié classiques et pour l'autre moitié moins connues. Les étudiants ont travaillé en groupes, chaque groupe a étudié deux fonctions, une « facile » et une « délicate ». Un représentant de chaque groupe est passé au tableau. Les constats sont les suivants : l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow x^2$ n'a soulevé aucune difficulté, de même que celles des courbes représentatives des fonctions $x \rightarrow x^3$ et $x \rightarrow \frac{4}{(2-x)^2}$ qui sont en fait dans l'herbier usuel des étudiants, la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow \frac{(2+x)}{(7-x)}$ d'allure correcte a été tracée avec un décalage vertical (le tracé correspondait à celui d'une fonction ayant une limite nulle à l'infini). En revanche, le tracé de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ n'a pas été immédiat, les étudiants déclarant ne pas s'en souvenir ont hésité sur la forme – mais pas sur les limites. Pour la fonction $x \rightarrow x + \sin x$, c'était la panique : si les placements de quelques points ont été corrects, ceux-ci ont été reliés par une courbe régulière, les oscillations de la fonction $x \rightarrow \sin x$ semblant ne pas intervenir. Bien que l'enseignant ait proposé de placer plus de points et de réfléchir à l'incidence des oscillations bien connues de la fonction $x \rightarrow \sin x$ sur le tracé de la courbe représentative de cette fonction, le tracé n'a pas été produit. Enfin, pour les fonctions $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ et $x \rightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, l'échec a été total.

5. Description de notre ingénierie dans sa version actuelle

Les résultats de cette expérimentation nous ont amenés à préciser les choix de notre ingénierie. Sa version actuelle est présentée ci-après. Elle a été expérimentée début 2015 par un membre de notre groupe¹³.

¹² Première année de licence

¹³ Voir Sénéchaud (2015) pour un compte-rendu de l'expérimentation.

Nous avons choisi de ne pas utiliser de logiciel graphique pour deux raisons. D'une part, pour repérer ce que les étudiants ont retenu des représentations de fonctions par des courbes, après avoir utilisé largement ce type de support informatique au lycée. D'autre part, parce que l'utilisation de tels outils ne se justifie pas ici, l'objectif de cette ingénierie étant l'énoncé d'une définition formelle et la motivation de son intérêt.

Situation 1. Une étude qualitative globale de quelques fonctions (monotones, non monotones, ayant ou non une limite en l'infini, et des points de non-définition en 0, ou autre x_0) : $x \rightarrow x^3$; $x \rightarrow \sqrt{x}$; $x \rightarrow \frac{1}{x}$; $x \rightarrow x + \sin x$; $x \rightarrow \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \rightarrow \frac{(2+x)}{(7-x)}$; $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$; $x \rightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. La tâche demandée est double : tracé de l'allure générale de la courbe de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis classement – le critère du classement n'est pas explicité, mais on peut faire l'hypothèse que ce sera en relation avec les comportements supposés à l'infini. Les critères de classement pourraient être les suivants : limite finie ou infinie en $+\infty$, limite finie ou infinie en x_0 , asymptote ou non. Les fonctions $x \rightarrow x^3$; $x \rightarrow \sqrt{x}$; $x \rightarrow \frac{1}{x}$ ne devraient pas poser (trop de) difficultés, de même que les fonctions homographiques usuelles.

Situation 2. Reprise et adaptation de la consigne 2 de la partie concernant la parabole de Robinet. Étude locale des courbes des fonctions $x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow \sqrt{x}$ avec la question : « Comment x pour que x^2 (respectivement \sqrt{x}) soit supérieur à 25, à 10^2 , à 10^6 ? ». Il s'agit, pour chacune de ces fonctions, de trouver un nombre A à partir duquel les valeurs de la fonction sont plus grandes qu'une valeur donnée. Les encadrements matérialisés par des bandes devraient permettre de rendre visibles les différences de comportements en l'infini de ces deux fonctions, et susciter l'intérêt d'une formalisation de « limite en $+\infty$ » comme outil nécessaire pour préciser ces différences (voir par exemple Roh 2010).

Situation 3. Formalisation de la « limite infinie en $+\infty$ » illustrée avec les fonctions étudiées en situation 1 et 2 ($x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow \sqrt{x}$, $x \rightarrow x^3$ et $x \rightarrow x + \sin x$). Puis formalisation de la « limite finie en $+\infty$ », exemplifiée sur d'autres fonctions vues en situation 1 : $x \rightarrow \frac{1}{x}$; $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$; $x \rightarrow \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \rightarrow \frac{(2+x)}{(7-x)}$ avec des représentations par des encadrements (bandes). Réinvestissement : étude de la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) [100 - x]$, en demandant de la tracer sur l'intervalle $[100; 110]$. On pourrait demander deux graphiques différents, dans une tâche papier-crayon, dans l'objectif de créer un herbier consistant de fonctions, dont on étudierait le comportement dans certaines « fenêtres ».

Situation 4. Définition de la limite en un point. Cette dernière phase distingue les notions de « limite de suite » et « limite de fonction ». Nous suggérons que le point choisi ne soit pas exclusivement situé en $x = 0$ et que la fonction n'ait pas forcément une limite nulle – bien que des difficultés calculatoires soient fréquentes lorsque la limite est non nulle. On peut reprendre les fonctions déjà étudiées dans les situations précédentes : $x \rightarrow \frac{1}{x}$ en $x = 0$; $x \rightarrow \frac{4}{(2-x)^2}$ en $x = 2$; $x \rightarrow \frac{(2+x)}{(7-x)}$ en $x = 7$; $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ en $x = 0$; $x \rightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$. On pourrait rajouter $x \rightarrow \frac{(x^2-1)}{(x+1)}$ en $x = -1$.

6. Conclusion

Même si l'ingénierie de Robinet a trente ans, elle est, selon nous, toujours d'actualité dans son principe et ses objectifs pour des étudiants de première année de licence ou de niveau

équivalent en Sciences. Définir le concept de « limite de fonction » de manière formelle et motiver le passage à l'abstraction par des situations bien choisies, ne peut qu'être positif pour une construction adéquate de ce concept chez les étudiants. Nous proposons dans ce texte des aménagements de cette ingénierie qui nous ont semblé pertinents pour amener à cette formalisation, en essayant de réduire le « saut conceptuel » – même s'il ne peut être totalement supprimé – entre une notion intuitive de la limite d'une fonction et le concept mathématique.

IV. CONCLUSION

A l'issue de ce retour sur des ingénieries anciennes sur le concept de convergence, un certain nombre de questions se posent.

D'abord, les deux ingénieries ici présentées ne sont évidemment pas les seules possibles. Par exemple, dans le même esprit, on peut citer l'exemple présenté par T. Lecorre dans le cadre du *débat scientifique* (Ghedamsi & al., à paraître). Pour une introduction possible dans le cadre de la problématique du « *degré choisi d'approximation de la limite* », on peut lire avec profit (Bloch 2000 et Ghedamsi 2008), en pensant à la manière de l'adapter pour le niveau licence. Cette problématique reste fondamentale pour rendre opérationnel le concept de limite, et la suite dans l'enseignement des ingénieries proposées devrait de toute façon prendre en charge cette question.

Cela soulève une question dont la réponse dépend des projets curriculaires pour la licence : *jusqu'à quel degré d'expertise* sur la notion de convergence doit-on, peut-on, mener les étudiants ? Rendre cette notion opérationnalisable signifie la mettre en œuvre dans des problèmes non immédiats, et alors la question des enseignements de méthodes de résolution de problèmes dans ce domaine se pose. Voir à ce sujet (Rogalski 1990) et le projet de contribution (Rogalski et Rogalski 2015) dans ce même GT7 de EMF2015.

Une autre question, laissée totalement ouverte par le choix de présenter ces deux ingénieries, est celle de *l'ordre des enseignements entre convergence des suites et limites de fonctions*. Bien sûr, la réponse dépend des choix de curriculums concernant l'enseignement de l'analyse (nombres, fonction, convergence, continuité, dérivabilité...).

Enfin, une question très générale mériterait de plus amples réflexions : la formalisation d'une nouvelle notion dépend de son mode d'introduction, et ceux présentés ici relèvent plutôt d'un choix de considérer la notion de convergence comme un concept de type FUG (Formalisateur, Unificateur, Généralisateur) au sens de Robert (2008). Rien ne dit qu'un autre choix, par exemple dans le cadre de la problématique de l'ordre d'approximation de la limite, ne pourrait modifier le concept de convergence et sa formalisation de façon à les présenter comme des « Réponses à un Problème » (RAP), voir Robert (2008).

REFERENCES

- Bloch I. (2000) *Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch*. Dans I. Bloch : L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, thèse de l'Université Bordeaux 1.
- Bridoux S. (2016) Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? *Projet pour INDRUM 2016*.
- Dorier J.L. (Ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 5-31. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Durand-Guerrier V. et Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.
- Durand-Guerrier V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : la Pensée Sauvage Editions.
- Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse Université de Tunis et Université Victor Segalen, Bordeaux 2.
- Ghedamsi I., Haddad S., Lecorre T. (2015) Les notions de limite et d'intégrale, du secondaire au supérieur, TD à l'Ecole d'été de didactique des mathématiques, à paraître dans *les actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques*. Brest, 19-26 août 2015.
- Gueudet G. (2008) Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. *Actes de la XIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, 159-175.
- Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. *Repères IREM* 10, 123-159.
- Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* 340, 431-449.
- Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 45-56). Octarès, Toulouse.
- Robinet J. (1983) Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(3), 232-292
- Rogalski M. (1990) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.
- Rogalski J., Rogalski M. (2015) Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence. *Projet pour le GT7 de EMF2015*.
- Roh K.H. (2010) An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ϵ -strip activity- *Educational Studies in Mathematics*, Volume 73, Issue 3, pp.263-279.
- Sénéchaud P. (2015) Compe-rendu de passation en L1 d'une ingénierie sur la notion de limite de fonction. Site de la Commission InterIREM Université, sur le site de l'ADIREM : http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique394&var_mode=calcul
- Vergnac M., Durand-Guerrier V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x* 96, 7-28.
- Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2), 133-170.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



DIFFICULTES CONCEPTUELLES D'ETUDIANTS DE PREMIERE ANNEE D'UNIVERSITE FACE A LA NOTION DE CONVERGENCE DES SUITES NUMERIQUES

Bouchra LITIM^{*} – Moncef ZAKI^{**} – Amina BENBACHIR^{***}

Résumé – Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés aux difficultés rencontrées par les étudiants de première année universitaire face à la notion de convergence de suites numériques. L'analyse de productions à un examen de fin de semestre, de toute une promotion d'étudiants inscrits dans les filières SMA et SMI à tendance « mathématique », a révélé beaucoup de difficultés trouvant leurs origines dans des conceptions antérieures erronées, dans le changement de contrat didactique lors de la transition secondaire-supérieur, dans la transposition didactique des enseignements, et de manière plus spécifique dans le caractère « FUG » que revêt la notion de convergence de suites numériques. L'analyse et l'interprétation des productions des étudiants, nous ont conduit à conclure que l'enseignement traditionnel de type cours magistral et travaux dirigés était mal adapté à l'enseignement des suites numériques. Ainsi, nous avons envisagé dans l'avenir de concevoir une ingénierie didactique de type « débat scientifique », inspirées des erreurs et difficultés rencontrées par les étudiants ayant fait l'objet de la présente expérimentation.

Mots clés : Convergence, université, difficultés, conception, transition secondaire-supérieur

Abstract – In the present work, we were interested in the difficulties met by students in first scientific years of university in the face of the notion of convergence of numerical sequences. The analysis of productions in exams at the end of the first half for students of sectors Sciences Mathematics and Applications (MSA) and Mathematics and Computer Science (MSC), revealed many difficulties finding their origins in previous erroneous conceptions, in the change of didactic contract during the transition Secondary-university, in the didactic transposition of teachings and in a more specific manner in the nature "FUG" of the notion of convergence of numerical sequences. The analysis and the interpretation of the productions of the students, led us to conclude that the traditional teaching was not adapted to teaching the numerical sequences. So, we envisaged in the future to conceive didactic engineering of type "scientific debate", based on the installation of the didactic situations, inspired of the errors and difficulties encountered by the students having been the subject of the present experimentation

Keywords: Convergence, university, conception, difficulties, transition secondary- university

* Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – Maroc – b.litim@hotmail.com

** Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – Maroc – ambenbachir@yahoo.fr

*** Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – Maroc – zaki.moncef@yahoo.fr

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

La notion de convergence de suites numériques tient une place fondamentale dans l'analyse mathématique, l'enseignement des suites commence dès la 2^{ème} année du lycée (structure similaire au système français) et se poursuit tout au long des études universitaires. Cette notion est d'autant importante pour des étudiants qui sont inscrits en première année d'une filière mathématique, puisqu'ils doivent réinvestir cette notion dans plusieurs situations d'analyse mathématique, notamment lors de l'étude de la topologie de la droite réelle (valeurs d'adhérence) ou encore pour l'étude de la continuité d'une fonction à variable réelle.

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à cette notion ; celles de Robert (1982, 1983) et de Boschet (1983) en constituent les premiers travaux, qui ont très rapidement pointé le fait que les étudiants ont beaucoup de difficultés à maîtriser cette notion.

Le présent travail s'inscrit à son tour dans cette problématique : nous cherchons à identifier les difficultés et les erreurs de nos étudiants dans leurs traitements de la convergence des suites numériques. Cette problématique s'inscrit en fait dans une autre qui est plus large, à savoir la mise en place de situations didactiques portant sur la notion de convergence de suites numérique dans le cadre d'un débat scientifique auprès des étudiants (Litim, Benbachir & Zaki 2014, à paraître). Dans le cas présent, l'étude portera essentiellement sur les difficultés rencontrées par les étudiants à travers l'analyse de leurs productions à propos d'un exercice sur les suites numériques, lors d'une évaluation de fin de semestre d'un module d'analyse. Ainsi, nous tenterons de répondre aux questions suivantes :

Quelles sont les difficultés éventuelles rencontrées par les étudiants ? Leurs causes ? Et leurs natures ?

Que peut-on tirer de cette étude comme conclusions à propos de l'enseignement de la convergence des suites numériques ?

II. CADRE THEORIQUE : ORIGINES DES DIFFICULTES D'APPRENTISSAGE

1. *Difficultés et contrat didactique*

Les recherches de Brousseau (1978) sur l'échec électif en mathématiques, l'ont conduit à introduire le concept du contrat didactique comme une éventuelle cause de cet échec. Il a alors défini ce contrat en termes d'habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître. D'après Brousseau, certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et que certains élèves pourraient donc éventuellement en tirer bénéfice à travers une formation convenable. (Brousseau 1980).

Ainsi, d'après cette approche didactique, une modification du contrat didactique peut constituer une solution possible à l'échec en mathématiques.

2. *Difficultés et transposition didactique*

Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le (travail) qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique. (Chevallard 1985, p. 39)

Ainsi, à travers la transposition didactique, Chevallard pose le problème d'adaptation du savoir à enseigner (savant) au savoir enseigné. Il souligne que la distance, souvent

considérable, entre le savoir savant et le savoir enseigné peut poser de sérieux problèmes dans l'enseignement.

3. *Difficultés et conceptions*

Les travaux de Brousseau (1983) montrent que l'erreur n'est pas seulement due à l'ignorance, à l'incertitude ou au hasard, comme cela est souvent présenté dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure qui a été engagée avec quelques succès dans une famille d'actions, et qui se révèle fautive ou inadaptée dans d'autres situations. Une telle conception sera difficile à éliminer, et fera alors obstacle devant tout nouvel apprentissage.

Ainsi, les conceptions antérieures tiennent une place fondamentale dans l'acquisition d'un nouveau savoir. Par conséquent, l'analyse des conceptions des apprenants peut aussi contribuer à déceler les obstacles rencontrés.

4. *Difficultés conceptuelles liées à l'enseignement et l'apprentissage de la convergence des suites numériques*

Certaines notions en mathématique possèdent à la fois des caractères formalisateurs, généralisateurs et unificateurs, que Vanderbrouck (2008) note par le sigle « FUG ».

La notion de convergence des suites numériques en est un exemple parfait. En effet, de par sa nature « FUG », cette notion provoque des difficultés d'enseignement et d'apprentissage auprès des étudiants (Robert 1998). À l'université marocaine, la notion de convergence des suites numériques est présentée de façon formelle, avec des définitions qui mettent en jeu des connaissances de logique en présence de quantificateurs et d'implications, qui souvent, n'ont jamais fait l'objet d'un enseignement spécifique au lycée comme c'est le cas en Tunisie (Chelougui 2004). Les travaux dirigés exigent un ensemble de techniques :

- Des raisonnements déductifs, par absurde
- Manipulation de la définition en (ϵ, N) , que les enseignants du supérieur supposent qu'il est assez manipulé au secondaire, ce qui n'est pas le cas.

Nous pensons que ces activités pédagogiques qui ne prennent pas en compte la nature FUG de la convergence des suites numériques contribuent à renforcer les difficultés.

Les travaux de Robert (1982, 1983, 1990, 1998) sur l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques auprès des étudiants de l'université et des élèves de classes préparatoires aux grandes écoles, a aussi révélé trois grands types de représentations : dynamiques, statiques et monotones. Il s'est avéré que les étudiants qui ont une représentation statique, sont ceux qui arrivent à réaliser de bonnes performances, contrairement à ceux qui utilisent un modèle monotone, et qui présentent d'énormes difficultés. Robert a par ailleurs souligné une difficulté majeure dans le traitement des suites numériques, à savoir le fait que certains étudiants ont des difficultés à prendre en compte le caractère variable de l'indice n d'une suite numérique.

III. METHODOLOGIE

Notre expérimentation a été réalisée en février 2011 auprès d'étudiants de première année d'université inscrits dans deux filières de licences fondamentales : Sciences Mathématiques et Applications (SMA) et Sciences Mathématiques et Informatique (SMI). Ces étudiants ont tous suivi durant le premier semestre un enseignement classique d'analyse (module

d'analyse), où les suites numériques ont été introduites de manière formelle, à l'aide de définitions en ε et \mathbb{N} , accompagnées de tous les théorèmes de base concernant la convergence de suites numériques. Durant ce semestre, les enseignements étaient répartis en cours magistraux (deux fois 2h en amphitheâtre hebdomadaires) et travaux dirigés (trois fois 1h30 hebdomadaires en groupes de 80 étudiants).

Suite à l'examen du module d'analyse de fin de semestre, nous avons procédé à l'analyse des productions de l'ensemble des étudiants (330 copies) relatives à l'exercice portant sur les suites numériques. Notre analyse a été à la fois qualitative et quantitative.

IV. ANALYSE APRIORI DU PROBLEME

L'épreuve d'examen comportait trois exercices pour une durée de 4 heures, dont voici l'énoncé de l'exercice portant sur les suites numériques :

Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la fonction g_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sum_{k=1}^n x^k - 1$$

- Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique $a_n \in [0, 1]$.
- Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi obtenue est décroissante.
- En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.
- En déduire que l'ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ est un compact de \mathbb{R} .

Pour la question a :

On montre que g_n est strictement croissante, continue et vérifie :

$$g_n(0) = -1 \quad \text{et} \quad g_n(1) > 1.$$

Puis on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

Pour la question b :

Il suffit de comparer $g_n(a_{n+1})$ et $g_n(a_n)$ puis d'utiliser la croissance de la fonction g_n .

Cette question demande des sommations.

Pour la question c :

Une déduction facile du fait que (a_n) est décroissante et minorée par 0, puisque c'est un résultat de cours.

Pour la question d :

Il suffit de déduire de $g_n(a_n) = 0$, l'égalité : $2a_n = 1 + a_n^{n+1}$, puis de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1} = 0$ et de déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1/2$. Il faut bien entendu faire attention au caractère variable de n , tout en maîtrisant les résultats du cours.

Pour la question e :

On montre que A est bornée et que toute suite de A admet une valeur d'adhérence. Cette question peut a priori soulever certaines difficultés, puisqu'elle renvoie à des résultats topologiques et à la convergence de suites numériques.

V. ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ETUDIANTS

Dans notre analyse, nous nous sommes limités aux questions b, c, d et e, qui sont directement liées à la notion de convergence de suites numériques. Les erreurs rapportées dans l'analyse, sont rédigées telles qu'elles ont été écrites dans les productions des étudiants.

1. Question b :(Figure 1)

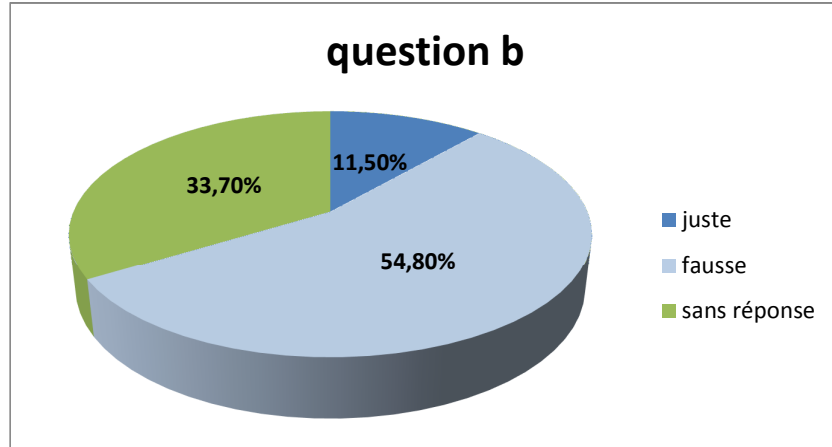


Figure 1 – Répartition des réponses à la question b

Sur l'ensemble des copies, 181 étudiants ont donné des réponses fausses, dont 58 qui n'arrivent pas à faire des sommations correctes. En voici quelques exemples :

$$g_{n(a_{n+1})} - g_n(a_n) = \sum_{k=1}^{n+1} a_n^k - \sum_{k=1}^n a_n^k = a_n^{n+1}$$

$$g_{n+1(a_{n+1})} - g_n(a_n) = a_{n+1}^k$$

$$\sum_{k=1}^n a_n^k = 1 \Rightarrow a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n = 0.$$

12 étudiants ont confondu g_n avec g_{n+1} , en faisant : $a_{n+1} \leq a_n$ et puisque g_n est croissante $g_{n+1}(a_{n+1}) \leq g_n(a_n)$.

25 étudiants ont remplacé a_n par $\sum_k x^k - 1$. L'origine de cette erreur nous a été expliquée grâce à la copie d'un de ces étudiants qui a posé :

$$g_{n+1}(x) = (a_{n+1})_{n \geq 1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - 1$$

$$g_n(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - 1$$

Cette réponse incohérente révèle des perturbations au niveau de la manipulation des symboles, du sens donné à une suite numérique et une incompréhension de l'énoncé de l'exercice.

Certaines réponses révèlent des difficultés de mise en fonctionnement des inégalités sur \mathbb{R} :

$$0 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n a_n \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1}^k < \sum_{k=1}^n a_n^k \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ et } a_n \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 1 - 1 = 0$$

2. Question c : (Figure 2)

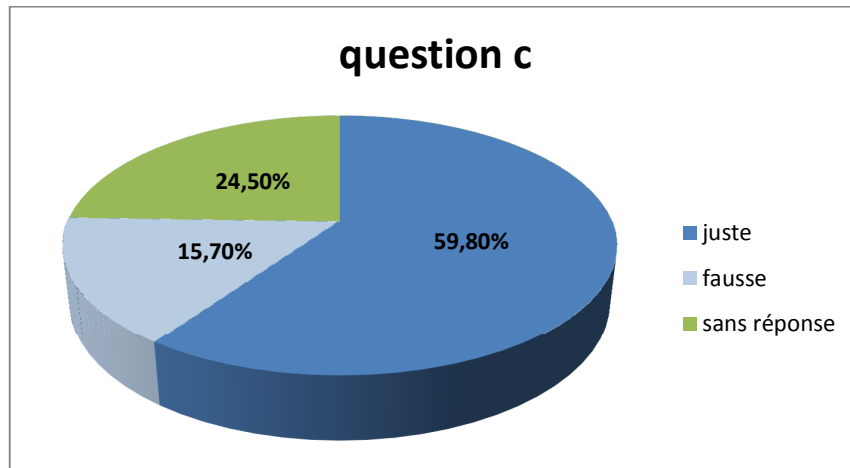


Figure 2 – Répartition des réponses à la question c

Nous y avons relevé 81 non réponses et 52 réponses fausses, dont voici quelques erreurs fréquentes :

$a_n \in [0; 1]$, on pose $f_n(x) = a_n \in [0; 1]$ qui est fermé, borné et atteint ses bornes d'où $a_n \geq \inf f_n$ donc (a_n) est minorée !

Confusion entre a_n et (a_n) .

$a_n \in [0; 1]$ donc (a_n) est minorée par 1.

$a_n \in [0; 1]$ donc pour $\varepsilon = 1$ on a $|a_n| < 1$ et $|a_n - a_{n-1}| < 1$

alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists l \in \mathbb{R}$ tq : $|a_n - l| < \varepsilon$.

$$a_{n+1} \in [0; 1] \Rightarrow a_{n+1}^{n+1} \rightarrow 0$$

a_n est décroissante et continue.

$$\forall \alpha \in [0; 1] - \varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon ;$$

$-\varepsilon + \alpha < a_n < \varepsilon + \alpha$ donc (a_n) est convergente.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0, a_n < \frac{1}{2}$ donc a_n est convergente.

a_n est décroissante donc, elle est minorée, donc elle est convergente.

a_n est dérivable, décroissante, donc elle est convergente.

3. Question d : (Figure 3)

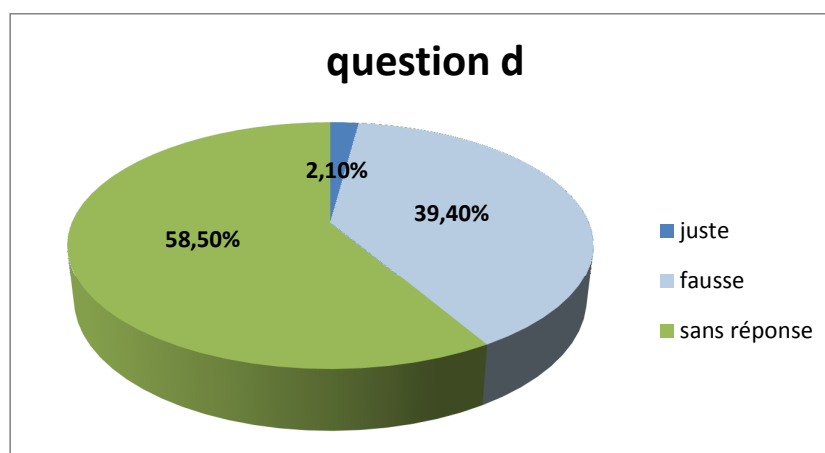


Figure 3 – Répartition des réponses à la question d

On y retrouve 131 réponses fausses, dont voici quelques erreurs les plus fréquentes :

$$a_n \geq \frac{1}{2} \text{ donc } \lim a_n = 1/2.$$

On a a_n est convergente $\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \geq n_o$:

$$\forall n \geq n_o \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon; \text{ si on prend } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l - \frac{1}{2} \leq a_n \leq l + \frac{1}{2} \text{ si } a_n \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq a_n \leq 1 \text{ alors } l \text{ vérifie}$$

$$l + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$|g_n(a_n) - g_n(1/2)| = \left| a_n - \frac{1}{2} \right| |g_n| < \left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$0 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow 0 < \lim a_n < 1 \text{ donc } \lim a_n = 1/2.$$

$$a_n \text{ converge vers } l \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq l \leq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_o \geq 0, n \geq n_o |a_n - l| < \varepsilon \text{ pour } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$]l - \varepsilon; l + \varepsilon[\subset [0; 1] \Rightarrow l = \frac{1}{2}.$$

4. Question e : (Figure 4)

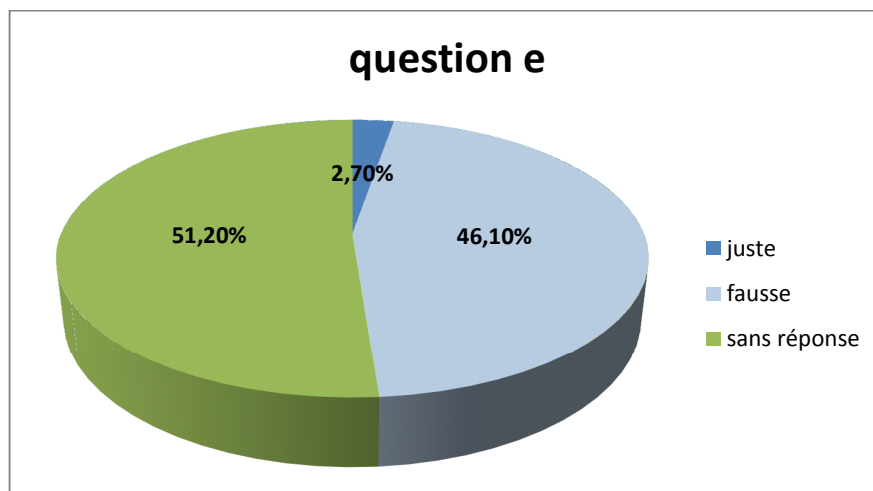


Figure 4 – Répartition des réponses à la question e

On y retrouve seulement 9 réponses justes. Voici quelques exemples de réponses fausses les plus fréquentes :

$\{a_n\}$ est fermé de $\mathbb{R} \Rightarrow a_n \rightarrow l$ aussi borné et fermé

A_n est l'adhérence de l'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors on a d'après le cours les compacts sont les adhérences de \mathbb{R}

A_n est borné $0 \leq A_n \leq 1$

$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq a_n < \frac{1}{2} + \varepsilon$, donc A_n est fermé et borné donc A_n est compact.

$$A_n = [0; 1]$$

$A_n \neq \emptyset$

a_n est fermé et borné.

VI. INTERPRÉTATION DES RÉPONSES DES ÉTUDIANTS

La première remarque frappante est que les étudiants utilisent les résultats du cours de façon imprécise, voire même fausse ; et il arrive même parfois que certains d'entre eux fabriquent des résultats faux dans leurs propres justifications (satisfaction de leur propre convenance). Nous remarquons aussi une perte de sens de la notion de la suite : a_n est remplacé par $f_n(x)$, a_n est confondu avec (a_n) , a_n est fermé, ou encore a_n est dérivable. Ces difficultés relèvent essentiellement de la transposition didactique, mais aussi de difficultés conceptuelles qui sont les résidus de conceptions antérieures erronées.

La définition en (ε, N) est utilisée automatiquement et d'une manière fausse même dans le cas où la question peut être traitée sans le recours à cette définition: Peut s'expliquer par l'utilisation de l'enseignant de la définition dans la résolution de la majorité des exercices, donc du fait du contrat didactique

On note aussi un manque de détails, même pour des réponses justes ; d'ailleurs la remarque « mal rédigé » du correcteur figure sur presque toutes les copies : ici, nous

constatons que cette difficulté relève d'une rupture du contrat didactique lors de la transition secondaire-supérieur.

Par ailleurs, les réponses des étudiants nous révèlent de manière précise les éléments suivants :

-Des stratégies incorrectes pour la résolution de l'exercice : cette difficulté peut s'expliquer d'après Charnay (1992), soit par une incapacité chez l'étudiant à récupérer à long terme des procédures dans sa mémoire, soit par une insuffisance, voire une inefficacité du réinvestissement de ses expériences scolaires antérieures. Nous pensons qu'une nouvelle méthode d'enseignement est nécessaire pour permettre aux étudiants de s'approprier une démarche scientifique lors de la résolution de problèmes

-Fabrication des résultats faux dans leurs propres justifications qui révèle la présence de conceptions erronées favorisée par la méthode de l'enseignement classique.

-L'incohérence de quelques réponses révèle des perturbations au niveau de la manipulation des symboles, et une incompréhension de l'énoncé de l'exercice.

-Une perte de sens de la notion qui se manifeste par l'absence de la prise en compte du caractère variable de n dans une suite numérique. Cet oubli traduit implicitement la non prise en compte des étudiants du caractère fonctionnel d'une suite, probablement favorisée par une « négligence » de cet aspect durant l'enseignement, mais aussi par le non recours à des activités faisant appel à des traitements numériques et graphiques utilisant des calculatrices par exemple. Ainsi, nous partageons l'idée de Robert (1990) qui pense que l'origine de ces erreurs est due à l'omission fréquente de la modification de la variable n dans le cours ; elle suppose aussi que l'étudiant considère que « U_n se rapproche de l » veut dire que U_n , avec n fixé, qui est envisagé se déplacer vers l .

-Des difficultés dans la manipulation de la définition en (ε, N) , qui sont notamment liées à la non disponibilité de connaissances en logique, et cela particulièrement lors de l'utilisation des quantificateurs donc des difficultés liées à la transposition didactique qui ne prend pas en compte la nature FUG de la convergence des suites numériques et la rupture de plus en plus grande entre le lycée et l'université. Ces difficultés peuvent s'expliquer aussi par les représentations des étudiants sur ce concept (Robert 1983)

Pour bien identifier ces difficultés nous avons élaboré un pré-test l'année suivante avec des questions qui exigent l'utilisation de la définition en (ε, N) (Litim, Benbachir & Zaki 2014).

VII. CONCLUSION

Les résultats de cette expérimentation nous ont conduits à procéder à l'élaboration d'une ingénierie didactique de type « débat scientifique » (Legrand 1993), fondée sur la théorie des situations (Brousseau 1986) et la théorie anthropologique (Chevallard 1991). En effet, l'analyse des erreurs et difficultés relevées dans les productions des étudiants, nous permet d'émettre l'hypothèse forte selon laquelle, le débat scientifique va permettre à l'étudiant de s'impliquer dans la construction de son savoir et de favoriser l'apparition de conflits cognitifs nécessaires à une compréhension plus approfondie.

Le choix du débat scientifique auprès des étudiants a été guidé par une recherche antérieure menée au sein du laboratoire LIRDIST (Benbachir & Zaki 2001), qui a montré que la confrontation de raisonnements d'étudiants lors de résolution de problèmes, a permis de bien identifier les principales difficultés relatives à l'analyse des fonctions en première année d'université, puis de faire progresser les étudiants vers une meilleure maîtrise de cette notion.

REFERENCES

- Benbachir A., Zaki M. (2001) Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics* 47, 273–295.
- Boshet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques* (4/2), 141–163.
- Brousseau, G. (1978) L'observation des activités didactiques. *Revue Française de pédagogie* 45, 130–139.
- Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques* (4/2), 165–198.
- Brousseau G. (1986) La théorie des situations, *RDM* (7/2), ³³–¹¹⁵: la pensée sauvage.
- Brousseau G. (1980) Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie* (3/4), 107–131.
- Brousseau G. (1984) Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage. Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactiques des mathématiques d'Olivet.
- Charnay R., Mante M. (1992) De l'analyse de l'erreur en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier, *Grand N* 48, 37–64
- Chellougui F. (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x* 61, 11–34.
- Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Chevallard Y. (1991) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques* (12/1), 73–112.
- Legrand M. (1993) Le débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM* 10, 123–149
- Litim B., Benbachir A. et Zaki M. (2014) Impact of previous conceptions in secondary-university transition: the case of conversion of numerical sequences. *International Journal of Research in Education Methodology* 6(3), 896–903.
- Litim B., Benbachir A. et Zaki M. (à paraître) L'apport du débat scientifique au développement du raisonnement mathématique : cas de la convergence des suites numériques en première année d'université. *Revue Africaine de Didactique des Sciences et de Mathématiques*.
- Robert A. (1982) Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VII*.
- Robert A. (1983) Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques* 3, 305–341.
- Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en Didactique des mathématiques* (18/2), 138–190.
- Robert A. (1990) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, Enseigner autrement les mathématiques en DEUG première année .Commission INTER IREM université.
- Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



ENSEIGNER DES MÉTHODES POUR DONNER AUX ÉTUDIANTS UNE EXPERTISE EN RESOLUTION DE PROBLEMES: UN EXEMPLE EN LICENCE

Janine ROGALSKI*, Marc ROGALSKI**

Résumé. Le texte entend redonner vie à la problématique d'enseignement de méthodes de résolution de problèmes aux étudiants, visant leur conceptualisation opérationnelle et leur expertise. Après avoir rappelé des acquis des travaux antérieurs, on présente le contenu textuel d'une méthode pour l'étude des suites réelles, enseignée en licence, comme exemple de l'affinement d'heuristiques "à la Polya" allant vers un guidage opérationnel de l'étude. La mise en oeuvre sur une suite non triviale en montre l'efficacité. On souligne le caractère général des modalités d'enseignement de cette méthode. On conclut par la proposition de relance d'un ensemble de questions de recherche.

Mots-clefs : méthodes, expertise, résolution de problèmes, opérationnalisation des savoirs

Abstract. The paper aims at revitalizing the issue of training students to use problem-solving methods, to support their operational conceptualization and expertise. After recalling results from previous researches, we present the textual content of a method for the study of real series, taught at the first year of University, as an example of how to refine "à la Polya" heuristics in order to organize an operational guidance of student's activity. Its implementation for a non trivial series shows its efficacy. The organization of teaching is then presented as a generic case. In conclusion, theoretical and practical questions are proposed about teaching methods at the University level.

Keywords: methods, expertise, problem solving, knowledge operationalization

I. INTRODUCTION : RETOUR SUR L'ENSEIGNEMENT DE METHODES ?

La problématique des méthodes de résolution de problèmes et de leur enseignement a connu un développement autour des années 80-90, puis une extinction. Lui ont succédé des questions plus générales sur la métacognition, dont la place des activités réflexives des élèves lors de la résolution de problème. Schoenfeld a également relevé cette évolution dans la recherche anglophone : " *le travail sur la résolution de problème en tant que telle est retombé significativement au début des années 90* " ; parmi les raisons, il souligne que le travail d'ingénierie (élaboration de méthodes et mise en oeuvre avec les élèves) n'était ni assez excitant ("*glamorous*") ni valorisé, bien que sa faisabilité ait été démontrée : "*les stratégies heuristiques générales pouvaient être décomposées en familles de stratégies plus spécifiques,*

* Directeur de recherche CNRS honoraire, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Denis Diderot Paris – France - rogalskij@univ-paris8.fr

** Professeur émérite Université Lille I, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie, Paris et Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Denis Diderot Paris – France - marc.rogalski@imj-prg.fr

et les étudiants, avec un enseignement approprié pouvaient apprendre à les utiliser" (Schoenfeld 2007, pp. 539-540, notre traduction). Nous proposons de rouvrir la discussion sur cette problématique spécifiée pour l'enseignement supérieur, à partir de la présentation complète d'une méthode effectivement utilisée en licence.

Reprenons d'abord une définition générale (explicitée à propos des méthodes de programmation en informatique : Rogalski, Samurçay & Hoc 1988, pp. 310-311). « *Une méthode peut être considérée comme un guide explicite et systématique pour la recherche et la gestion de stratégies de résolution de problèmes d'une certaine classe [...]* » : c'est ce que montrera l'exemple développé pour l'étude des suites numériques. « *(Elle) est élaborée par des spécialistes d'un domaine d'activité pour expliciter ce qui se dégage de commun dans des pratiques efficaces de résolution et pour rationaliser ces pratiques [...] (Sa) mise en œuvre suppose une adaptation au problème concerné [le traitement d'une suite particulière illustre une telle adaptation] et aux connaissances des sujets* » [c'est l'objet du premier point de la méthode présentée].

Concernant l'enseignement et l'apprentissage de méthodes de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques à l'université, on se propose d'illustrer les idées développées dans (Rogalski 1990a) par l'exemple paradigmatique de l'étude des suites numériques en licence, détaillée en (II.1). Nous montrerons sur une suite particulière la pertinence mathématique de cette méthode (II.2). Nous donnerons en III des éléments sur son enseignement. Nous conclurons par une discussion sur des problèmes ouverts.

Commençons par les apports des travaux antérieurs sur l'enseignement de méthodes en mathématiques, avec une liste de méthodes ayant déjà été enseignées, dans divers domaines mathématiques.

1. Des travaux antérieurs sur l'enseignement de méthodes en mathématiques

Nous résumons en six points les apports convergents de diverses contributions : (Polya 1965), (Robert, Rogalski & Samurçay 1987), (Robert & Rogalski 1988), (Robert & Tenaud 1989), (Rogalski 1989), (Rogalski, Samurçay & Hoc 1988), (Rogalski 1990a), (Schoenfeld 1978, 1980, 1985, 2007).

- On apprend les mathématiques en résolvant des problèmes, et c'est par la résolution de problèmes que se fait l'évaluation de l'apprentissage. Mais on constate souvent un écart important entre l'ambition de l'enseignement et le faible degré d'expertise attendu pour les contrôles, et par suite dans les problèmes étudiés en classe. D'où une faible expertise des étudiants dans la résolution de problèmes, et par suite une faible compréhension des concepts utiles dans cette résolution.
- Pour s'approprier le sens de concepts mathématiques, il faut les rendre *opérationnels pour la résolution de problèmes* (Douady 1986).
- Des problèmes trop simples ou trop élémentaires ne suffisent pas à balayer l'essentiel des facettes d'un concept et des points de vue qu'il peut présenter pour être opérationnel.
- La capacité à résoudre des problèmes suffisamment difficiles autour d'un concept demande un *apprentissage explicite*, qui appelle un *enseignement de méthodes*.
- Ni l'heuristique générale au sens de (Polya 1965), ou de (Schoenfeld 1980, 1985), ni le « *problem solving* » général au sens de (Larson 1983) ou de (Schoenfeld 1985) ne répondent à la question (M. Rogalski 1990a). Pour être efficaces, des méthodes doivent rendre opérationnelles des idées générales de l'épistémologie ou de l'heuristique en les spécifiant pour un domaine mathématique précis ou un concept (c'est le cas de l'exemple de méthode que nous présentons au § II). Du coup elles ne peuvent en général s'appliquer à un domaine différent.

• Une *méthode* sur un champ donné des mathématiques *n'est pas un algorithme* : elle ne prétend pas apporter une réponse automatique, mais *elle génère des questions qui organisent les activités* : classement des problèmes, classement des outils et démarches possibles dans le domaine (stratégies, tactiques, techniques), organisation temporelle de la résolution, et enfin procédures de contrôle. Il s'agit donc de mettre en œuvre *une approche explicitement métamathématique qui porte sur des concepts précis* (Robert et Robinet 1996 ; Dorier 1997).

2. Des exemples de méthodes enseignées, de la terminale à la licence

Notre but ici est d'analyser un exemple qui montre comment expliciter une méthode de résolution de problème dans un domaine précis (les suites à l'université), et en quoi le degré d'expertise lié à l'opérationnalisation des concepts est ainsi élargi. Il s'agit aussi de montrer, par l'exemple d'un dispositif d'apprentissage en Licence, comment on peut organiser un enseignement de méthode. Nous le situons au préalable dans la diversité des domaines dans lesquels des méthodes ont effectivement été utilisées dans l'enseignement (de la terminale scientifique à la licence) avec les visées suivantes :

- (1) faire résoudre des problèmes de géométrie en terminale scientifique (Robert et Tenaud 1989).
- (2) enseigner la géométrie des espaces affines et la théorie des groupes (licence formation continue) (Robert 1992).
- (3) enseigner l'algèbre linéaire (Rogalski 1992,1994), (Dorier 1997).
- (4) rechercher des lieux géométriques en géométrie cartésienne (Rogalski 1995b).
- (5) chercher des primitives (Guyou 1946 ; Schoenfeld 1978 ; Rogalski 1987).
- (6) pour étudier qualitativement une équation différentielle (M. Rogalski 1989).
- (7) étudier la convergence d'une suite réelle (Rogalski 1988 ; 1990b).
- (8) établir des inégalités en analyse (Rogalski 1999).
- (9) résoudre des problèmes d'arithmétique élémentaire (Rogalski 1995a).

La méthode (4), enseignée par Charles Guyou dans les années 50-60 en classe préparatoire aux grandes écoles, a été exploitée pour l'enseignement des prolégomènes d'algèbre linéaire à Lille dans les années 80. La méthode (5) a été à la base d'un projet d'un Enseignement Intelligemment Assisté par Ordinateur expérimenté à Lille (Delozanne 1994) et d'une réflexion sur les limites de ce type de logiciel en analyse (Rogalski 1994). La méthode (8) a été utilisée plusieurs années (2000-2006) en formation d'enseignants.

La méthode (7) a été choisie pour illustrer notre démarche.

II. UN EXEMPLE DE METHODE SUR LA CONVERGENCE DES SUITES, ENSEIGNEE PLUSIEURS ANNEES EN L1

Il s'agit d'un exemple emblématique de méthode utilisant de façon opérationnelle les concepts du domaine des suites numériques. Elle a été enseignée plusieurs années (1988-1996), à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Nous commençons par donner des extraits substantiels du document qui décrit la méthode, distribué aux étudiants *en fin d'enseignement* - le texte *in extenso* figure dans (Rogalski 1988, 1990b). Nous détaillons ensuite un exemple de son utilisation sur une suite particulière, assez difficile, pour montrer sa pertinence mathématique.

Enfin, nous parlerons (III) des modalités de son enseignement (L1, DEUG A première année à l'époque), de son utilisation par les étudiants et de son impact.

1. La description de la méthode

Le *plan* de la méthode, en cinq sections, introduit le document.

PLAN
<p>0. Connaissances disponibles nécessaires.</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) Les théorèmes généraux sur les suites. (2) Les suites et les fonctions à connaître en toutes occasions. (3) Trois techniques indispensables. <p>I. Stratégie de classement.</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) Classer le problème en problème général ou problème particulier.. (2) Classer une suite particulière. (3) Autres moyens de classement. <p>II. Stratégie de recherche.</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) Faire des tests préliminaires. (2) Etudier des cas particuliers. (3) Changer de point de vue. (4) Faire « $n = \infty$ ». (5) Localiser la difficulté principale. <p>III. Ingrédients d'une stratégie de preuve.</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) Si on a deviné la limite. (2) Pour montrer une divergence. (3) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite. (4) Identifier la limite. (5) Tactique « $\square - N$ avec encadrement ». (6) Partager une somme $\sum_{0 \leq p \leq n} v_{n,p}$ en deux termes. (7) Traiter une suite de type classique par les techniques standard. (8) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration. <p>IV. Contrôler, redémarrer.</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ? (2) Contrôler par l'extérieur. (3) Redémarrage. <p>V. Pour s'entraîner à la méthode.</p>

Certains des titres font ici penser à l'heuristique générale, telle qu'elle est présentée dans (Polya 1965) ou (Schoenfeld 1980) : c'est souvent le cas dans les *plans* de méthodes. Mais nous allons montrer, sur les sections 0 à III, comment interviennent les concepts de convergence des suites – nous en donnons les extraits les plus significatifs, les points non développés sont remplacés par le symbole [...].

0. Exemples des connaissances disponibles nécessaires

(1) Les théorèmes généraux sur les suites

Formulation en « ϵ - N », suites monotones, adjacentes. Théorème d'« encadrement à ϵ près » : si on a $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si on sait que $v_n \rightarrow v$, $w_n \rightarrow w$, alors si l'entier n est assez grand on a l'encadrement $v - \epsilon \leq u_n \leq w + \epsilon$. Théorème de Cauchy.

(2) *Exemples de suites à bien connaître*

Suites et séries géométriques et arithmétiques ; séries de Riemann ; comportements comparés de n^α , a^n , $n!$; suites récurrentes linéaires à un terme (calcul du terme général) ; suites $(1+x/n)^n$ et $\sum_{0 \leq p \leq n} x^p/p!$.

(3) *Exemples de techniques indispensables*

Savoir majorer et minorer (signe et/ou monotonie de la dérivée). Reasonner par récurrence (en particulier «récurrence paramétrée» : chercher C pour que $H_n(C) \Rightarrow H_{n+1}(C)$). Utiliser les développements limités.

I. Stratégie de classement

(1) *Classer le problème en problème général ou problème particulier.*

(2) *Classer une suite particulière parmi :*

- les suites définies par une formule $f(n)$;
- les suites définies implicitement par une équation, par exemple : u_n est la plus grande racine de $x^3 - 3x - n = 0$;
- les sommes de séries ;
- les récurrences fixes à un terme : $u_{n+1} = f(u_n)$;
- les récurrences variables à un terme : $u_{n+1} = f_n(u_n)$;
- les récurrences linéaires (à un ou deux termes) ;
- les suites s'écrivant $\sum_{0 \leq p \leq n} v_{n,p}$.

(3) *Autres moyens de classement*

- Simplifier l'écriture *en donnant un nom* à un groupement, par exemple si on étudie $u_{n+1} = ([n + \sin n]/(n + \ln n) + u_n)^{1/2}$, poser $a_n = (n + \sin n)/(n + \ln n)$ et étudier le problème général $u_{n+1} = (a_n + u_n)^{1/2}$, quand $a_n \rightarrow m$. On a ainsi *changé de point de vue* en passant d'un problème particulier à un problème général.
- Modifier u_n pour la comparer à des suites plus simples. Par exemple, si on étudie la suite écrite avec n racines carrées $u_n = (1/n + (1/n + \dots (1/n)^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2}$, alors $v_n \leq u_n \leq w_n$ où $v_n = (1/n)^{(1/2)^n}$ et $w_n = (1/n + w_{n-1})^{1/2}$.

II. Stratégie de recherche : faire des hypothèses, se donner des idées, conjecturer

Les questions à se poser concernent : convergence, divergence, identification de limite, monotonie, majoration ou minoration, comportement séparé de u_{2n} et u_{2n+1} , comparaison à des suites connues, etc.

[...]

(1) *Faire des tests préliminaires*

[...]

(b) Peut-on encadrer la suite par des suites connues ? ou l'encadrer à \square près par des suites connues, pour n assez grand ?

(c) Que suggère un dessin ? Attention : un dessin peut suggérer plusieurs pistes différentes ; si on décide d'en suivre une, ne pas oublier les autres si celle-ci ne marche pas.

[...]

(e) La suite est-elle *évidemment* monotone (ce qui donne une piste de recherche) ?

Exemple : $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)^{1/2}$.

(f) Calculer littéralement $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ pour deviner une formule éventuelle.

Exemples : $u_{n+1} = 2(u_n)^{1/2}$ ou $u_n = 1/2! + 2/3! + \dots + (n-1)/n!$.

[...]

(2) Dans un problème général, étudier des cas particuliers

Exemple : si $u_n \leq m$, que fait $v_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$? Étudier le cas $u_n \leq m$.

Ou : si $u_{n+1} = (a_n + u_n)^{1/2}$, avec $a_n \leq m$, que fait u_n ? Étudier le cas $a_n \leq m$.

(3) Changer de point de vue sur la suite

(a) Changer la formule ou l'expression. Exemples :

- $u_0 = 1, u_{n+1} = (1 + u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2)/(n+1)$ peut se définir par $u_0 = 1, u_1 = 2$, et pour $n \geq 3$ par l'expression $u_{n+1} = u_n(u_n + n)/(n+1)$.

- $u_{n+1} = (1/n + u_n^2)^{1/2}$ peut se définir par $u_n^2 = 1/(n-1) + 1/(n-2) + \dots + 1 + u_1^2$.

[...]

(b) Passer du cadre numérique au cadre graphique et inversement

- Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, tracer le graphe de f et la bissectrice $y=x$, « l'escalier » ou le « colimaçon ».

- Pour une suite $u_{n+1} = f_n(u_n)$, tracer les courbes $y = f_n(x)$, l'escalier ou le colimaçon. Interpréter le comportement de u_n sur le dessin en termes de propriétés des f_n vues sur le graphique, et qu'il faudra prouver. Par exemple, comparer u_n et le point fixe x_n de f_n .

- Si $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, tracer le graphe de f , en déduire des encadrements, par exemple au moyen d'une intégrale de f .

(c) Passer d'un problème général à un problème particulier, et inversement.

(d) Passer de l'étude de u_n à celle de $u_{n+1} - u_n$, et inversement. Par exemple, dans le cas de la suite $u_{n+1} = u_n(u_n + n)/(n+1)$, avec $u_1 = 2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n(u_n - 1)/(n+1) \geq 2/(n+1)$ dès que $n \geq 1$, donc $u_n \geq 2/n + 2/(n-1) + \dots + 2/2 + 2$.

(e) Passer de l'étude de u_n à celle de u_{n+1}/u_n et inversement (utile si $|u_{n+1}/u_n - k| < 1$).

(4) Faire « $n \rightarrow \infty$ »

Dans l'expression de u_n , on remplace certains termes $\square(n)$ par leur limite quand $n \rightarrow \infty$ (si on la connaît sans ambiguïté : attention aux $(a_n)^n$, par exemple) pour deviner le comportement de u_n . Il faut alors rendre précis le raisonnement, et dire « si n est grand, $\phi(n)$ vaut presque m », qu'on précise en : si $n \geq N_\varepsilon$, $m - \varepsilon \leq \phi(n) \leq m + \varepsilon$; on peut alors faire des encadrements (dépendant de ε) de u_n pour $n \geq N_\varepsilon$.

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve

Ecrire d'abord un plan de démonstration, avec l'emboîtement tactiques-techniques suggéré par la stratégie de recherche. Un tel plan va comporter en général des tactiques typiques, successives ou imbriquées, et comportant plusieurs techniques, dans la mesure où il va apparaître dans la résolution des *sous-but*s (suites auxiliaires, majorations préalables, etc).

(1) Si on a deviné la limite m , montrer par des majorations que $u_n - m$ tend vers 0.

Il s'agit en général de majorer $|u_n - m|$ par une suite classique tendant vers 0, le plus souvent du type C/n^α avec $\alpha > 0$. Cela peut assez souvent se montrer par une *réurrence paramétrée* : on note la propriété $|u_n - m| \leq C/n^\alpha$ par $H_n(C, \alpha)$, et on cherche C et α pour que l'implication de récurrence $H_n(C, \alpha) \Rightarrow H_{n+1}(C, \alpha)$ soit vraie à partir d'un certain rang N_0 ; il faut ensuite trouver un rang $n_0 \geq N_0$ tel que $H_{n_0}(C, \alpha)$ soit vraie. Il est souvent utile de poser $v_n = u_n - m$.

Exemple : si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + [(n+2)/2(n+1)]u_n$, on devine facilement que la limite éventuelle est 2 ; en posant $v_n = u_n - 2$, on cherche à majorer $|v_n|$ par C/n [voir la section II.2].

(2) Pour montrer une divergence.

(a) Montrer que la suite est non majorée ou non minorée. Plusieurs possibilités :

- minorer u_n par une suite non majorée ; exemple : $u_{n+1} = nu_n^3$ avec $u_1 \geq 1$, on montre par récurrence que $u_n \geq 1$, puis $u_n \geq n-1$;
- par l'absurde : si $u_n = n^{1/u_{n-1}}$, on suppose $u_n \leq M$ avec $M \geq 1$, et on voit qu'on aurait $n \leq M^M$!

(b) Exclure la seule limite possible, ou montrer qu'une limite ne peut pas exister. Exemples :

- $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$; la suite croît et si $u_n \leq m$, $m = m + 1/m$, absurde ;
- $u_0 = -1/4$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$; u_n décroît, si $u_n \leq m$, $m \leq -1/4$, mais on a $m = 0$ ou $m = 1$!
- $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$; si $f(x) = 3x - 2$, la seule limite possible $m = 1$ vérifie $f'(m) = 3$, donc est répulsive ; or $u_n = 1$ à partir de n_0 implique $u_0 = 1$!

(c) Trouver une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui ne peuvent avoir la même limite. Exemples :

- $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 3/(1 + 2u_n^2)$: $u_{2n} \leq 1/2$ et $u_{2n+1} \geq 2$;
- $u_n = n/[n + 2 + (-1)^n(n + \sin n)]$: $u_{2n} \leq 1/2$ et $u_{2n+1} \rightarrow +\infty$.

(d) Nier le critère de Cauchy. En général il faut minorer $|u_{n+p} - u_n|$ par un nombre strictement positif fixe, pour p convenable éventuellement dépendant de n . Par exemple, pour $u_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$, $u_{n+p} - u_n \geq p/(n+p) \geq 3/4$ pour $p \geq 3n$.

(3) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite

(a) Prouver la monotonie de u_n (calcul et/ou récurrence). Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser la monotonie de f ou le signe de $f(x) - x$ sur un intervalle invariant.

(b) Majorer ou minorer u_n (calcul et/ou récurrence). Dans le cas des suites récurrentes, pour trouver un majorant C on se laisse guider par le dessin, ou on choisit C pour que

la preuve de $(u_n \leq C) \Rightarrow (u_{n+1} \leq C)$ marche, au moins pour n assez grand (récurrence paramétrée).

(c) Etudier séparément u_{2n} et u_{2n+1} ; c'est une méthode bien adaptée aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante. Exemple : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$: u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes.

(d) Utiliser le critère de Cauchy. C'est souvent en désespoir de cause. Deux exemples importants quand même :

- somme de série $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, avec v_n très petit pour n grand ;
- $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $|f'| \leq K < 1$: $|u_{n+p} - u_n| \leq [K^n / (1-K)] |u_1 - u_0|$.

(e) Montrer que u_{n+1}/u_n a une limite l : si $|l| < 1$, $u_n \rightarrow 0$.

(f) Utiliser la *série* de terme général $u_{n+1} - u_n$, en montrant par des encadrements qu'elle converge ; exemple : $u_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \ln n$.

(g) Encadrer u_n entre deux suites convergentes. En particulier, dans le cas $u_{n+1} = f_n(u_n)$, comparer u_n aux points fixes x_n des f_n .

(4) Identifier la limite

(a) Si $u_n = f(n)$, f connue ayant une limite en $+\infty$, alors $\lim u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

[...]

(c) Si $u_{n+1} = f(u_n)$, f continue sur $[a, b]$, et si u_n converge vers $m \in [a, b]$, on a $f(m) = m$; si on peut éliminer tous les points fixes (par exemple les points répulsifs) sauf un, on peut conclure.

(d) Plus généralement, si on peut éliminer tous les candidats à être la limite, sauf un. Exemple : si u_n est la racine positive de $x^n + x^{n-1} + x^2 - x - 1 = 0$, alors $0 < u_n < 1$, u_n est croissante ; si $t < 1$ on peut montrer que t ne peut être limite, donc la limite est 1.

(5) Tactique « $\epsilon - N$ avec encadrement »

Cette tactique est souvent utile pour les suites $u_{n+1} = f_n(u_n)$ et pour les suites à la marge de la classification. Il s'agit d'encadrer u_n , pour $n \geq N(\epsilon)$, par deux suites dépendant de ϵ et plus faciles à étudier, en s'appuyant sur ce qu'on a deviné dans la tactique de recherche d'hypothèses «faire $n = +\infty$ ». Exemples :

- si $u_n \leq m$, que fait $v_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)/n$? Si $n \geq N(\epsilon)$ $m - \epsilon \leq u_n \leq m + \epsilon$, donc $s_n \leq v_n \leq t_n$, où $s_n = [u_1 + u_2 + \dots + u_{N(\epsilon)} + (n - N(\epsilon))(m - \epsilon)]/n$, et t_n est analogue ; les limites de s_n et t_n sont faciles, donc, si n est grand, on a $m - 2\epsilon \leq s_n \leq v_n \leq t_n \leq m + 2\epsilon \dots$

- si $u_1 = 1$, $u_{n+1} = (1/n + u_n)^{1/2}$, pour $n \geq N$ on a $0 < 1/n < \epsilon$; on pose $v_N = w_N = u_N$, et pour $n > N$ $v_{n+1} = (\epsilon + v_n)^{1/2}$ et $w_{n+1} = w_n^{1/2}$; alors $w_n \leq u_n \leq v_n$. Mais $\lim w_n = 1$ et $\lim v_n = [1 + (1 + 4\epsilon)^{1/2}]/2$, donc on a $1 - \epsilon \leq u_n \leq [1 + (1 + 4\epsilon)^{1/2}]/2 + \epsilon \leq 1 + 2\epsilon$.

(6) Partager une somme $\sum_{0 \leq p \leq n} v_{n,p}$ en deux termes

On sommerait de 0 à q d'une part et de q+1 à n de l'autre. Dans certains cas q sera fixé assez grand pour que l'un des morceaux soit inférieur à $\epsilon/2$, puis n tendra vers l'infini dans le deuxième morceau (voir le premier exemple de (5), et la suite $(1+x/n)^n - \sum_{0 \leq p \leq n} x^p/p!$). Dans d'autres cas il faudra prendre q variable avec n par exemple $q=\lfloor n/2 \rfloor$ ou $q=\lfloor n-n^{1/2} \rfloor$ ou...

2. Utilisation de la méthode pour étudier la suite : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + [(n+2)/2(n+1)]u_n$

Après cette présentation de la méthode, nous allons illustrer sa mise en œuvre pas à pas sur une suite non triviale, en notant les tâches de la méthode utiles à accomplir.

I. La stratégie de classement

(2) On peut classer la suite dans deux catégories :

- * suite *linéaire à un terme*, à coefficients variables; on peut donc espérer trouver une forme explicite pour le terme général de la suite, mais qui risque d'être compliquée ; une variante plus simple sera vue plus loin avec la tactique notée **F**.
- * suite *du type* $u_{n+1} = f_n(u_n)$, avec $f_n(x) = 1 + [(n+2)/2(n+1)]x$; on peut donc penser que la tactique " ϵ -N avec encadrement" pourra être essayée : tactique nommée ici **A**.

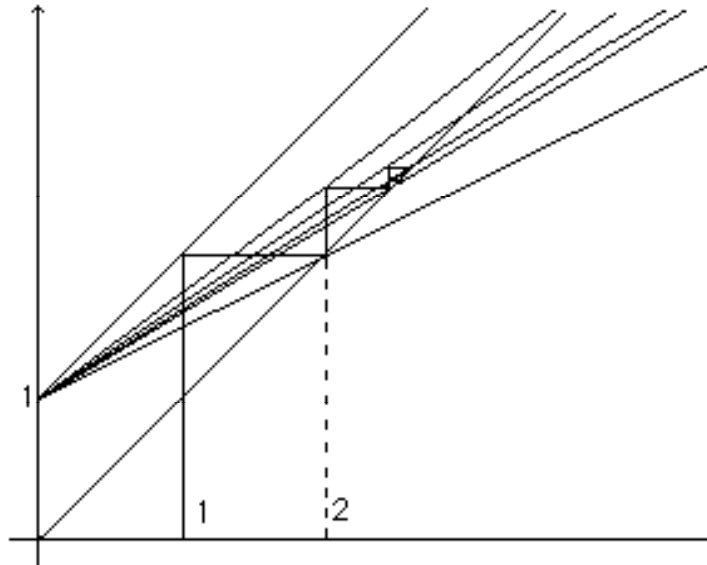
II. La stratégie de recherche

(1) Faire des tests préliminaires

(b) En tant que suite de la forme $u_{n+1} = f_n(u_n)$, on regarde s'il y a un *encadrement* de la partie de l'expression qui dépend de n ; on constate que $(n+2)/2(n+1) \leq 1/2$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc qu'on a l'encadrement $1/2 - \epsilon \leq [(n+2)/2(n+1)] \leq 1/2 + \epsilon$ pour n assez grand, ce qui peut fournir, compte tenu de la croissance des fonctions f_n , la tactique **A** de preuve en « ϵ -N avec encadrement».

(c) *Que suggère un dessin ?*

Dans la figure 1, on voit que la monotonie n'est pas claire au delà de n=3. Il n'est même pas clair que la suite converge vers 2, point fixe de la fonction $f(x) = 1 + (1/2)x$, limite des $f_n(x)$, et le dessin ne dit rien de sa monotonie ultérieure. Par contre, il semble raisonnable d'essayer la tactique **B** : encadrer u_n par deux suites convergentes, en particulier en la comparant aux points fixes x_n des fonctions f_n .

Figure 1. Les graphes des f_n et l'itération

1. (d) Calcul de quelques valeurs

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	2	2,5	2,6666.	2,6666.	2,6	2,516..	2,4380	2,3714	2,3174	2,2746
=											

On peut faire l'hypothèse que la suite est décroissante à partir de $n=4$, est minorée par 1 et converge vers 2. D'où deux tactiques de preuve possibles : la tactique \boxed{C} : suite décroissante minorée, on identifie la limite ensuite ; et la tactique \boxed{D} : majorer $|u_n - 2|$ par une suite du type C/n .

(f) Calculer littéralement

On trouve successivement pour les valeurs de u_n : 1 , $2=1+1$, $1+3/2=1+1/2+1$, $2+2/3=1+1/3+1/3+1$...

On peut soupçonner que les inverses des coefficients binomiaux ont à voir avec le problème ... On trouve effectivement l'égalité $u_4=1+1/4+1/6+1/4+1$, puis $u_5=1+1/5+1/10+1/10+1/5+1$... D'où une tactique \boxed{E} : comparer u_n à la suite $v_n=1+1/C_n^1+1/C_n^2+\dots+1/C_n^{n-1}+1$, en espérant que ce soient les mêmes. On aura ainsi fait un grand *changement de point de vue* sur la suite de départ !

(3) Changer de point de vue

(a) Changer la formule

(*) On remarque qu'il y a $1/(n+1)$ en coefficient devant u_n , et que si on divise par $n+2$ on trouve $1/(n+2)$ en coefficient devant u_{n+1} . D'où l'idée de poser $v_n=[1/(n+1)]u_n$, et on obtient la nouvelle suite récurrente linéaire $v_{n+1}=1/(n+2)+(1/2)v_n$, $v_0=1$. Le coefficient constant $1/2$ et la linéarité nous incitent à essayer une tactique \boxed{F} : calculer le terme général de la suite v_n , en déduire une formule pour u_n et chercher directement

sa limite sur l'expression obtenue ; on peut prévoir que v_n s'écrira $\sum_{0 \leq p \leq n} t_{p,n}$, qu'il faudra couper en deux.

(*) Autre manière de changer la formule : faire disparaître le 1 en posant $v_n = u_n - 1$. On obtient : $v_0 = 1$, $v_{n+1} = [(n+2)/2(n+1)](v_n + 1)$. En posant $c_{n+1} = (n+2)/2(n+1)$, et $c_0 = v_0$ par convention, on trouve *en calculant formellement* les termes successifs à partir de la relation $v_{n+1} = c_{n+1}(v_n + 1)$: $v_0 = c_0$, $v_1 = c_1 c_0 + c_1$, $v_2 = c_2 c_1 c_0 + c_2 c_1 + c_2$, $v_3 = c_3 c_2 c_1 c_0 + c_3 c_2 c_1 + c_3 c_2 + c_3$, etc. Comme c_n converge vers $1/2$ quand n tend vers l'infini, on peut penser à une tactique \boxed{G} : étant donnée une suite $(c_n)_{n \geq 0}$ de nombres de $[-1, 1]$ tendant vers un nombre a de $] -1, 1[$, déterminer la limite de la suite définie par $v_n = c_n + c_n c_{n-1} + c_n c_{n-1} c_{n-2} + \dots + c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 + c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$. Grand changement de point de vue !

(b) *Passage au graphique*

Nous avons déjà fait ce changement de point de vue, suggéré par la tactique \boxed{B} .

(c) *Passer du problème particulier à un problème général*

Ici, chaque f_n a un point fixe x_n unique, et chaque f_n est, pour $n \geq 1$, $3/4$ -lipschitzienne. Peut-être y a-t-il un énoncé général de convergence sous ce type de conditions ? D'où une tactique \boxed{H} : chercher un énoncé général de convergence pour des suites du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$, chaque f_n étant k -lipschitzienne, $k < 1$, et ayant un point fixe unique x_n .

(4) Faire « $n = \infty$ »

Ici, le facteur $(n+2)/2(n+1) \square 1/2$ quand $n \square +\infty$, donc on peut penser à la tactique déjà repérée « $\square - N$ avec encadrement » : tactique \boxed{A} .

III. Les stratégies de preuve

Elles correspondent à chacune des tactiques repérées. Nous laissons au lecteur le soin de mettre en œuvre lui-même les 8 solutions possibles appelées par chacune des 8 tactiques : il constatera que chacune marche, avec des techniques plus ou moins faciles, certaines pouvant être trop difficiles pour les étudiants (certaines décompositions d'une somme en deux morceaux).

Commentaire : cet exemple non trivial montre surtout l'efficacité de la méthode pour étudier des suites pas trop standard du niveau licence : elle donne assez facilement accès à plusieurs pistes de solutions, même s'il subsiste des difficultés dans certaines d'entre elles. Par ailleurs, cet exemple est particulièrement adapté pour faire travailler des étudiants en petit groupes (Robert 2008 ; Robert et Tenaud 1989). Les tactiques \boxed{A} , \boxed{C} , \boxed{D} , \boxed{E} devraient apparaître spontanément dans plusieurs groupes d'étudiants, du moins si certains exemples plus ou moins analogues ont été traités en exercices.

III. ENSEIGNER CONCRÈTEMENT UNE METHODE

Nous nous appuyons sur l'exemple des suites, en présentant la trame de son enseignement tel qu'il a eu lieu plusieurs années.

Après l'introduction de la convergence des suites, par exemple par l'ingénierie de (Robert 1983), l'enseignant apporte un vocabulaire heuristique en commentant ce qu'il fait lors des preuves des énoncés généraux sur les suites (« on va faire de la méthode, on va classer,

chercher à faire des hypothèses, chercher des pistes de démonstration... »...), bref un discours « *méta* », qui commence à « *donner des mots* » pour *dire* l'activité mathématique.

L'enseignant traite ensuite, en cours, une dizaine de suites avec des comportements divers, en utilisant explicitement la méthode, avec son vocabulaire déjà précis (techniques, tactiques, stratégies, changements de point de vue,...). Il nomme, explique et illustre certaines tactiques délicates et certaines manières d'explorer un problème de comportement de suite.

Un renforcement en travaux dirigés a alors lieu, traitant un à deux exemples de chaque type de comportement et de tactique ou stratégie. L'enseignant insiste pour *faire produire des commentaires méta par les étudiants*, sur les classements, les choix de stratégies et de tactiques.

C'est après ce processus qu'on expose *explicitement* - en cours magistral - *le contenu de la méthode*, en s'appuyant sur les exemples traités, et de nouveaux, pour montrer comment l'utiliser. Des commentaires *méta* plus généraux – épistémologiques et didactiques – sont apportés : pourquoi des méthodes, qu'est-ce que « résoudre un problème de mathématiques », quels grands principes de recherche (classer, simplifier, ramener à des situations connues, contrôler). C'est alors seulement qu'on distribue aux étudiants le texte écrit de la méthode. Une difficulté principale sera d'empêcher ensuite les étudiants de croire à une utilisation algorithmique de la méthode.

En TD, les étudiants travaillent alors par petits groupes (3 ou 4), sur une ou au maximum deux suites déjà assez élaborées, avec le contrat de mettre en évidence la ou les tactiques utilisées et comment ils les ont trouvées méthodiquement. L'organisation en petits groupes vise à ce que se développent échanges et discussions. On a ainsi utilisé la suite $u_1=1/2$, $u_{n+1}=[2n/(n+1)](u_n)^{1/2}$, en demandant aux groupes, dans un compte-rendu écrit, de noter les tactiques essayées, abandonnées, les raisons de ces choix, ce qui a mené au but... (On peut aussi plus tard utiliser l'exemple du II).

Quelle évaluation ? C'est une question difficile, comme pour tous les « projets longs » (Robert 1992). En particulier il est impossible de les évaluer comme on peut le faire de situations didactiques bien délimitées. Dans le cas présenté ici, d'un enseignement annuel où on a utilisé de nombreuses autres méthodes que celle sur les suites, en tenant régulièrement un important discours « *méta* » (en cours comme en travaux dirigés ou en atelier), il est très difficile d'avoir une évaluation spécialement ciblée sur cette méthode. Nous avons cependant deux indicateurs spécifiques au domaine des suites.

D'abord, nous avons donné dans un examen partiel l'énoncé suivant : « u_0 étant donné, on définit la suite u_n par : $u_{n+1}=u_n^2 + \ln u_n$ si $u_n > 0$, $u_{n+1} = -1989$ si $u_n \leq 0$. Quelles conjectures faites-vous sur cette suite ? ». Cet énoncé a eu un bon taux de succès.

Puis nous avons fait travailler en petits groupes les étudiants sur la suite présentée plus haut : $u_1=1/2$, $u_{n+1}=[2n/(n+1)](u_n)^{1/2}$. Chaque groupe a réussi à identifier au moins une tactique de solution, et plusieurs différentes sont apparues dans les ateliers.

Nous avons également un indice global : le taux de succès au diplôme du DEUG (en 2 ou 3 ans) a été de 59 % pour nos étudiants - mis en DEUG seconde année dans un enseignement « *standard* » -contre 48 % pour les autres étudiants, issus d'une section « *ordinaire* » de première année.

Certes, cet indice est d'interprétation délicate, car il dépend d'autres facteurs que le pur enseignement de méthodes en mathématiques : utilisation du discours « *méta* » toute la première année, rôle des autres disciplines, diversité des enseignants...

IV. CONCLUSION : QUESTIONS DE RECHERCHES

À l'issue de la présentation d'un exemple emblématique d'une méthode de résolution de problème effectivement utilisée, on peut revenir sur quelques questions, théoriques et pragmatiques. Tout d'abord, est-il utile et même nécessaire d'élaborer et d'enseigner l'utilisation de tels outils aux étudiants ? Le traitement de "suffisamment" d'exemples pourrait-il leur permettre d'élaborer une organisation de leur activité de résolution de problème (pas seulement aux très bons étudiants) ? Les exemples que les étudiants peuvent aborder par eux-mêmes seront-ils "assez riches" pour mettre en fonctionnement les concepts du domaine, les rendre opérationnels ? L'apport d'une méthode est son caractère organisé, systématique et la référence qu'offre sa forme rédigée. Ensuite, comment élaborer pratiquement une méthode ? ou comment s'appropriier - en l'adaptant "à sa main" - une méthode existante ? L'enseignant peut-il se fonder sur sa propre activité de résolution, en visant à expliciter ce qu'il met en oeuvre dans des problèmes non triviaux (mais accessibles aux étudiants) ? Quel peut en être le coût et quelle valorisation ? Les conditions institutionnelles souhaitables ou nécessaires sont-elles rédhibitoires ? Reprendre la recherche sur l'enseignement de méthodes et sur les moyens d'évaluation de leur impact sur les étudiants – sur la résolution de problèmes et sur la conceptualisation - nous paraît donc nécessaire, malgré les difficultés d'évaluation d'ingénieries longues.

Enfin, il reste le problème difficile de l'apprentissage de méthodes par les enseignants et des manières dont ils peuvent les intégrer dans l'enseignement.

REFERENCES

- Artigue M. (1989) Une recherche d'ingénierie sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Grenoble : IMAG.
- Delozanne E. (1994) Un projet pluridisciplinaire : ELISE un logiciel pour donner des leçons de méthode, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (1/2), 211–250.
- Dorier J.-L. (ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question (panorama de la recherche didactique sur ce thème)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5–31.
- Guyou C. (1946) *Algèbre et analyse*. Vuibert : Paris.
- Larson L. C. (1983) *Problem-Solving Through Problems*. Springer Verlag.
- Polya G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème*. Paris : Dunod.
- Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en Deug. *Bulletin de l'APMEP* 340, 431–449.
- Robert A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(2/3), 181–220.
- Robert A. (2008) Laisser chercher les élèves : les faire travailler en petits groupes ? *L'ouvert* 117, 31–46.
- Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1), 31–70.
- Robert A., Rogalski J. (1988) Teaching and learning methods for problem-solving : some theoretical and psychological issues. *Proceedings of the 12 International Meeting for PME* (pp. 528–535). Veszprem, Hungary.
- Robert A., Rogalski J., Samurcay R. (1987) *Enseigner des méthodes*. Cahiers de Didactique des Mathématiques 38, Paris : IREM.

- Robert A., Tenaud I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(1), 31–70.
- Rogalski J., Samurçay R., Hoc J.-M. (1988) L'apprentissage de méthodes de programmation comme méthodes de résolution de problèmes. *Le Travail Humain* 51(4), 309–320.
- Rogalski M. (1987) *Comment chercher une primitive ?* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL, 22 pages.
- Rogalski M. (1988) *Comment étudier la convergence d'une suite réelle? Un exemple de méthode.* Publication de l'UFR de mathématique de l'USTL, 8 pages.
- Rogalski M. (1989) *L'étude qualitative des équations différentielles.* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL, 43 pages.
- Rogalski M. (1990a) Enseigner des méthodes en mathématiques. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 65-79). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.
- Rogalski M. (1990b) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.
- Rogalski M. (1992) *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année.* Cahiers DIDIREM 11. Paris : IREM Université Paris-Diderot.
- Rogalski M. (1994) Les concepts de l'EIAO dépendent-ils du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 14(1/2), 43–66.
- Rogalski M. (1995a) *De quelques méthodes en arithmétique élémentaire.* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL.
- Rogalski M. (1995b) *Des méthodes pour la recherche de lieux géométriques en géométrie cartésienne,* 9 pages.Draft.
- Rogalski M. (1999) *Quelques méthodes pour établir des inégalités.* Notes manuscrites pour les étudiants de CAPES. Université de Lille 1.
- Schoenfeld A. (1978) Presenting a strategy for indefinite integration. *American Math. Monthly*, 673–678.
- Schoenfeld A. (1980) Teaching problem-solving skills. *American Math. Monthly*, 794–805.
- Schoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.
- Schoenfeld A. (2007) Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM: the international journal on mathematics education* 39(5), 537-551.



UNE COMMUNAUTÉ DE PRATIQUE CÉGEP-UNIVERSITÉ : NOTION DE SITUATION SIGNIFIANTE

Hassane SQUALLI* – Alain BOMBARDIER** – Adolphe ADIHOU*** –
Audrey. B.-RAYMOND****

Résumé - Ce travail s'inscrit dans un projet de collaboration cégep-université visant à assurer un meilleur arrimage des dispositifs de formation mathématique au cégep et à l'université. Ce projet vise la construction d'une communauté de pratique formée de didacticiens des mathématiques et d'enseignants de mathématiques au cégep et à l'université autour de la notion de situations d'apprentissage significantes. Des recherches-actions portant sur la mise à l'épreuve de telles situations ont été réalisées. Dans ce texte, nous présentons quelques résultats des travaux ayant mené à l'émergence de cette communauté de pratique.

Mots-clefs : situation signifiante, mathématiques, postsecondaire, communauté de pratique, transition secondaire-université

Abstract - This work is part of a collaborative project between college and university to ensure better harmonization in mathematics' teaching. The aim of this project is the construction of a community of practice composed of mathematics educators, and college and university mathematics teachers studying meaningful learning situations. To test such situations, different actions-researches were conducted. In this paper, we present a few results of the work that led to the emergence of this community of practice.

Keywords: meaningful learning situation, mathematics, post-secondary, community of practice, secondary-university transition

I. INTRODUCTION

Dans le système éducatif québécois, le cégep (collège d'enseignement général et professionnel) est une institution de formation postsecondaire et préuniversitaire (12^e et 13^e année d'étude pour la filière de l'enseignement général et 12^e, 13^e et 14^e année d'étude pour la filière de l'enseignement professionnel). Ce texte présente quelques résultats d'un projet de recherche-développement visant à assurer un meilleur arrimage des dispositifs de formation mathématique au cégep et à l'université.

* Université de Sherbrooke, Québec – Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

** Cégep de Sherbrooke, Québec –Canada – Alain.Bombardier@cegepsherbrooke.qc.ca

*** Université de Sherbrooke, Québec – Canada – Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca

**** Université de Sherbrooke, Québec – Canada – Audrey.B.Raymond@USherbrooke.ca

II. ÉLÉMENTS DE PROBLÉMATIQUE

Le cégep marque une étape importante dans le parcours scolaire des élèves qui désirent poursuivre leurs études à l'université. Durant leur court passage au cégep, ces étudiants vivent une double transition : celle du secondaire au cégep et celle du cégep à l'université. Ces transitions s'accompagnent d'un changement d'institutions d'enseignement des mathématiques, chacune ayant sa propre culture qui véhicule des normes, des valeurs, des pratiques sociales de références spécifiques, des manières de voir, de dire et de faire l'enseignement des mathématiques. Chacune de ces institutions tente de formater l'étudiant à ses propres formes culturelles (Squalli, 2014). Cela pose le problème de l'arrimage des cultures de formation mathématique dans ces trois institutions.

Le problème de la transition entre les mathématiques du secondaire et celles du postsecondaire était à l'ordre du jour d'un groupe de travail du colloque *Espace Mathématique Francophone 2006*. Ce groupe note dans son rapport les éléments suivants (Bloch, Kientega et Tanguay, 2006) :

- un constat général de difficultés des étudiants avec le formalisme;
- l'impuissance de l'institution et des enseignants à donner aux étudiants les outils pour surmonter ces difficultés;
- la nécessité de prévoir, au secondaire, des situations qui développent la rationalité mathématique et vont donc être préparatoires au raisonnement dans des registres plus formels, bien que ce formalisme ne fasse pas l'objet du travail spécifique au secondaire.

De l'ensemble des discussions s'est dégagé un consensus à l'effet que :

- l'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu;
- les connaissances logico-déductives doivent être mises en œuvre en articulation avec la construction des concepts mathématiques sur lesquels elles permettent d'opérer;
- l'enseignement collégial et supérieur doit remettre en question la disqualification systématique d'une construction des concepts qui ne soit pas totalement contrôlée par le formel, et doit notamment accepter le recours à l'heuristique et à l'empirisme.
- Parmi les pistes de solution envisagées par ces chercheurs, on peut citer :
- ne pas se limiter dans l'enseignement de niveau secondaire à des exercices d'ostension des objets, mais voir à implanter des situations travaillant la rationalité mathématique;
- considérer au niveau de l'université des pratiques intégrant le débat scientifique, les situations de recherche, les situations sur la rationalité mathématique, le travail sur les énoncés ouverts;

III. OBJECTIFS

Dans ce projet, nous avons retenu les objectifs suivants :

1. Construire une communauté de pratique, formée d'enseignants de mathématiques du Cégep de Sherbrooke et de l'Université de Sherbrooke et d'enseignants de didactique des mathématiques intervenant dans la formation des enseignants de mathématiques

- au secondaire, visant un meilleur arrimage entre la formation mathématique au cégep et à l'université.
2. Concevoir et mettre à l'épreuve des approches signifiantes d'enseignement des mathématiques.
 3. Produire des ressources pédagogiques en vue de leur mutualisation.

IV. LA NOTION DE COMMUNAUTÉ DE PRATIQUE

Rappelons les caractéristiques essentielles d'une communauté de pratique. Selon Wenger (1998), une communauté de pratique est un groupe de professionnels dont les membres s'engagent régulièrement dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs. Dans notre projet, ce groupe est formé d'enseignants de mathématiques du cégep et de l'université, ainsi que des didacticiens de mathématiques enseignant des cours de didactique des mathématiques.

Ces enseignants vont interagir, s'influencer mutuellement pour construire une compréhension commune d'une problématique en lien avec la formation mathématique et le problème des transitions. Ils devront participer de manière active à des prises de décisions collectives avec définition d'objectifs communs.

L'appartenance à une communauté de pratique est le résultat d'un engagement des individus dans des actions négociées les uns avec les autres. Cet engagement mutuel est basé sur la complémentarité des compétences et sur la capacité des individus à communiquer efficacement leurs connaissances avec celles des autres. Il suppose aussi un rapport d'entraide entre les participants, nécessaire au partage de connaissances sur la pratique.

Une autre caractéristique d'une communauté de pratique est l'entreprise commune. Elle est le résultat d'un processus collectif permanent de négociation qui reflète la complexité de la dynamique de l'engagement mutuel. La négociation des actions communes crée des relations de responsabilité mutuelle entre les personnes impliquées.

Enfin, la création d'un répertoire partagé est une autre caractéristique essentielle d'une communauté de pratique. Au fil du temps, la communauté crée des ressources qui forment le répertoire partagé. Elle a un capital initial qu'il convient de gérer pour élaborer progressivement une connaissance communautaire. Cette connaissance ne se réduit pas à la juxtaposition des connaissances individuelles; il y a mutualisation, innovation et production de nouvelles connaissances en utilisant les savoirs et compétences de chacun.

V. DÉMARCHE DE TRAVAIL SUIVIE

1. *Moments de travail*

La démarche préconisée pour la construction de la communauté de pratique mixte cégep-université s'appuie sur une interaction féconde entre des moments de co-formation, des moments de mise en pratique et des moments de retour réflexif sur ces mises en pratique. Plus précisément, en chacune des deux premières années du projet (2011-2013, 2013-2014), le travail de la communauté s'est déroulé selon les six moments suivants : 1) Identification d'une compréhension commune de la notion de situation signifiante; 2) Co-formation pour la construction d'une compréhension commune de la problématique et l'identification de principes didactiques qui permettront de guider la planification des situations d'apprentissage (SA) qui seront conçues et expérimentées; 3) Conception de SA opérationnalisant ces principes didactiques; 4) Expérimentation des SA; 5) Retour réflexif sur ces

expérimentations; 6) Production d'un document rendant compte des situations planifiées et expérimentées, du rôle des enseignants et des réflexions issues du travail de collaboration.

Pour la construction d'une compréhension commune de la notion de situation signifiante, une démarche en deux temps a été suivie. Dans un premier temps, chacun des participants a identifié dans son expérience une situation d'enseignement qu'il considère comme signifiante et a explicité, selon son point de vue, ce qui rend cette situation signifiante. Dans un deuxième temps, les didacticiens ont présenté au groupe une analyse de la documentation scientifique et professionnelle à ce sujet.

La liste suivante présente une synthèse des caractéristiques retenues par la communauté de la signifiante d'une situation. Cette liste a servi d'un cadre pour la planification de situations signifiante et l'analyse de leur expérimentation en classe.

- C1. Une situation qui provoque l'intérêt chez les étudiants
- C2. Une situation qui s'inspire de «pratiques mathématiciennes».
- C3. Une situation qui offre une validation interne.
- C4. Une situation qui provoque l'engagement cognitif des étudiants dans les tâches proposées.
- C5. Une situation qui donne une marge de manœuvre aux étudiants (questions ouvertes, variabilité des solutions).
- C6. Une situation présentant un défi aux élèves, mais qui soit réalisable dans un temps raisonnable.

2. *Rôles des différents acteurs*

Le groupe de travail est composé d'une équipe d'enseignants de mathématiques du cégep de Sherbrooke principalement (7 l'an 1 et 5 l'an 2), de 2 didacticiens des mathématiques de l'université de Sherbrooke et de 2 professionnelles de recherche.

Tous les enseignants ont contribué aux travaux des 5 premières phases de travail. Des moments forts de leur travail consistaient en l'élaboration de situations d'apprentissages potentiellement signifiantes, leur mise à l'épreuve dans leur propre classe et le retour réflexif au groupe de travail. Une enseignante a été délogée par le projet pour soutenir les enseignants «expérimentateurs» dans la conception et l'expérimentation en classe d'une situation d'apprentissage «potentiellement signifiante». Ces situations ont été aussi discutées dans le groupe de travail pour que les participants fassent des suggestions aux concepteurs tout particulièrement pour augmenter le potentiel de signifiante de la situation d'apprentissage.

Un professionnel de recherche a réalisé des entrevues pré et post-expérimentation en classe. Il a filmé les séances de classe. Les enregistrements vidéo ont été remis aux enseignants expérimentateurs pour préparer leur retour réflexif en grand groupe. Lors de ces rencontres, les enseignants pouvaient présenter aux membres de la communauté certaines séquences vidéo pour appuyer leur analyse réflexive où susciter une discussion collective sur un phénomène de classe. Les entrevues avec les enseignants ainsi que les échanges lors du retour réflexif ont été enregistrés sur support audio et transcrits par écrit.

Les données transcrites ainsi que les ressources produites par les enseignants ont été analysées par une équipe restreinte formée des deux didacticiens, du responsable de l'équipe des enseignants du Cégep et coresponsable du projet, d'une professionnelle de recherche. L'analyse visait essentiellement à soutenir le développement des ressources (situations d'apprentissages, des connaissances sur ces ressources développées par les enseignants expérimentateurs) en vue de leur mutualisation et le développement de connaissances, à

destination des enseignants, en lien avec la signifiante de situations d'apprentissage. Une synthèse de ces analyses est diffusée sur l'espace numérique de la communauté. Elle est présentée en deux rubriques : Témoignage de l'enseignant et Synthèse des discussions. La première propose la transcription écrite fidèle de réflexions de l'enseignant expérimentateur en lien avec les caractéristiques de la signifiante de situations retenues par la communauté. La seconde propose une synthèse des analyses produites par l'équipe restreinte ainsi que des suggestions en vue d'améliorer certains aspects de la ressource.

VI. QUELQUES RÉSULTATS DES EXPÉRIMENTATIONS ET DU RETOUR RÉFLEXIF

1. Aperçu général

Le tableau suivant présente quelques situations expérimentées en classe.

Description de la tâche principale	cours	Programme
<i>Voir l'avenir !</i> Utilisation des chaînes de Markov pour trouver l'état stable d'un marché fermé à trois produits.	Algèbre linéaire	Sciences administratives
<i>Caractérologie</i> Utilisation des 3 traits de personnalité (activité, émotivité et retentissement des représentations) issus de la caractérologie pour définir un espace tridimensionnel.	Algèbre linéaire	Sciences administratives
<i>Apprentissage collaboratif</i> Modélisation du volume de solides de révolution (méthode des disques) et de la longueur de courbes planes, approche coopérative.	Calcul intégral	Sciences de la nature
<i>Les définitions</i> Amener l'étudiant à créer une définition et provoquer une réflexion sur la définition émise.	Algèbre linéaire et géométrie vectorielle	Sciences de la nature
<i>Correction par des pairs</i> Mettre les étudiants dans une démarche évaluative et de confrontation des évaluations comme approche pour renforcer leur apprentissage.	Calcul différentiel et intégral II	Imagerie, BES science, BES math Cours universitaire
<i>Synthèse des couleurs</i> Utilisation de la synthèse additive des couleurs pour une activité de consolidation sur l'indépendance linéaire.	Algèbre linéaire	Sciences de la santé
<i>Le poids de L'Hospital</i> Activité utilisant le calcul différentiel pour trouver la position d'équilibre d'un poids suspendu à l'aide d'une corde et une poulie. (adapté de F. Caron (UdM) et A. Hénault et K. Pineau (ÉTS) (projetsmathematiques.com/upload/Caron-Pineau.pdf))	Mathématiques techniques (Dérivée et intégrale)	Technique de génie mécanique
<i>Activité de découverte des rôles des paramètres des fonctions sinusoïdales</i>	Mathématiques techniques	Technique de laboratoire - Biotechnologie
<i>Où est Carmen Sandiego ?</i> À l'aide d'un jeu interactif construit en plusieurs questions, les étudiants révisent les notions vues en classe. Ainsi, ils consolident leur apprentissage avant l'évaluation.	Mathématiques discrètes	Sciences informatiques et mathématiques

Tableau 1 - listes des situations expérimentées

Ces situations ainsi qu'une synthèse de leur retour réflexif en groupe peuvent être consultées sur l'espace numérique de la communauté : <http://projet.abombardier.profweb.ca/>

Pour bien illustrer quelques résultats du travail de la communauté, nous exploiterons le cas de la situation *Voir l'avenir*.

2. Présentation de la situation *Voir l'avenir*

Cette situation a été expérimentée dans le cours Algèbre linéaire pour des étudiants du programme Sciences administratives.

Comme le montre la figure 1, l'activité présente un marché fermé des crayons disponibles au Cégep. Les probabilités que les étudiants changent de marque de crayon sont illustrées dans un graphe. L'étudiant doit répondre à la question : « *Quelle marque de crayon achèterez-vous?* » et ce, sachant qu'il veut la marque de crayon la plus populaire à long terme.

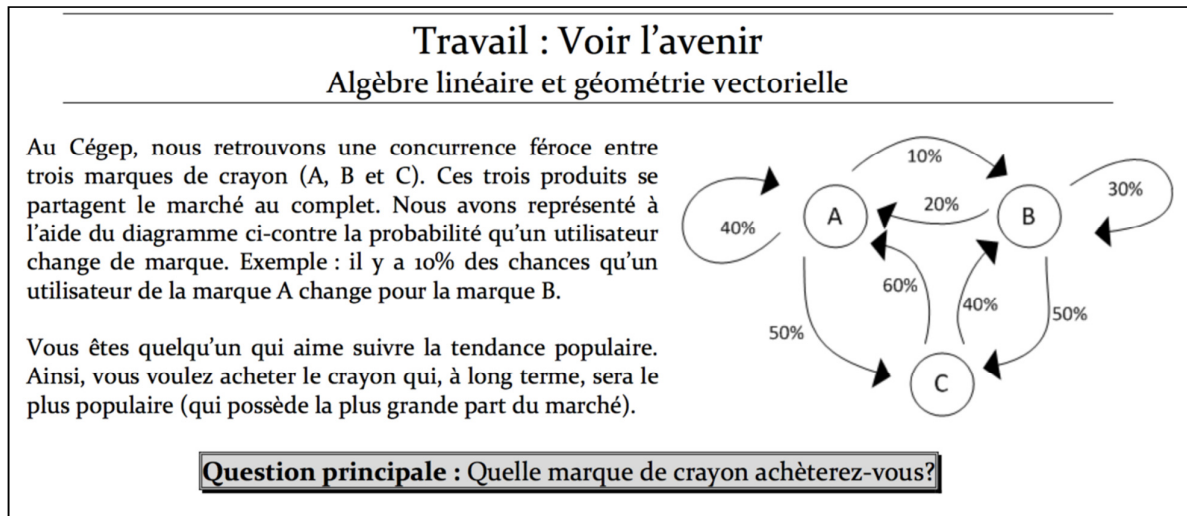


Figure 1- Situation Voir l'avenir

Pour répondre à cette question, l'étudiant doit arriver à comprendre que dans cette situation, le marché évolue vers un état stable et que cet état ne dépend pas des valeurs initiales des parts de marché. Pour amener l'étudiant à cette compréhension, le travail comporte trois parties. Dans une première partie, l'étudiant doit répondre à la question principale intuitivement. Dans la deuxième partie, à l'aide de la matrice de transition, il doit procéder de façon itérative (en utilisant le mode matrice de sa calculatrice ou Geogebra). Il doit alors conjecturer la tendance du marché à long terme étant données les conditions initiales des parts de marché. Et ensuite de refaire les mêmes calculs avec des données initiales différentes et de conjecturer la tendance du marché à long terme. Finalement, de façon formelle, il doit résoudre le système d'équations linéaires qui représente la situation recherchée.

Dans la première partie, l'enjeu clé dans le passage au registre algébrique réside dans la compréhension de la matrice de transition. Elle est définie dans le travail comme une matrice carrée 3x3 dont les colonnes représentent la part de marché d'une marque gagnée par une autre marque (éventuellement la même) selon les pourcentages figurant dans le schéma représentant la dynamique du marché. Ainsi, si les colonnes représentent dans l'ordre les parts de marché des marques A, B et C respectivement, qui sont gagnées par d'autres marques (éventuellement la même), la matrice de transition peut s'écrire :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

À un instant t , les parts de marché des trois marques peuvent être représentées par une matrice colonne. Ainsi si initialement, soit au temps t_0 , les parts de marché des marques A, B et C sont 10%, 70% et 20% respectivement, au jour suivant, soit au temps t_1 , le calcul suivant donne les nouvelles parts de marché :

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

L'application itérée de la matrice de transition aux matrices colonnes obtenues permet de générer les parts de marché à l'instant t_2 , t_3 , t_4 , et ainsi de suite, à n'importe quel instant t_n . Si X_n désigne la matrice colonne des parts de marché à l'instant t_n , on a :

$$MX_n = X_{n+1} \text{ et } M^{n+1}X_0 = X_{n+1}$$

Dans la troisième partie, on amène l'étudiant à répondre à la question principale de façon formelle par la résolution de l'équation : $MX = X$ où X est définie comme la matrice colonne représentant les parts de marché à long terme.

3. Quelques résultats d'expérimentation de la situation Voir l'avenir

2. Témoignage de l'enseignant

Nous reprenons ici un extrait de la synthèse des réflexions de l'enseignant à propos de la signifiante de la situation *Voir l'avenir* qu'il a expérimentée.

L'enseignant affirme que les étudiants se sont engagés rapidement dans la tâche, à cause de la curiosité. Il explique : « Une équipe se posait des questions sur l'essence du problème, à savoir ce qui allait se passer. L'effet de surprise lié au résultat contre-intuitif du changement d'état initial aurait suscité l'intérêt des étudiants. »

Selon un sondage réalisé par l'enseignant après le cours, 77% des étudiants ont déclaré être assez ou parfaitement d'accord que les problèmes posés étaient stimulants. Certains facteurs semblent avoir participé à susciter l'intérêt des étudiants estime l'enseignant :

- La situation amène l'étudiant dès le départ à réfléchir pour résoudre le problème proposé, ce qui est différent d'une approche plus traditionnelle.
- Le contexte utilisé s'inscrit dans le profil de formation des étudiants (sciences administratives)
- L'effet de surprise lié au résultat contre-intuitif du changement d'état initial aurait suscité l'intérêt des étudiants.
- C'était important de faire une situation appliquée rapidement dans la session afin de démontrer aux étudiants que le contenu du cours puisse leur être utile, que ça puisse servir à quelque chose.

Toutefois, l'intérêt a diminué pour la partie théorique. Selon lui, les facteurs suivants ont contribué à la diminution de l'intérêt.

- Pour les étudiants, la preuve empirique était suffisamment convaincante qu'ils n'éprouvaient pas le besoin d'aller à l'infini. Une preuve en mathématique, c'est plus fort que juste intuitivement, mais les étudiants « s'en foutaient ».
- Il semble difficile de revenir à la partie théorique sans accompagner les étudiants dans le travail de modélisation.

La situation a présenté un défi aux élèves tout en étant réalisable dans un temps raisonnable. L'enseignant estime que le niveau de difficulté était assez élevé, car les étudiants sont plus habitués à appliquer quelque chose plutôt qu'à le construire. Il ajoute, «alors, même si l'activité était utilisée comme révision, ils devaient quand même construire un système d'équations, ce qui était difficile. »

4. *Quelques éléments de la discussion de cette situation*

Au-delà de la problématique liée à la difficulté des étudiants de voir la pertinence de recourir à la preuve formelle, cet exemple souligne que si le contexte facilite la construction de significations par les étudiants, cette signification a tendance à rester liée au contexte. La médiation de l'enseignant est alors primordiale lors des changements de registre. La représentation de la dynamique des transferts de parts de marché par un graphe (figure 1) a facilité la compréhension du phénomène étudié. Le graphe joue le rôle de modèle intermédiaire qui permet de comprendre le phénomène, mais son caractère opératoire est limité, ce qui rend nécessaire le recours à un autre modèle. L'enjeu de cette situation est alors de passer au modèle matriciel. Dans la deuxième partie du travail, d'abord, par la représentation de la dynamique du marché par la matrice de transition et des matrices colonnes représentant les parts de marché à un instant donné ainsi que la traduction du passage d'un état du marché à un autre par un calcul matriciel (l'application de la matrice de transition à une matrice colonne représentant les parts de marché). Ensuite dans la troisième partie dont l'objectif est la preuve formelle par la résolution de l'équation $MX = X$. Ces passages cruciaux sont au cœur de la compréhension et de la résolution du problème, sont présentés dans la tâche comme allant de soi, rendant transparent le processus de modélisation qui les sous-tend.

5. *Quelques résultats généraux*

1. Signifiante potentielle VS signifiante effective

Une analyse a priori des situations expérimentées ainsi que les discussions lors du retour réflexif montrent que toutes les situations rencontrent plusieurs caractéristiques de la signifiante retenues par la communauté.

Cependant, les expérimentations ont mis en évidence le caractère émergent de la signifiante. Bien que les situations expérimentées soient potentiellement significatives pour les élèves, tout n'était pas joué a priori. Un travail de l'enseignant en classe est nécessaire pour faire émerger les significations chez les élèves. L'enseignant expérimentateur de la situation *Caractérologie* l'illustre très bien. Cet enseignant exploite la théorie psychologique de la caractérologie qui modélise le caractère d'une personne comme la combinaison linéaire de trois traits essentiels: l'activité (l'actif et le non-actif), l'émotivité (l'émotif et le non-émotif) et le retentissement des représentations (le primaire et le secondaire). On associe ainsi une personne à un point dans un espace cartésien où chacun des axes représente les valeurs à un des trois traits. La distance entre deux points modélise ainsi le degré de proximité des traits de personnalité de deux personnes. Dans son retour réflexif après expérimentation, cet enseignant était surpris que le niveau d'engagement des étudiants fût moindre que ce qu'il avait anticipé. «L'activité était centrée sur eux-mêmes, la caractérologie... j'aurais peut-être parlé plus de caractérologie [...] moi, ça avait beaucoup de sens parce que je travaillais depuis deux mois là-dessus, mais eux ont rempli le test, ils avaient lu un petit paragraphe qui expliquait, est-ce qu'ils l'ont lu? ».

2. Le caractère fragile de la signifiante

Par ailleurs, bien que la signifiante de la situation puisse émerger chez les étudiants au début du déroulement de l'activité en classe, elle peut devenir obsolète. C'est le cas par exemple de la situation *Voir L'avenir* que nous venons de discuter où l'on a noté la baisse de l'intérêt des étudiants de la pertinence de la preuve formelle pour répondre à la question principale. Pour maintenir l'intérêt des étudiants tout au long de la réalisation de l'activité, l'enseignant a avantage à introduire de temps à autre des questions pertinentes qui renouvellent la signifiante de la situation. Par exemple, dans le cas de cette dernière situation, l'enseignant peut prévoir dans la tâche des questions qui permettent de faire émerger chez les élèves le sens de la matrice de transition et des matrices colonnes ainsi que de faire le lien entre l'idée des parts de marché à long terme, le passage à la limite dans l'égalité $MX_n = X_{n+1}$ et l'équation définissant la matrice colonne représentant les parts de marché à long terme : $MX = X$. Un autre exemple, dans la situation *Le poids de l'Hospital*, il est proposé de demander aux étudiants une analyse du dispositif expérimental pour identifier les variables indépendantes et dépendantes en jeu ainsi que leurs interrelations ; de demander de trouver un moyen pour prédire la hauteur maximale, quel que soit l'angle. Pour y arriver, à partir de la représentation géométrique d'un état du système, on peut demander aux étudiants pour quelques valeurs de la variable indépendante de calculer les valeurs de la variable dépendante.

Ces discussions amènent les membres de la communauté à voir que les significations ne sont pas seulement un moyen favorisant l'apprentissage elles en sont aussi un objet. La négociation de sens se trouve au centre des interactions sociales qui ont cours en classe, notamment celles entre l'enseignant et les élèves.

3. Le rôle du contexte

Lors du retour réflexif, tous les enseignants ont affirmé que la contextualisation des situations a favorisé l'intérêt et l'engagement cognitif de leurs étudiants. En effet, dans la majorité des cas, le contexte est en lien avec le domaine de formation des étudiants, ce qui pourrait augmenter leur perception de l'utilité des mathématiques dans leur domaine de formation. On peut noter qu'un grand nombre de ces situations est basé sur des tâches de modélisation mathématique. Cela semble indiquer que les tâches de modélisation sont potentiellement signifiantes pour les étudiants, surtout quand le phénomène à modéliser s'inscrit dans une pratique sociale en lien avec le domaine du profil de formation des étudiants (administration, génie mécanique, etc.).

En outre, il ressort de l'analyse de plusieurs situations l'importance de la mise en situation initiale en classe pour faire émerger chez les étudiants une problématique liée à leur domaine de formation. L'engagement cognitif dans la réalisation des tâches demandées est alors motivé par le désir de compréhension de cette problématique.

VII. EN GUISE DE CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons présenté le travail ayant conduit à l'émergence d'une communauté de pratique formée d'enseignants et de didacticiens de mathématiques autour de la problématique de la signifiante de l'enseignement. Les situations qui ont été développées, ou adaptées, ainsi que les idées qui ont émergé des retours réflexifs ont permis l'élaboration d'un répertoire partagé et rendu public via un site internet : <http://projet.abombardier.ep.profweb.qc.ca>. Les membres de la communauté espèrent que ce répertoire devient un espace de collaboration professionnelle, un vivier de ressources dynamiques pour des praticiens préoccupés par la même problématique.

REFERENCES

- Adihou A. (2011) Enseignement-apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. *Les Collectifs du Cirp*, 2.
- Bloch I., Kientega G., Tanguay D. (2006) Synthèse thème 6. *Actes du congrès Espace Mathématique Francophone-2006, Groupe de travail 6: Transition secondaire/postsecondaire et enseignement des mathématiques dans le postsecondaire*. Sherbrooke : Université de Sherbrooke.
- Bressoux P. (2001) Réflexions sur l'effet-maître et l'étude des pratiques enseignantes. *Les dossiers des sciences de l'éducation* 5, 35-52.
- Caron F., de Cotret S. R. (2007) Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques: genèse d'une perspective. In *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (123-134).
- Cobb P., Perlwitz M., Underwood D. (1994) Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation* 20(1).
- Conseil de la science et de la technologie (2004) *La culture scientifique et technique au Québec: une interface entre les sciences, la technologie et la société. Rapport de conjoncture 2004*. Québec : Conseil de la science et de la technologie.
- Conseil supérieur de l'éducation (2004) *Un nouveau souffle pour la profession enseignante. Avis au ministre de l'Éducation*. Québec : Conseil supérieur de l'éducation.
- Conseil de la science et de la technologie (2004) *La culture scientifique et technique au Québec: une interface entre les sciences, la technologie et la société. Rapport de conjoncture 2004*. Québec : Conseil de la science et de la technologie.
- Gouvernement du Québec. (2009) *Programme de formation de l'école québécoise. Secondaire deuxième cycle domaine de mathématique*. Québec : Ministère de l'éducation du loisir et du sport.
- Larochelle M., Bednarz N. (1994) À propos du constructivisme et de l'éducation. *Revue des sciences de l'éducation* 20(1).
- Martinand J. L. (1989) Pratiques de référence, transposition didactique et savoirs professionnels en sciences et techniques. *Les Sciences de l'éducation* 2(1989), 22-29.
- Mercier A., Buty C. (2004) Evaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences. *Revue française de pédagogie*, 47-59.
- Squalli H. (2015) Impliquer les professionnels dans leur formation : un journal de bord en résolution de problèmes mathématiques. In Maulini O., Desjardins J., Etienne R., Guibert P., Paquay L. (Eds.) *À qui profite la formation continue des enseignants ?* DeBoeck, 94-106.
- Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3), 133-170.
- Wenger E. (1998) *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: University Press.