Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

TRANSFERT DU DIAGNOSTIC *PEPITE* À DIFFÉRENTS NIVEAUX SCOLAIRES : TESTS DIAGNOSTIQUES POUR LES ELEVES ET LEURS USAGES PAR LES ENSEIGNANTS

Françoise CHENEVOTOT-QUENTIN[*] – Brigitte GRUGEON-ALLYS[**] – Julia PILET[***] – Elisabeth DELOZANNE[****] – Dominique PREVIT[*****]

Résumé – Cet article est consacré au transfert du diagnostic *Pépite* à différents niveaux scolaires. *Pépite* concerne l'algèbre élémentaire et s'adresse initialement à des élèves en fin de scolarité obligatoire en France (16 ans). Nous souhaitons étendre ce diagnostic du début des apprentissages en algèbre élémentaire (12-13 ans) jusqu'en fin de l'école obligatoire (16 ans). Nous présentons les cadres théoriques et les modalités du diagnostic *Pépite*. Nous caractérisons le modèle du test diagnostique et nous étudions son adaptabilité à différents niveaux scolaires. Nous détaillons l'analyse des réponses et nous expliquons comment la transférer. Enfin, nous abordons la question des usages par les enseignants de cet outil de diagnostic.

Mots-clefs : diagnostic, usages, technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement (TICE), algèbre élémentaire, enseignement différencié

Abstract – This paper deals with the transfer of the diagnostic assessment *Pépite* at different grade levels. *Pépite* is relevant for elementary algebra and for students at the end of compulsory schooling in France (16 years old). We wish to extend this diagnostic assessment from the beginning of learning elementary algebra (12-13 years old). We present the theoretical foundations and the modalities of the diagnostic assessment *Pépite*. We characterize the model of the diagnostic test and we study how this model is compatible according to different grade levels. We detail the response analysis and also we explain how to transfer it. Last, we address the issue of the usages by teachers of this diagnostic tool.

Keywords: diagnostic assessment, usages, Information and Communication Technology (ICT), elementary algebra, teaching suggestions

I. LE CONTEXTE

Cet article s'adresse au GT6 « Ressources et développement professionnel des enseignants » et se situe à la croisée des deux premiers pôles de questionnement proposés dans ce groupe de

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – Université Paris Diderot – France – francoise.chenevotot@univ-paris-diderot.fr
[**] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – Université Paris Diderot – France – brigitte.grugeon@univ-paris-diderot.fr
[***] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – Université Paris Diderot – France – julia.pilet@univ-paris-diderot.fr
[****] Laboratoire L'UTES – Université Pierre et Marie Curie – Paris – France – elisabeth.delozanne@upmc.fr
[*****] Laboratoire L'UTES – Université Pierre et Marie Curie – Paris – France – dominique.previt@gmail.com

Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B. (2015) Transfert du diagnostic *Pépite* à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages par les enseignants. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 566-583.

travail. Pour le 1er pôle « Conception de ressources », nous présentons des ressources de diagnostic conçues par des chercheurs en didactique des mathématiques pour des enseignants de mathématiques. Pour le 2ème pôle « Exploitation de ressources », nous abordons la question des usages par les enseignants des ressources mises à disposition pour tous les niveaux du collège.

Les enseignants recherchent des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. En fait, pour permettre à chaque élève de progresser, les enseignants auraient besoin, même si ce besoin n'est pas toujours exprimé, d'un diagnostic détaillé concernant les apprentissages individuels des élèves. Toutefois, les enseignants ont aussi besoin de gérer la classe dans sa globalité, en lien avec le temps d'enseignement, en proposant des activités différenciées adaptées à des groupes d'élèves ayant des compétences proches ou nécessitant des stratégies d'enseignement similaires.

Notre recherche porte sur le développement et l'usage de base d'exercices en ligne pour le diagnostic et l'enseignement différencié dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Elle se situe dans la lignée du projet *Pépite* dont l'objectif était de concevoir et d'implémenter des outils en ligne pour aider les professeurs de mathématiques à gérer la diversité cognitive de leurs élèves en algèbre (Grugeon & al. 2012).

Depuis 2011, nous disséminons les outils issus de nos recherches sur LaboMep (Pilet & al. 2013), la plateforme développée par Sésamath, une association regroupant des professeurs de mathématiques. Le succès de la plateforme LaboMep nous montre que de telles ressources en ligne peuvent répondre aux besoins des enseignants (Artigue & al. 2008) qui sont à la recherche d'informations sur la cohérence de l'activité algébrique des élèves et sur leurs erreurs. Nous avons d'abord implémenté le diagnostic *Pépite* pour des élèves de fin de 3ème / début de 2nd (15-16 ans). Puis nous avons implémenté un outil proposant automatiquement des parcours d'enseignement différencié correspondant aux objectifs d'apprentissage visés par l'enseignant tout en étant adaptés au diagnostic des élèves. Nous poursuivons ces travaux dans le cadre du projet Néopraéval accepté par l'Agence Nationale de la Recherche.[1]

Cet article traite la question du transfert du diagnostic *Pépite* à différents niveaux scolaires. Alors que le diagnostic initial s'adressait à des élèves en fin de scolarité obligatoire en France (16 ans), nous souhaitons étendre ce diagnostic à des élèves plus jeunes, dès le début des apprentissages en algèbre élémentaire (12-13 ans). Nous avons ainsi défini une échelle de l'activité algébrique pour suivre l'évolution de la compétence algébrique des élèves à différents niveaux scolaires. Nous présentons d'abord le dispositif de diagnostic *Pépite* et les éléments théoriques mobilisés. Ensuite, nous caractérisons le modèle du test diagnostique et expliquons la viabilité de ce modèle à différents niveaux scolaires. Puis nous détaillons l'analyse des réponses de l'élève et ses enjeux et expliquons comment la transférer à d'autres niveaux scolaires. Enfin, nous abordons la question du transfert des potentialités de ces outils pour réguler l'enseignement avant de conclure avec quelques perspectives de recherche. Nous indiquons en annexe les programmes français d'algèbre pour le collège.

II. LE DIAGNOTIC *PEPITE*

1. Les fondements théoriques

Le diagnostic *Pépite* n'utilise pas de modèles psychométriques mais se fonde sur une analyse épistémologique et anthropologique d'une part, et sur une analyse cognitive d'autre part, de l'algèbre élémentaire dans le but de définir une référence (Artigue & al. 2001). Dans sa

[1] Convention ANR-13-APPR-002-01. Site du projet : http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

dimension *outil* (Douady 1986), le domaine algébrique comprend les traditionnels problèmes arithmétiques, les problèmes de généralisation et de preuve, les problèmes pour lesquels l'algèbre apparait comme un outil de modélisation, les problèmes de mise en équation, les problèmes algébriques et fonctionnels (Chevallard 1989). Dans sa dimension *objet*, l'algèbre est considéré comme un ensemble structuré d'objets (les expressions algébriques, les formules, les équations, les inéquations) avec des propriétés spécifiques et des représentations sémiotiques (Duval 1993) associées à différents registres (Kieran 2007 ; Vergnaud & al. 1988). Le diagnostic *Pépite* repose sur une analyse globale et multidimensionnelle de l'activité algébrique (Grugeon 1997 ; Kieran 2007) qui permet d'identifier les cohérences de l'activité des élèves en algèbre puis d'en suivre l'évolution.

Selon une approche anthropologique, les connaissances mathématiques dépendent fortement de l'institution dans laquelle elles doivent vivre, être apprises et être enseignées. Les objets mathématiques n'existent pas pour eux-mêmes mais émergent de pratiques qui varient d'une institution à une autre. Chevallard (1999) les analyse en termes de praxéologies, c'est-à-dire en termes de type de tâches, de techniques utilisées pour résoudre ces tâches (praxis), de discours technologique développé dans le but d'expliquer et justifier ces techniques et, enfin, de théories qui structurent le discours (logos). Ici, le diagnostic *Pépite* dépend du curriculum jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire. Pour chaque niveau scolaire, les tâches diagnostiques qui composent le test sont caractérisées par un type de tâches, la complexité des objets algébriques, les techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés.

2. *Le test Pépite*

Le test diagnostic Pépite comprend dix tâches diagnostiques (constituées de 1 à 3 items) qui peuvent être des questions à choix multiple ou des questions ouvertes de un à plusieurs pas de raisonnement.

Du côté du modèle didactique, les dix tâches diagnostiques Pépite recouvrent complétement le domaine algébrique et se répartissent selon quatre types de tâches : (1) les tâches de calcul (développer et factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations), (2) les tâches de production (d'expressions, de formules, d'équations), (3) les tâches de traduction ou de reconnaissance (des relations mathématiques), (4) les tâches de résolution de problèmes dans différents contextes mathématiques (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) utilisant l'algèbre pour généraliser, pour prouver des propriétés, pour modéliser ou pour mettre en équation.

Du côté du modèle informatique, le modèle conceptuel de classe de tâches développé par Prévit (Delozanne & al. 2008) permet de caractériser des tâches équivalentes du point de vue du diagnostic. Prévit a développé PépiGen, un logiciel qui génère automatiquement les tâches et leur analyse. PépiGen s'appuie lui-même sur Pépinière, un logiciel de calcul formel qui génère les réponses anticipées (correctes ou erronées) des élèves selon l'analyse *a priori* des tâches.

Pour transférer le test diagnostique Pépite à différents niveaux scolaires, nous avons affronté deux problèmes majeurs. Du côté du modèle didactique, nous nous sommes appuyés sur les types de tâche du domaine algébrique et avons dû identifier des valeurs des variables didactiques associées aux tâches recouvrant le domaine mathématique, pour chaque niveau considéré. Du côté du modèle informatique, nous avons dû construire un test générique pour disposer de tests pour différents niveaux scolaires.

3. *L'analyse des réponses*

Pépite comprend trois niveaux pour l'analyse des réponses des élèves :

- Le diagnostic local (sur un seul exercice) analyse la réponse de l'élève à une question du test selon plusieurs dimensions et non seulement en termes de réponse correcte ou incorrecte ; le système de diagnostic produit un ensemble de codes qui caractérisent cette réponse selon des types de réponses anticipées ;
- Le diagnostic global individuel (sur un ensemble d'exercices) rassemble les codes similaires issus des différents exercices pour construire le profil cognitif de l'élève ; le système de diagnostic positionne l'élève par rapport à une référence selon plusieurs composantes et indique ses taux de réussite, leviers (connaissances sur lesquelles s'appuyer), faiblesses (connaissances à déstabiliser), règles fausses et règles correctes ;
- Le diagnostic global collectif positionne l'élève par rapport à des groupes d'élèves qui ont des profils cognitifs proches ; le système de diagnostic affecte l'élève dans un groupe dont il précise les caractéristiques.

Pour transférer le test diagnostique Pépite à différents niveaux scolaires, nous avons gardé la même démarche de diagnostic en trois niveaux. Cependant, pour le 1er niveau de diagnostic (diagnostic local), pour chaque tâche, nous avons dû anticiper les différents types de réponses et leurs différentes formes pour que le logiciel de calcul formel Pépinière soit capable de réaliser l'analyse automatique. Pour le 2ème niveau de diagnostic (diagnostic global individuel), nous avons dû adapter l'algorithme qui calcule le profil cognitif de l'élève pour les différents niveaux scolaires considérés tout en gardant la même référence pour positionner les élèves selon chaque composante. Enfin, pour le 3ème niveau de diagnostic (diagnostic global collectif), les modalités de constitution des groupes sont restées inchangées.

Nous allons maintenant exposer le transfert du diagnostic *Pépite* au niveau 5ème / 4ème (12-13 ans) en précisant les conditions de réussite.

III. LE TRANSFERT DES TACHES DIAGNOSTIQUES

La première étape pour transférer le diagnostic *Pépite* a consisté à concevoir des tâches diagnostiques conformes aux fondements théoriques exposés ainsi qu'aux contraintes institutionnelles.

1. *Un transfert des tâches qui assure la couverture du domaine mathématique*

Pour garantir que le test prend bien en compte tous les types de tâches du domaine algébrique, nous caractérisons chaque item d'une tâche diagnostique par le ou les types de tâches impliqués (Chenevotot & al. 2011). Ces types de tâches, présentés dans le tableau 1, sollicitent l'algèbre dans sa dimension *outil* (Produire une expression algébrique, Traduire ou reconnaître, résoudre des problèmes relevant de l'algèbre) comme dans sa dimension *objet* (Calculer sur des expressions algébriques). Nous considérons que le test diagnostique recouvre les types de tâches du domaine si tous les types de tâches interviennent. Comme on le voit sur le tableau 1, les dix tâches (27 items) du test initial niveau fin de 3ème / début de 2nd recouvrent le domaine algébrique. Le test conçu pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème se compose également de dix tâches diagnostiques (22 items). Le tableau 2 montre que ces tâches font elles aussi intervenir tous les types de tâches du domaine. Cependant, à ce niveau scolaire, les connaissances numériques jouent un rôle important pour entrer dans l'activité algébrique. C'est pourquoi nous avons ajouté un type de tâche : « *Produire une expression* *numérique* ». Nous supposons que savoir si un élève réussit ou pas à produire une expression en ligne avec un parenthésage correct est un indicateur important pour son interprétation des expressions algébriques. Nous illustrons ce nouveau type de tâche au paragraphe III.2 sur la figure 3.

Types de taches relatifs à	**Nombre d'items**	**Items du test**
Calcul	4 / 27	5.1 / 5.2 / 5.3 / 5.4
Production d'expressions algébriques	7 / 27	3.1 / 8.1 / 8.2 / 8.3 / 9 / 10.2
Traduction ou reconnaissance	16 / 27	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 6 / 7 / 10.1
Résolution de problèmes (mise en équation, preuve) dans différents contextes mathématiques	3 / 27	8.3 / 9 / 10.3

***Tableau 1** – Organisation du test de niveau 3ème / 2nd en termes de types de tâches*

Types de taches relatifs à	**Nombre d'items**	**Items du test**
Calcul	4 / 22	7.1 / 7.2 / 8.1 / 8.2
Production d'expressions numériques	1 / 22	5
Production d'expressions algébriques	3 / 22	3.1 / 6
Traduction ou reconnaissance	14 / 22	1.1 / 1.2 / 1.3 / 2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4 / 10
Résolution de problèmes (preuve) dans différents contextes mathématiques	1 / 22	6

***Tableau 2** – Organisation du test de niveau 5ème / 4ème en termes de types de tâches*

2. *Un transfert par adaptation des tâches existantes ou par ajout de nouvelles tâches*

Pour être conforme avec les curricula des élèves français en classe de 5ème, le transfert du test demande un travail spécifique sur les tâches. Nous avons distingué deux cas : d'un côté, les tâches caractéristiques du domaine algébrique que nous avons transférées par adaptation du niveau 3ème / 2nd à un niveau scolaire inférieur et, de l'autre côté, les tâches relatives au domaine numérique, spécialement conçues pour le niveau 5ème / 4ème. Nous avons adapté les tâches du domaine algébrique en ajustant des valeurs des variables didactiques telles que la structure des expressions algébriques ou le choix des nombres. Ces adaptations sont justifiées à la fois par le curriculum et par l'activité algébrique attendue au niveau scolaire considéré. Nous présentons un exemple d'adaptation d'item : l'adaptation de l'item 3.1 du test initial (figure 1) pour le niveau 5ème / 4ème (figure 2). Dans les deux cas, le type de tâches est le même : « *Produire une expression algébrique* » et les exercices se situent tous les deux dans le cadre géométrique. Dans le test initial (respectivement le nouveau test), la tâche concerne l'aire (respectivement le périmètre) d'un rectangle (respectivement une figure). L'aire du rectangle s'exprime par une expression du second degré dont la structure est trop complexe pour le niveau 5ème / 4ème. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi une figure qui conduit à une expression plus simple pour le niveau inférieur. De plus, ce choix permet d'identifier les élèves qui concatènent les termes (réponse $11x$) ou ceux qui sont encore dans l'addition itérée (réponse $x + x + x + x + 7$).

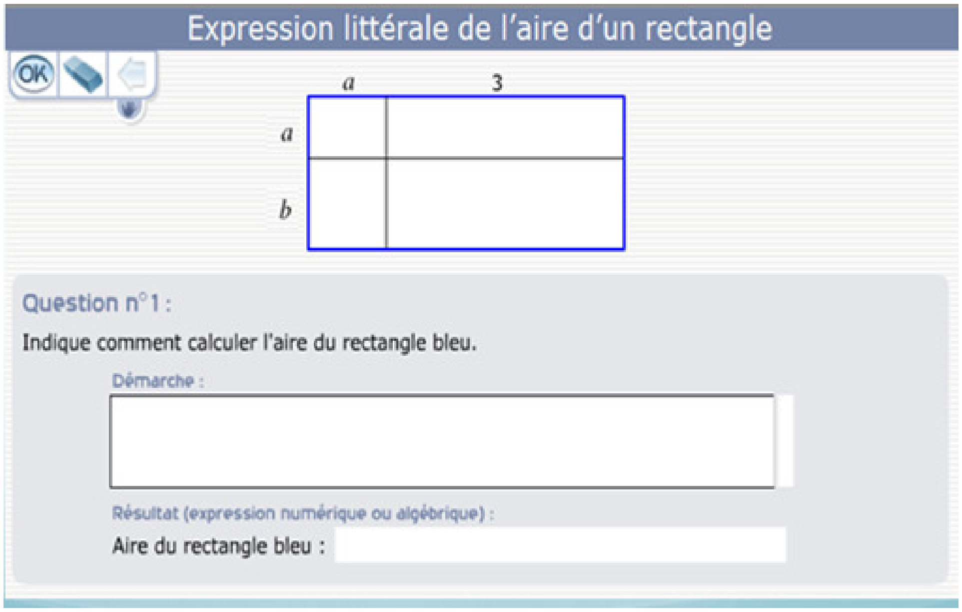
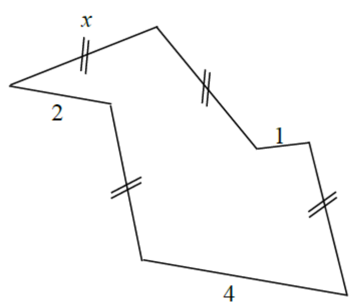


Figure 1 – *Item 3.1 du test initial*

Exercice 3 :



Calcule le périmètre de la figure	
Brouillon pour les calculs	Périmètre de la figure

Figure 2 – *Item 3.1 du test de niveau 5ème / 4ème : un exemple d'adaptation de tâche*

Pour prendre davantage en compte les connaissances numériques des élèves qui découvrent tout juste l'algèbre, nous avons conçu des tâches du domaine numérique. La figure 3 présente l'une de ces tâches qui relève du type de tâches « *Produire une expression numérique* ». Cette tâche permet de comprendre si un élève peut produire une expression numérique correcte avec des parenthèses ou si des raisonnements de type « pas à pas » persistent.

Exercice 5 :
13 filles et 15 garçons vont au cinéma. Chacun d'eux paye sa place à 6,80€, s'achète un soda à 3€, du pop-corn à 3,20€ et une glace à 2,50€.
Ecris une seule expression permettant de trouver la somme dépensée par le groupe sans faire le calcul
Résultat

Figure 3 *– Item 5 du test de niveau 5ème / 4ème : un exemple de nouvelle tâche*

IV. LE TRANSFERT DE L'ANALYSE DES REPONSES

Nous allons aborder la question du transfert de l'analyse des réponses dans le diagnostic *Pépite* en visitant successivement les trois niveaux du processus : le diagnostic local, le diagnostic global individuel, le diagnostic global collectif.

1. Le premier niveau : le diagnostic local

Tout le processus de diagnostic repose sur la qualité de cette première étape : analyser chaque réponse d'élève. Les réponses des élèves ne sont pas seulement étiquetées selon qu'il s'agit de réponses correctes ou incorrectes. Elles sont aussi codées en termes de cohérences de l'activité algébrique de l'élève, grâce à une analyse *a priori* (connaissances, erreurs récurrentes) de chaque tâche. Nous définissons six codes issus d'une étude théorique : (1) la Validité des réponses (V), le statut du signe Egal (E), l'utilisation des Lettres en tant que variables (L), l'utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Algébriques (EA), la Traduction d'un problème d'un cadre vers un autre (T) et le type de Justification (J). La figure 4 (respectivement figure 5) montre les réponses d'un élève en classe de 3ème / 2nd (respectivement 5ème / 4ème) à la tâche présentée en figure 1 (respectivement figure 2) ainsi que l'analyse des réponses.

Coche la ou les égalités correctes			
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Choix	Analyse a priori	Code
1	Calcul incorrect basé sur un produit en croix	V3 EA5
2	Addition des numérateurs et des dénominateurs	V3 EA42
3	Addition des numérateurs et produit des dénominateurs	V3 EA33
4	Correct	V1 EA1

Figure 4 *– Diagnostic local pour l'item 1.4 du test niveau 3ème / 2nd*

Coche la ou les égalités correctes			
$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{9}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Choix	Analyse a priori	Code
1	Addition des numérateurs sans mettre au même dénominateur	V3 EN33
2	Addition des numérateurs et des dénominateurs	V3 EN42
3	Addition des numérateurs et produit des dénominateurs	V3 EN33
4	Correct	V1 EN1

Figure 5 – *Diagnostic local pour l'item 1.1 du test niveau 5ème / 4ème*

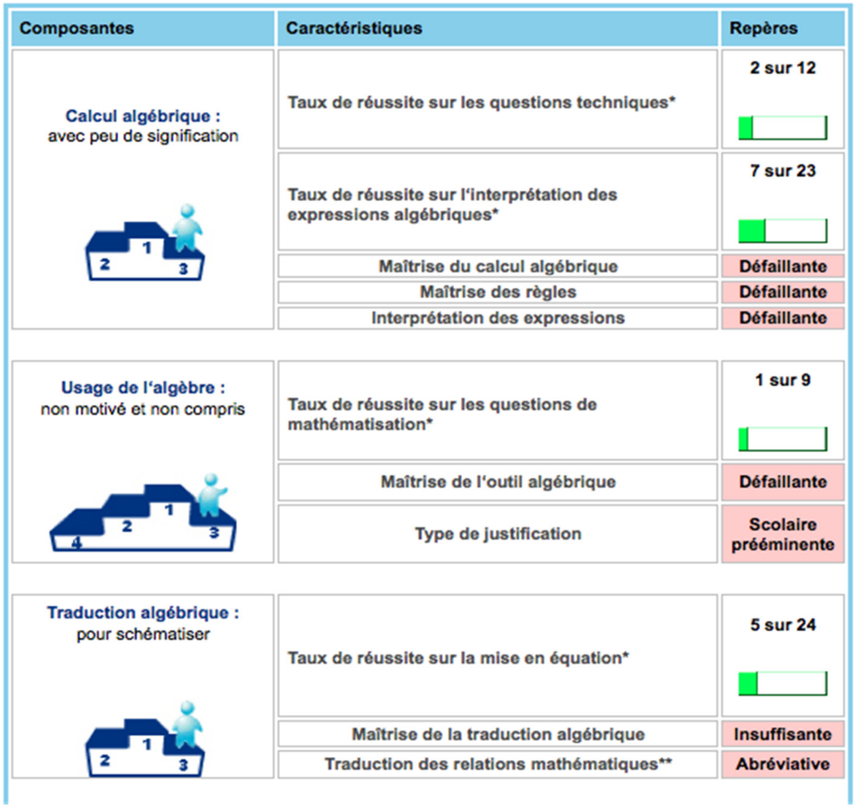
Ces six codes sont-ils pertinents pour transférer le diagnostic à des élèves en classe de 5ème / 4ème ? Il nous est apparu nécessaire de compléter les six codes précédents en leur ajoutant deux nouveaux codes pour étudier l'utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Numériques (EN) et les connaissances sur les Nombres négatifs et décimaux (N). En effet, le code EN a été créé car les connaissances algébriques se construisent à partir des connaissances numériques. C'est la raison pour laquelle les codes EA et EN ont une structure similaire. Or, dans le test initial, nous ne les avons pas distingués. Nous l'illustrons dans les figures 4 et 5.

Le diagnostic local est basé sur l'étude a priori des réponses envisageables et, pour la compléter, sur les réponses anticipées recueillies lors d'expérimentations. L'analyse du corpus des réponses par des didacticiens des mathématiques a permis de réaliser une grille d'analyse. Cette méthode est adaptée pour permettre l'informatisation du diagnostic. Les deux logiciels PépiGen et Pépinière génèrent automatiquement les tâches ainsi que leur analyse en comparant les réponses de l'élève avec les différentes réponses anticipées.

2. *Le deuxième niveau : le diagnostic global individuel*

Le diagnostic global individuel s'effectue sur l'ensemble des dix exercices du test. Le système analyse les réponses de l'élève et calcule son profil cognitif grâce à une analyse transversale des différents codes récoltés sur toutes les réponses au test.

Pour construire le profil cognitif de l'élève, en croisant les approches cognitive et anthropologique, nous avons défini une référence caractérisée par trois composantes à partir de l'étude théorique initiale : l'Usage de l'Algèbre pour résoudre des problèmes (UA), la Traduction Algébrique avec la flexibilité pour traduire différents types de représentations (géométrique, figure, représentations graphiques, langage naturel) (codé TA) et le Calcul Algébrique avec l'habileté et l'adaptabilité des différents usages de l'algèbre (code CA). Pour chacune de ces trois composantes, une échelle avec différents niveaux a été élaborée, avec des critères spécifiques pour chaque niveau (Delozanne & al. 2005). Voici le résultat du diagnostic global individuel pour un élève en classe de 3ème classé en CA3-UA3-TA3 (figure 6). Cet élève donne peu de sens aux activités algébriques et n'utilise pas l'algèbre comme outil pour résoudre des problèmes.



Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : avec peu de signification	Taux de réussite sur les questions techniques*	2 sur 12
	Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques*	7 sur 23
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
	Interprétation des expressions	Défaillante
Usage de l'algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	1 sur 9
	Maîtrise de l'outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : pour schématiser	Taux de réussite sur la mise en équation*	5 sur 24
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante
	Traduction des relations mathématiques**	Abréviative

Figure 6 – *Profil cognitif d'un élève en classe de 3ème*

Pour transférer le diagnostic à d'autres niveaux scolaires, nous avons complété l'algorithme de calcul des profils en ajoutant une quatrième composante destinée à évaluer les différents usages du Calcul Numérique (codé CN). La composante CN a été créée pour prendre en compte que les connaissances algébriques se construisent à partir des connaissances numériques. C'est la raison pour laquelle les niveaux sur les échelles des composantes CA et CN se définissent de manière similaire. Ce test est en cours d'informatisation et nous n'avons pas encore de profils calculés automatiquement.

3. *Le troisième niveau : le diagnostic global collectif*

Les deux premiers niveaux de diagnostic sont individuels. Or, les enseignants ont davantage besoin d'identifier des groupes d'élèves dont les compétences en algèbre sont voisines pour mettre en place des stratégies de différenciation dans leur classe. Pour le troisième niveau de diagnostic, le logiciel PépiMep propose automatiquement trois groupes d'élèves (les groupes A, B et C) dont les profils cognitifs en algèbre sont proches (Grugeon-Allys & al. 2012). Ces groupes sont tout d'abord constitués en fonction du niveau de l'élève sur la composante « Calcul Algébrique » (CA). Les élèves du groupe A (CA1) donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée du calcul algébrique. Les élèves du groupe B (CA2) pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, souvent à l'aveugle, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Les élèves du groupe C (CA3) donnent peu de sens au calcul algébrique. Chaque groupe X est ensuite découpé en deux sous-groupes (X+ ou X-) selon le niveau de l'élève sur la composante « Usage de l'Algèbre » (UA). La figure 7 montre le résultat du diagnostic global collectif d'une classe de 3ème (14-15 ans) dont les 23 élèves sont répartis dans les groupes B+ (1 seul élève), B- (6 élèves) et C- (16 élèves). La référence que nous utilisons est établie pour la fin de la scolarité obligatoire (16 ans) ; c'est pourquoi, pour cette classe d'élèves plus jeunes (14-15 ans), il n'y a aucun élève dans le groupe A.

L'algorithme de calcul des groupes est identique pour tous les niveaux scolaires ; le transfert du diagnostic global collectif ne pose donc aucun problème.

Les trois groupes A, B et C peuvent correspondre, en première lecture, aux groupes des « bons, moyens, faibles » traditionnellement établis par les enseignants. Ils ne sont pas seulement caractérisés par des taux de réussite, des listes d'erreurs ou des capacités à travailler dans un contexte de remédiation local, mais aussi par des traits de plus haut niveau (par exemple un calcul peu contrôlé), donnant une vision globale de leur rapport à l'algèbre. Grâce à une analyse épistémologique, ces traits permettent d'organiser des activités différenciées adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves sur une séquence complète d'enseignement. Ces informations permettent à l'enseignant d'organiser, si nécessaire, des reprises, des moments de travail de la technique, pour poursuivre la construction d'éléments techno-logico théoriques sur des savoirs anciens.

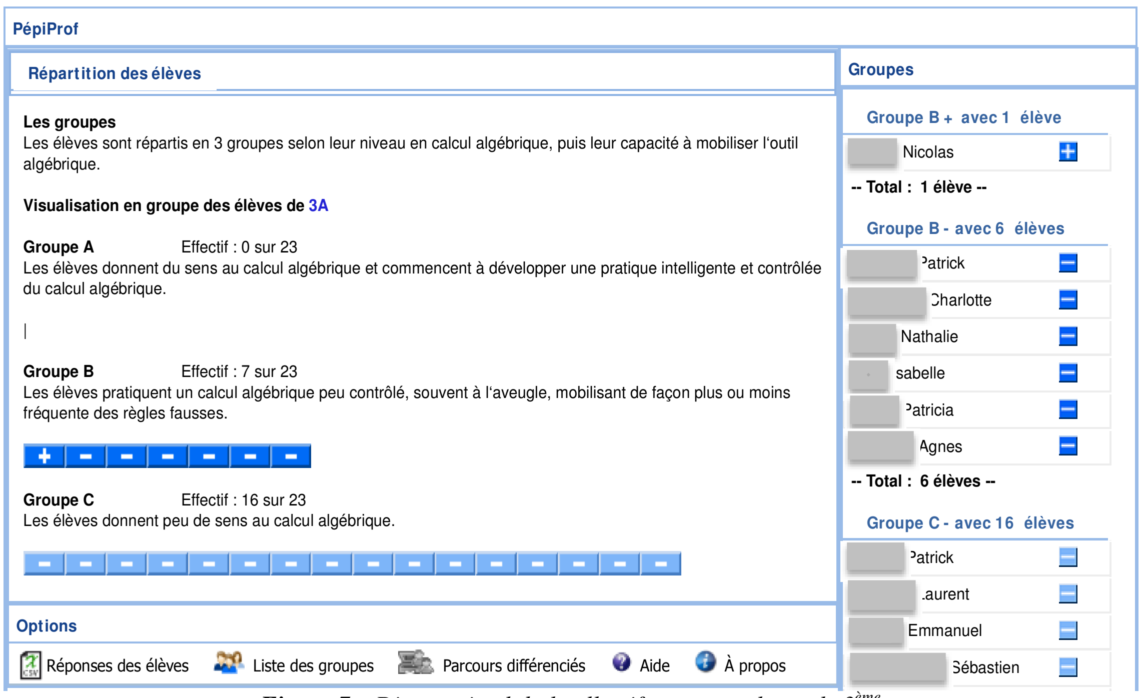


***Figure 7** – Diagnostic global collectif pour une classe de 3ème*

V. LES POTENTIALITES DES TESTS POUR REGULER L'ENSEIGNEMENT

La définition des profils et des groupes offre de réelles potentialités pour permettre aux enseignants de réguler leur enseignement en fonction des besoins de leurs élèves en algèbre. Pour les tests diagnostiques de niveau fin de 3ème / début de 2nde et début de 3ème, nous avons conçu un modèle de parcours d'enseignement différencié (Grugeon-Allys & al. 2012) qui prend appui sur les besoins d'apprentissage caractéristiques de chaque groupe. Les parcours sont conçus pour organiser une gestion de l'hétérogénéité au sein de la classe et non pour intervenir dans un dispositif de personnalisation de l'enseignement. Ainsi, chaque parcours est défini par un objectif d'enseignement et constitué de tâches, pour la plupart convoquant les mêmes types de tâches, qui sont « adaptées » en fonction des groupes issus du test. Le jeu sur les variables didactiques, l'intervention de registres de représentation sémiotiques spécifiques (Duval 1993), les aides apportées par l'enseignant, ou encore le découpage des énoncés, sont autant de variations possibles pour adapter les parcours aux besoins d'apprentissage des élèves. Par exemple, nous avons défini un parcours pour revenir sur le rôle de l'algèbre dans des problèmes de généralisation et de preuve afin de permettre aux élèves des groupes A-, B- et C- de redonner du sens à l'algèbre à travers la résolution de problèmes (Grugeon-Allys & al. 2012).

Dans le cadre d'un groupe IREM de l'Université Paris-Diderot, nous avons travaillé avec des enseignants de collège et de lycée qui ont mis en place les parcours d'enseignement différencié dans leurs classes. L'analyse des vidéos des séances de classe et des productions d'élèves recueillies a montré que l'appropriation du test et des parcours par les enseignants les avaient conduits à faire évoluer leurs pratiques en algèbre tant du point de vue des tâches proposées aux élèves et de leur gestion en classe que du point de vue de leur rapport à l'algèbre et à son enseignement (Pilet & al. 2013). Ainsi, les tests diagnostiques de niveau fin de $3^{ème}$ / début de 2^{nde} et de niveau début de $3^{ème}$ suivis par les parcours d'enseignement différencié ont permis à des enseignants d'organiser leur enseignement en fonction des besoins repérés des élèves.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Différentes études comparant le diagnostic *Pépite* à d'autres formes de diagnostic ont attesté que *Pépite* est fiable et valide, même pour les questions à réponses ouvertes (Delozanne & al. 2008, Delozanne & al. 2010).

Depuis 2011, nous avons implémenté sur LaboMep un test pour les élèves de $3^{ème}$ (14-15 ans) et deux tests pour les élèves de $3^{ème}$ / 2^{nd} (15-16 ans). La programmation informatique pour les questions à choix multiples (QCM) est plus facile que pour les questions à réponse ouverte. En effet, pour les QCM, l'analyse est robuste et générique. Pour les questions à réponses ouvertes, 10 à 15% des réponses ne sont pas analysées par le système en raison de la complexité des raisonnements algébriques mis en œuvre qui nécessiteraient des traitements spécifiques pour chaque type d'exercices. Nous avons réalisé un modèle de tâche diagnostique et nous avons conçu deux tests et leur analyse a priori : l'un pour le niveau $4^{ème}$ / $3^{ème}$ et l'autre pour le niveau $5^{ème}$ / $4^{ème}$. Nous sommes en train de les disséminer sur la plateforme LaboMep et prévoyons de procéder ensuite à des expérimentations.

A partir des fondements théoriques, nous avons défini une échelle de l'activité algébrique, qui permet de suivre l'évolution de la compétence algébrique à différents niveaux scolaires. La figure 8 permet de suivre l'évolution des compétences de 191 élèves qui ont passé les tests implémentés sur LaboMep. Cette figure montre que les compétences des élèves augmentent depuis le début de la classe de $3^{ème}$ jusqu'à la fin de la classe de 2^{nd}. Nous prévoyons d'étendre cette étude pour des élèves depuis la $5^{ème}$ jusqu'en seconde.

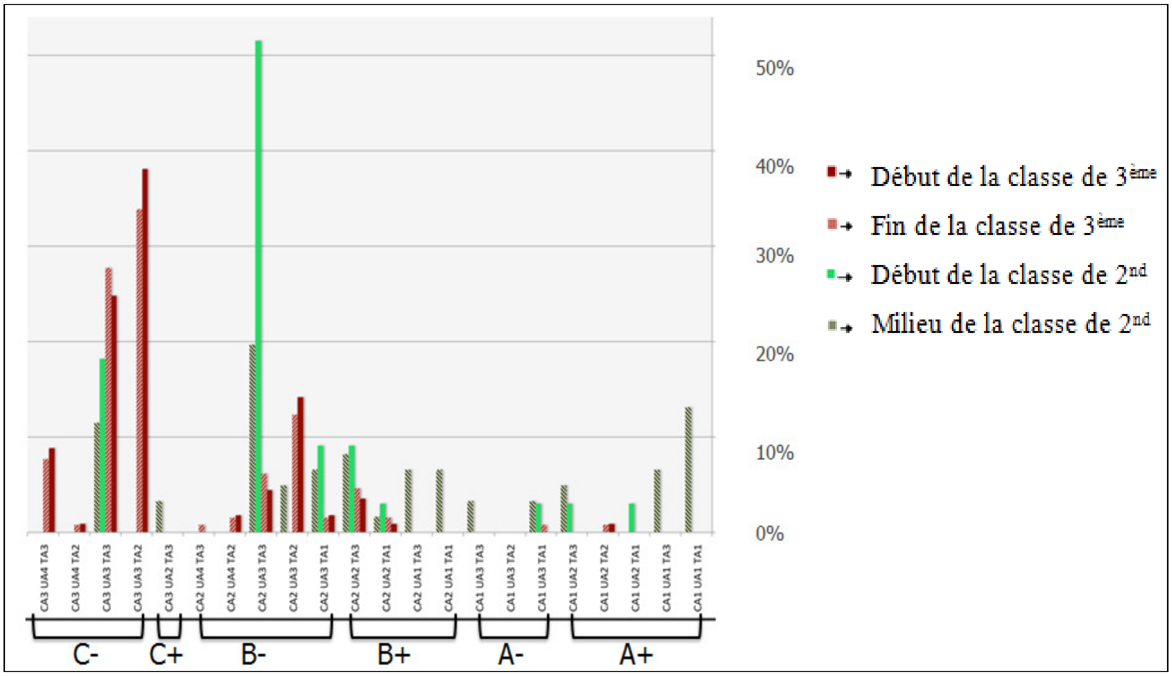
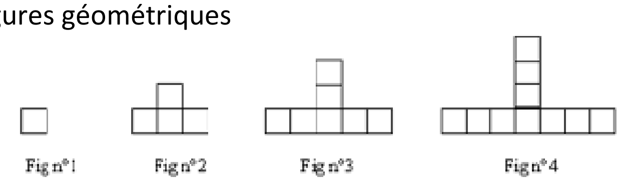


Figure 8 *– Diagnostic collectif global pour des élèves de 3ème/2nd (191 élèves)*

Quelles sont nos perspectives de recherche ? Nous envisageons d'étendre les outils fournissant automatiquement des tâches différenciées à des groupes d'élèves d'une classe en fonction des objectifs d'enseignement. Nous faisons l'hypothèse que, comme pour le transfert des tests, le modèle de parcours d'enseignement différencié est transférable à tous les niveaux scolaires du collège. Par une étude épistémologique, en prenant particulièrement en compte l'entrée dans la pensée algébrique (Pilet & al. 2013), nous allons identifier les objectifs d'enseignement à travailler pour chaque niveau scolaire. Ainsi, nous allons adapter les situations d'apprentissage visant à travailler les aspects épistémologiques des objets de l'algèbre introduits en 5ème et souvent peu suffisamment explicités dans les programmes : sens des lettres dans les problèmes de généralisation, équivalences des expressions (Grugeon-Allys & al. 2012). Cette recherche est déjà engagée dans le cadre du projet LéA du collège Roger Marin du Gard[2].

Voici deux exemples de tâches de généralisation (figure 9 et figure 10). Plusieurs variables permettent d'adapter la tâche aux différents groupes : les schémas, les programmes de calcul, la présence d'outil (tableur).

Voici une suite de figures géométriques



1) Quel sera le nombre de carrés pour la figure numéro 5 et la figure numéro 10 ?
2) Quel sera le nombre de carrés pour la figure numéro 100 ?
3) Et dans le cas d'une figure de numéro quelconque ?

Figure 9 *– Production d'une expression générale*

[2] http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/college-martin-du-Gardl

<table>
<tr><td colspan="3">On donne les trois programmes de calcul suivants</td></tr>
<tr><td>Programme 1
- Choisir un nombre.
- Multiplier ce nombre par 4.
- Ajouter 3 au produit obtenu.</td><td>Programme 2
- Choisir un nombre.
- Multiplier ce nombre par 7.</td><td>Programme 3
- Choisir un nombre.
- Multiplier ce nombre par 4.
- Ajouter au produit obtenu le triple du nombre choisi.</td></tr>
<tr><td colspan="3">On se demande si les programmes sont équivalents.
1) Teste ces trois programmes de calcul avec plusieurs nombres. Tu peux utiliser une calculatrice, un tableur ou un grapheur. Que remarques-tu ?
2) Ecris les trois expressions littérales qui traduisent chaque programme de calcul.
3) Avec ces trois expressions, on peut écrire une égalité toujours vraie. Laquelle ? Justifie.</td></tr>
</table>

Figure 10 *– Equivalence d'expressions littérales*

REFERENCES

Artigue M., Grugeon B., Assude T., Lenfant A. (2001) Teaching and Learning Algebra: approaching complexity trough complementary perspectives. In Chick H., Stacey K., Vincent J. and Vincent J. (Eds.) The future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of 12th ICMI Study Conference. Australia: University of Melbourne.

Artigue M., Gueudet G. (2008) Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, Université d'été de mathématiques, Saint-Flour. http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog_UE_2008.htm

Chenevotot F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009*, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation (827842). Dakar, Sénégal, du 5 au 10 avril 2009.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-265.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* (19), 43-75.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005) From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra, In Richards G. (Ed.) *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005* (pp. 262-269). Chesapeake, VA: AACE.

Delozanne É., Prévit D., Grugeon B., Chenevotot F. (2008) Automatic Multi-criteria Assessment of Open-Ended Questions: a case study in School Algebra. *Proceedings of ITS'2008*, 101-110.

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, 29(8-9 / 2010), 899-938.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7.2, 5-32.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 37-65.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 17.2, 167-210.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (pp. 137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762).

Pilet, J., Chenevotot, F., Grugeon, B., El-Kechaï, N., Delozanne, E. (2013) Bridging diagnosis and learning of elementary algebra using technologies. *In proceedings of the Eighth Congress of the European society for Research in Mathematics Education CERME8* (pp. 2725-2735). Antalya, Turquie.

Pilet, J., El-Kechaï, N., Delozanne, É., Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. (2013) Séances différenciées en algèbre élémentaire : une étude de cas. In Choquet C. et al. (Eds.) *Actes de la conférence EIAH2013* (pp. 5-16), Toulouse, du 29 au 31 mai 2013. IRIT Press 2013 : Toulouse,.

Vergnaud G., Cortes A., Favre-Artigue P. (1988) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M. (Eds) Didactique et Acquisition des Concepts Scientifiques. *Actes du Colloque de Sèvres*, Mai 1987 (pp. 259-279).

Annexe
Extraits des programmes français d'algèbre au collège (2008)

VII. CLASSE DE CINQUIEME (12 – 13 ANS)

1 Organisation et gestion de données, fonctions

Objectifs :

La résolution de problèmes a pour objectifs
• d'affermir la maîtrise des principaux raisonnements qui permettent de traiter les situations de proportionnalité,
• d'initier les élèves au repérage sur une droite graduée ou dans le plan muni d'un repère,
• d'acquérir et interpréter les premiers outils statistiques (organisation et représentation de données, fréquences) utiles dans d'autres disciplines et dans la vie de citoyen, de se familiariser avec des écritures littérales.

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.2. Expressions littérales [Thèmes de convergence]	Utiliser une expression littérale. *Produire une expression littérale.*	De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).

2 Nombres et calculs

Objectifs

La résolution de problèmes a pour objectifs :
• d'entretenir et développer la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ;
• d'assurer la maîtrise des calculs d'expressions numériques sur les nombres décimaux positifs et prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat ;
• d'initier aux nombres relatifs et aux calculs sur les nombres en écriture fractionnaire ;
de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales ;
• d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation, • d'apprendre à effectuer des transformations simples d'écriture ;
• d'initier à la notion d'équation.

2.1 Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers

Connaissances	Capacités	Commentaires
Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités $k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$ dans les deux sens. - * *Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités* $k(a+b)=ka+kb$ *et* $k(a-b)=ka-kb$ *dans les deux sens.*	- Dans le cadre du socle commun il convient de privilégier l'exploitation de cette propriété sur des exemples numériques. *L'intégration des lettres dans ce type d'égalités est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique ou géométrique.*

2.4 Initiation à la notion d'équation

2.4. *Initiation à la notion d'équation*	- **Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.*	Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. *Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.* **La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner.* La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun.

VIII. CLASSE DE QUATRIEME (13 – 14 ANS)

2 Nombres et calculs

La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) permet la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées, l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ainsi que la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe en classe de quatrième, en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

Objectifs

La résolution de problèmes a pour objectifs :
• d'entretenir et d'enrichir la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ;
• d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres relatifs et les expressions numériques ;
• de conduire les raisonnements permettant de traiter diverses situations (issues de la vie courante, des différents champs des mathématiques et des autres disciplines, notamment scientifiques) à l'aide de calculs numériques, d'équations ou d'expressions littérales ;
• de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.

2.2 Calcul littéral

Connaissances	Capacités	Commentaires
2.2. Calcul littéral Développement.	- Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.	L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. Le travail proposé s'articule autour de trois axes : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; - *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers* ; - *utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).*
	- Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$...	*Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et viser un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général).*
	- Développer une expression de la forme $(a + b)(c + d)$.	*L'objectif reste de développer pas à pas puis de réduire l'expression obtenue. Les identités remarquables ne sont pas au programme.* *Les activités de factorisation se limitent aux cas où le facteur commun est du type a, ax ou* x^2.
Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	*- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.*	*Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.* Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

IX. CLASSE DE TROISIEME (14 – 15 ANS)

1 Organisation et gestion de données, fonctions

1.2 Fonction linéaire, fonction affine.

Connaissances	Capacités	Commentaires
Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire.	*- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.*	type « je multiplie par *a* ». *Cette formulation est reliée à* $x \mapsto ax$. Pour des pourcentages d'augmentation ou de

2 Nombres et calculs

La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures :
- maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées ;
- acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ;
- réflexion et initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

Pour le calcul littéral, l'un des objectifs visés est qu'il prenne sa place dans les moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral présente du sens et où il reste simple à effectuer que l'on amène l'élève à recourir à l'écriture algébrique lorsqu'elle est pertinente.

Objectifs

La résolution de problèmes a pour objectifs
• d'entretenir le calcul mental, le calcul à la main et de l'usage raisonnée des calculatrices,
• d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels,
• d'amorcer les calculs sur les radicaux et de poursuivre les calculs sur les puissances,
• de familiariser les élèves aux raisonnements arithmétiques,
• de compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes,
• de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.

2.3 Ecritures littérales

Connaissances	Capacités	Commentaires
Factorisation.	*- Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.*	Les travaux se développent dans trois directions : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; *- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes ;* *- utilisation pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).* *Les activités visent la maîtrise du développement ou de la factorisation d'expressions simples.*
Identités remarquables.	- Connaître les identités: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *- Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.*	Dans le cadre du socle commun, les élèves connaissent l'existence des identités remarquables et doivent savoir les utiliser pour calculer une expression numérique mais aucune mémorisation des formules n'est exigée.

2.4 Equations et inéquations du premier degré

Connaissances	Capacités	Commentaires
2.4. Équations et inéquations du premier degré *Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues.*	*- Mettre en équation un problème.* *- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.* *- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*	La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs, …).
Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits.	*- Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) = 0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*	*L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.*