Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ENSEIGNEMENT DU LOGARITHME AU COLLÈGE ET AU LYCÉE AU CONGO-BRAZZAVILLE :

LA RELATION MATHÉMATIQUE – CHIMIE EN QUESTION

Fernand MALONGA MOUNGABIO*

Résumé - Nous présentons ici quelques éléments d'un travail didactique portant sur la relation mathématiques - chimie pour ce qui concerne le logarithme au niveau des classes de troisième (collège) et terminale scientifique (lycée). Ces éléments concernent l'analyse des programmes et manuels scolaires de mathématiques (2009) et de chimie (éditions 2002). Dans les programmes de mathématiques de collège, une place est accordée au logarithme (mode d'introduction et de traitement) sans que le lien avec la chimie soit explicitement évoqué. Cette analyse montre que la continuité didactique que l'on est en droit d'attendre au regard du programme et des intentions dudit programme se heurte à de nombreux obstacles.

Mots-clefs : Mathématiques, chimie, enseignement, interdisciplinarité

Abstract - We hereby introduce some concepts of a didactic study that is focused on the relationship between mathematics and chemistry in the use of logarithm, both in grade nine (last grade in middle school) and in scientific grade twelve (last grade in high school). We are concerned with the analysis of curricula/programs as well as mathematics and chemistry textbooks (respectively 2009 & 2002 editions). In the middle school mathematics curriculum/program, the concept of logarithm is studied without explicit explanations about the link to chemistry. This analysis shows that the didactical continuity, which is supposed to establish connections between the two programs, faces many obstacles.

Keywords: Mathematics, chemistry, teaching, interdisciplinarity

I. CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE

La volonté d'une mise en relation forte des disciplines scientifiques dans les programmes scolaires de collège et de lycée au Congo, en particulier entre mathématiques et sciences physique, a conduit à des choix de thèmes devant concrétiser cette connexion interdisciplinaire. Concernant la relation mathématiques – chimie, il s'agit de l'introduction du logarithme dès le collège en mathématiques, ceci est en relation avec le calcul du pH en chimie, au collège et au lycée.

L'enseignement des mathématiques se trouve donc face à un double défi :

- Celui d'un changement radical par rapport aux anciens programmes qui n'introduisaient le logarithme en tant que « fonction » qu'en classe de terminale scientifique (lycée). Actuellement, le logarithme est introduit comme nombre dès le

* Université Marien Ngouabi – Congo (Brazzaville)

Malonga Moungabio F. (2015) L'enseignement du logarithme au Collège et au Lycée au Congo-Brazzaville : la relation mathématique –chimie en question. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 490-503.

collège (classe de 4e-8ième année de scolarité). Son traitement comme « fonction » se fait plus tard au lycée.

- Celui du lien avec l'enseignement de la chimie qui utilise le calcul du pH pour définir si un milieu est acide ou basique. Pourtant, l'enseignement de la chimie dans tout le cycle secondaire n'a pas explicitement à son programme l'application de ces objets mathématiques à l'étude de questions extra-mathématiques. Au collège, le lien avec le logarithme n'est pas immédiatement fait. C'est dans le programme de seconde que le pH est défini à l'aide du logarithme décimal. Il incombe au mathématicien de faire le lien avec la chimie.

Cependant la concrétisation d'un tel projet, tant dans l'élaboration des manuels scolaires que dans les pratiques des enseignants, ne peut se faire sans difficultés et conduit à se poser un certain nombre de questions.

Sur l'articulation entre les disciplines :

- Quelle est la place de l'enseignement des mathématiques dans le cours de chimie, et inversement ?
- Comment la relation mathématiques – chimie est-elle mise en œuvre dans les manuels de chacune des deux disciplines ?

Sur la cohérence interne aux mathématiques :

- Existe-t-il un passage du statut *nombre* au statut *fonction* ? Si oui, comment ce passage est-il pris en charge par les programmes et les manuels ? Les connaissances du Collège réapparaissent-elles au Lycée ?
- Les auteurs des programmes et des manuels de Collège peuvent-ils aisément éviter d'utiliser la notion de fonction ?

Nous nous intéressons ici à la manière dont cette approche interdisciplinaire apparaît (ou non) dans les manuels scolaires de mathématiques et de chimie, considérés comme premiers éléments du curriculum réel, au sens de Perrenoud (1993).

Nous présentons dans la partie suivante notre cadre théorique, constitué essentiellement de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999). Nous présentons ensuite, à partir de quelques exemples, une analyse des manuels montrant la place, mais aussi les limites, de la continuité didactique entre les mathématiques et la chimie.

II. PRAXEOLOGIE OU ORGANISATION MATHEMATIQUE

Dans sa théorie anthropologique du didactique, Chevallard (1999) considère que l'analyse de l'activité humaine conduit à dégager des entités minimales, les praxéologies, qu'il désigne par l'organisation (ou la formule) $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où T représente un type de tâches, τ une technique (manière d'accomplir les tâches du type T), θ une technologie (discours qui justifie et rend intelligible la technique τ) et Θ une théorie, technologie de la technologie θ.

Le bloc $[T/\tau]$ y représente la *praxis* (ce qu'il y a à faire et comment le faire), ou la pratique (si l'on regarde plutôt du côté de T), ou le savoir-faire (si l'on regarde plutôt du côté de τ), tandis que $[\theta/\Theta]$ y figure le *logos* (comment penser le faire et comment penser cette pensée du faire), qu'on nomme encore le savoir (si l'on regarde plutôt du côté de θ) ou la théorie (si l'on regarde plutôt du côté de Θ).

En nous appuyant sur ce cadre théorique (praxéologie), nous précisons notre questionnement :

- Quelle articulation entre le champ de référence (chimie) et le champ de traitement (mathématique) ? Quelle place pour les tâches de transition ?
- Le logarithme est-il simplement un objet des mathématiques et un outil pour la chimie, ou bien la praxéologie se joue-t-elle de façon subtile entre les deux disciplines ?
- Y a-t-il continuité didactique dans les concepts, méthodes et représentations entre les mathématiques et la chimie ?

Avant l'analyse des manuels, nous présentons très succinctement quelques éléments de la relation entre les mathématiques et la chimie dans le savoir savant.

III. LES MATHEMATIQUES ET LA CHIMIE DANS LE SAVOIR SAVANT

L'histoire des mathématiques est caractérisée par des phases d'expansion et des phases de consolidation. Dans les phases d'expansion, les mathématiques élargissent le périmètre de leur science en s'attaquant à des problèmes et en élaborant des concepts d'un type nouveau. Cette expansion est souvent irriguée par une problématique issue des relations avec les autres disciplines scientifiques.

L'histoire montre en effet comment les champs scientifiques que sont aujourd'hui les mathématiques et les sciences physiques et chimiques ont fait évoluer la science en se prêtant à un jeu d'échanges dialectiques. Les mathématiques sont considérées comme un *pourvoyeur d'outils* (ou bien *outil*) nécessaires à la compréhension et donc, au développement des autres sciences.

On peut citer le cas, en chimie, de la modélisation moléculaire qui désigne l'ensemble des méthodes de simulation numérique des propriétés de la matière, fondées sur une description atomistique de cette dernière. Dans cette acception, on englobe aussi bien les calculs quantiques *ab initio*, que les représentations simplifiées de la mécanique moléculaire, en passant par la physique statistique numérique.

La cristallographie est un autre domaine de la chimie qui s'appuie fortement sur les mathématiques. En effet, selon Defranceschi, Gracias, Toulhoat et Vidal (2005),

> ce domaine [la cristallographie] est une illustration naturelle et concrète de la théorie des groupes de permutation. L'existence des phases incommensurables et des quasi-cristaux a fait resurgir quelques aspects fondamentaux, parmi lesquels les notions d'invariance et de symétrie (géométrique), dans des perspectives très proches de l'esprit galoisien d'origine. (Op. cité, p. 69)

L'ordre géométrique le plus simple est celui des cristaux périodiques tridimensionnels où un même motif atomique est répété à l'identique dans trois directions. Les outils mathématiques de l'ordre cristallin sont ainsi un groupe abélien de translations qu'on compose avec des rotations et inversion qui constituent la symétrie d'orientation du cristal. Selon Defranceschi et al. (2005), les avancées les plus récentes dans le domaine de la cristallographie concernent :

> - l'extension aux groupes spatiaux à quatre dimensions utilisées pour décrire les structures magnétiques ;
>
> - l'introduction, dans cette communauté, des termes d'orbite, petit groupe, centralisateur, normalisateur, etc., provenant de la théorie d'action de groupe. (Op. cité, p. 81)

En définitive, comme les exemples précédents en ont donné une première idée, les mathématiques sont présentes dans la chimie et cela n'a cessé de se renforcer. Les théories en sciences chimiques s'imprègnent de plus en plus des connaissances mathématiques. Ceci montre bien que les relations entre les deux disciplines occupent une place privilégiée dans le savoir savant. Qu'en est-il dans le savoir enseigné ?

IV. LE LOGARITHME DANS LES PROGRAMMES ET MANUELS DE MATHEMATIQUES

Depuis plusieurs années, la littérature sur les relations entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire et universitaire se multiplie. Diverses réflexions sont menées aussi bien en mathématiques qu'en physique ; elles sont de nature épistémologique et/ou didactique (Malonga Moungabio, Beaufils & Parzysz 2008, Malonga Moungabio 2009, Malonga Moungabio & Beaufils 2010, Bâ 2007, Rodriguez 2007, Mizony 2006, Rogalski 2006, Malafosse, Lerouge & Dusseau 2001, ...)

Cependant, si les relations entre les mathématiques et la chimie occupent une place privilégiée dans le savoir savant (voir plus haut), il existe très peu d'études sur la relation entre l'enseignement des mathématiques et celui de la chimie.

Dans ce qui suit, nous présentons une analyse praxéologique de la relation entre ces deux disciplines autour de l'enseignement de la notion de logarithme décimal au Congo (Brazzaville).

1. Les programmes de collège

Les nouveaux programmes, publiés en 2002 sous l'égide de l'Institut National de Recherche et d'Action Pédagogiques (INRAP), sont structurés en termes d'objectifs généraux « OG » (comportement final de l'élève attendu dans un domaine d'apprentissage) et d'objectifs spécifiques « OS » (niveau de réalisation d'un objectif général). Ces objectifs peuvent être assimilés à la notion de « type de tâches » au sens de Chevallard.

L'objectif général n°1, donné par la tâche « Connaître les nombres », présente les modalités de l'étude du logarithme.

La première rencontre de la notion de logarithme en base dix (couramment logarithme décimal) a lieu dans les programmes de la classe de 4^e^ au Collège (14 ans) : il est étudié comme étant un nouveau nombre à identifier.

> Il s'agit pour l'élève de reconnaître que (…) les logarithmes sont des nombres définis à partir des puissances : on a $a > 0$, $a = 10^n$, alors $\log(a) = n$. (Guide pédagogique[172], p. 36)

La principale tâche de l'élève est de reconnaître que n est le logarithme en base 10 du nombre a.

Cette étude se poursuit en classe de 3^e^ (15 ans) avec pour objectif général, d'effectuer des calculs sur le logarithme en base dix. Le guide pédagogique précise :

> Outre les nombres identifiés en classe antérieure, il est question ici d'insister sur le logarithme en base dix, leur caractéristique et mantisse puis d'aborder les nombres irrationnels. (Guide pédagogique, p. 46)

Ce commentaire laisse entendre que les logarithmes ne sont pas reconnus comme des irrationnels : les seuls irrationnels considérés à ce niveau sont les nombres qui s'écrivent avec le symbole $\sqrt{\ }$.

Les types de tâches attendus ici se rapportent à une identification du logarithme et à la détermination de la caractéristique et de la mantisse. La technique n'est pas explicitée. On peut supposer qu'elle se rapporte à la manipulation des puissances de 10 : elle est donc censée être disponible et accessible à l'élève.
Les programmes de collège ne mentionnent aucun lien avec la chimie.

---
[172] Le guide pédagogique est un document (officiel) d'accompagnement des programmes.

2. *Les programmes de lycée*

La notion de logarithme n'est pas traitée en classe de seconde et première. Elle apparaît dans les programmes de terminale dans la rubrique « Objectif général 3 : Réaliser des activités sur les fonctions et les suites numériques ». Dans ce programme, la fonction logarithme, ainsi que les fonctions exponentielle et puissance, sont traitées comme des fonctions parmi d'autres. Le programme n'indique pas le caractère particulier de ces fonctions.

La fonction logarithme fait l'objet d'une étude globale et locale à l'instar des fonctions numériques étudiées auparavant.

Aucun lien avec l'enseignement de la chimie n'est mentionné dans ce programme.

3. *Les manuels de mathématiques du Collège*

Pour chaque niveau du Collège, un seul manuel de référence, édité chez Nathan, est indiqué dans les programmes. Cependant le manuel de 4e ne couvre pas tout le programme : le logarithme n'y apparaît pas, il est traité dans le manuel de 3e.

Le logarithme est introduit par une activité de lecture et d'utilisation d'un tableau de 20 valeurs de x et de 10^x sans préciser que les valeurs de 10^x sont des valeurs approchées. Dans la suite, un résumé précise que :

> … Pour x strictement positif, $y = \log x$ équivaut donc à écrire $x = 10^y$. (Manuel Nathan 3e, p. 83)

On remarque le changement de position de x et de y dans cette proposition au regard de l'activité mentionnée (qui présentent des valeurs de x et de 10^x). Nous supposons que ce changement de position est à mettre en relation avec la notion de fonction déjà abordée dans les pages précédentes du manuel.

Organisation praxéologique

L'essentiel du travail de l'élève dans ce chapitre est de nature purement calculatoire. Nous avons identifié trois types de tâches que nous appelons ($T1$), ($T2$) et ($T3$).

Type de tâches	*Technique associée*
($T1$) : calculer le logarithme d'un produit	$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
(T2) : calculer le logarithme d'un quotient	$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$, où a et b sont réels strictement positifs
($T3$) : calculer le logarithme d'une puissance	$\log(a^n)=n\log(a)$, a est un réel strictement positif

Tableau 1 *- Types de tâches identifiés dans le manuel Nathan 3e*

Pour chaque type de tâches, une technique donnée sous forme de propriété, est proposée par l'auteur du manuel et accessible à l'élève (voir tableau 1). Pour chaque technique, aucune technologie n'est présentée.

De plus, nous avons identifié deux autres types de tâches associés au calcul du logarithme. Il s'agit des types de tâches

($T4$) : Calculer la caractéristique du logarithme d'un nombre.

($T5$) : Calculer la mantisse du logarithme d'un nombre.

Les techniques sont disponibles.

Pour la tâche (T4), les auteurs du manuel expliquent que si x est un réel strictement positif, on appelle *caractéristique* du logarithme décimal de x la partie entière de ce logarithme. Elle se détermine en examinant l'écriture décimale de x :

> Si $x \geq 1$, alors la caractéristique de $\log(x)$ est n-1, où n est le nombre de chiffres avant la virgule de x.
>
> Si $0 < x < 1$, elle vaut $-p$, où p est le rang (position) de la première décimale non nul - à partir de la virgule - du premier chiffre non nul.

Par exemple, la caractéristique de log(898,12) est 2, celle de log(3,14) est 0, celle de log(0,0071) est -3.

Pour la tâche (T5), les auteurs expliquent que la *mantisse* du logarithme décimal de x désigne la différence entre le logarithme de ce nombre x et la partie entière de ce logarithme, c'est-à-dire sa partie fractionnaire. La mantisse est le réel $\log(x)$ - c, où c est la caractéristique de $\log(x)$. La mantisse est toujours comprise entre 0 et 1 (et différente de 1).

L'activité sur le calcul de la mantisse et de la caractéristique du logarithme décimal d'un nombre peut être considérée comme un réinvestissement des connaissances sur les puissances et l'écriture scientifique d'un nombre. En effet, l'écriture scientifique d'un nombre x est donnée sous la forme de $x = a \times 10^n$ où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (exclu) et n un entier relatif. Puisque $\log(a \times 10^n) = n + \log(a)$ et que la fonction log est croissante, pour tout réel a compris entre 1 et 10 (exclu), $\log(a)$ est compris entre 0 et 1. L'entier relatif n est donc la partie entière de $\log(x)$ et $\log(a)$ la partie décimale à ajouter à n pour obtenir $\log(x)$. La partie entière de $\log(x)$ est bien la *caractéristique* du log. La partie décimale à rajouter à la partie entière est la *mantisse*.

4. Les manuels de mathématiques du lycée

Les programmes de terminale scientifique (C & D) se réfèrent à quatre manuels. Il s'agit du manuel de la Collection InterAfricain de Mathématiques (CIAM) édité chez EDICEF et de trois autres manuels français : Collection TERRACHER (édité chez HACHETTE), Collection DIMATHEME (édité chez DIDIER), Collection FRACTALE (édité chez BORDAS).

Au lycée le logarithme, qui n'apparaît ni dans les programmes de 2[e], ni dans ceux de 1[ère], est étudié en classe de terminale scientifique (séries C & D). Pour l'introduction du logarithme, la collection CIAM présente un contenu proche de celui des programmes de terminale congolais. Il étudie le logarithme avant l'exponentielle, contrairement aux trois manuels français cités plus haut. Conformément aux programmes, le logarithme est introduit comme fonction et l'étude commence par le logarithme népérien. Le logarithme de base quelconque est introduit plus tard. On retrouve les trois premières propriétés (techniques) que nous avons identifiées dans le manuel de collège (voir tableau 1).

L'introduction de la fonction logarithme se fait sans nécessairement faire le lien avec les acquis du collège. Le passage du concept de *nombre* au concept de *fonction* et le changement de notation peuvent ainsi donner lieu, chez l'élève, à la conception de deux objets mathématiques différents.

De plus, aucun lien avec l'enseignement de la chimie n'est mentionné.

V. LE LOGARITHME DANS LES PROGRAMMES ET MANUELS DE CHIMIE

1. Les programmes de collège : classe de troisième

Au collège, dans le programme de chimie de la classe de troisième, le pH est étudié dans la partie qui traite l'objectif général 3, à savoir « Caractériser les solutions aqueuses » :

Objectifs spécifiques	Commentaire	Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	Mode d'évaluation
3.2 Déterminer l'acidité et la basicité des solutions.	Le professeur apprendra aux élèves comment déterminer le pH des solutions, en utilisant toutes les méthodes de mesure du pH : le papier pH, le papier tournesol, les indicateurs colorés et le pH-mètre.	- Montrer aux élèves comment utiliser le papier pH, le papier tournesol, les indicateurs colorés et le pH-mètre. - Demander aux élèves de mesurer le pH de quelques solutions acides et basiques.	Les élèves suivent attentivement Les élèves mesurent le pH de quelques solutions acides et basiques.	Evaluation pratique et écrite

***Figure 1** - Extrait du guide pédagogique des sciences physiques (2010), classe 3e, Objectif 3 p. 75*

Il est précisé que l'évaluation portera avant tout sur la détermination pratique du pH et du titre des solutions acides et basiques, l'idée d'évaluation écrite renvoyant à une modalité fréquente dans les disciplines expérimentales : on pourra donner une description du résultat d'une expérience (couleur du papier pH par exemple) et demander d'écrire la valeur du pH.

Nous remarquons que le pH étant mesuré, le logarithme n'a pas à intervenir. Pourtant cet outil mathématique a déjà été abordé en mathématiques au collège dès la classe de 4e.

2. Les programmes de lycée

Classe de seconde

Dans le programme de seconde, le pH est traité dans l'objectif général 3, sous l'intitulé « Caractériser les acides, les bases et les sels ainsi que leurs solutions (17 heures) ».

Objectifs spécifiques	*Contenus notionnels*
3.3. Déterminer le pH d'une solution.	$pH = - \log [H_3 O^+]$ mesure de pH Papier pH, pH-mètre pH d'une solution acide pH d'une solution basique

***Tableau 2** - Extrait du programme de seconde (2002), p. 72*

On note un changement de point de vue par rapport à la troisième puisque le pH reçoit une définition formelle, faisant cette fois intervenir le logarithme. La détermination du pH d'une solution aqueuse se fait soit en utilisant le papier pH ou le pH-mètre, soit en appliquant la formule pH = - log $[H_3O^+]$[173]. Aucune indication particulière n'est donnée quant à l'utilisation de cette formule ou du lien avec le cours de mathématiques.

On peut remarquer que le programme de seconde est moins explicite que celui de troisième présenté plus haut. Aucun document officiel, servant de guide pédagogique, n'accompagne ce programme.

Classe de première

La notion de pH n'est pas abordée en première.

Classe de terminale C

Le programme de classes de terminale scientifique a été conçu à l'instar des programmes des niveaux inférieurs : il a été écrit par objectifs et est censé tenir compte de la progression de l'ensemble des autres disciplines scientifiques.

Dans ce programme, le lien avec l'enseignement des mathématiques n'est pas immédiat. Cependant, ce programme se propose de :

> Créer progressivement chez l'élève une attitude scientifique, ce qui lui permettra de développer des aptitudes à :
>
> - la démarche scientifique,
> - la transmission de cette démarche scientifique,
> - la maîtrise des moyens et langues de communication,
> - la maîtrise du langage mathématique (interpréter des graphiques, savoir schématiser)
>
> (Extrait du Programme de sciences physiques 2002, p. 75)

Comme on le voit, la relation de l'enseignement de la chimie avec les mathématiques est à peine évoquée. Il nous apparaît important d'examiner la manière dont le langage mathématique apparaît dans les manuels de chimie qui se réfèrent au programme scolaire.

L'objectif général 3 consiste à « Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases (12 heures) » (voir tableau 3).

Il est attendu que les enseignants conduisent les élèves à dégager l'influence des propriétés électriques de l'eau sur la solubilité des composés ioniques et à décrire l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau. Dans les contenus notionnels, le programme prévoit de définir le pH, sans en proposer une définition.

Relativement à notre étude, nous avons identifié un type de tâches, relatif à l'objectif spécifique (3.4) : « Déterminer le pH des solutions aqueuses ».

Pour ce qui concerne les acides et bases faibles, le programme préconise le calcul de Ka et du pKa. A la suite, il propose une méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide ou une base faible en respectant les étapes suivantes : description des différentes étapes – détermination du coefficient de dissociation – établir la relation entre pH et pKa à savoir :

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pKa} + \log \frac{[Base]}{[Acide]}$$

Le programme ne donne aucune indication sur la manière d'obtenir cette formule.

[173] La notation entre crochets représente la concentration, exprimée en moles par litre, ici de l'ion hydronium..

Objectifs spécifiques	*Contenus notionnels*
3.3 Établir l'échelle de pH	Établissement de l'échelle de pH - Définition du pH - pH de l'eau pure - échelle de pH - pH des solutions acides - pH des solutions basiques - Définition du pOH - Relation entre le pH et pOH
3.4 Déterminer le pH de solutions aqueuses.	Détermination du pH des solutions - Cas des acides et des bases faibles ● Ka et pKa des acides faibles, Kb et pKb des bases faibles. ● Méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide faible ou une base faible. * description des différentes étapes * coefficient de dissociation * relation entre pH et pKa ; pH et pKb pH = pKa + log [Base] / [Acide]

Tableau 3 - *Extrait du programme de chimie, classe de terminale C (2002), p. 54*

3. *Les manuels de chimie : classe de Terminale*

Conformément aux programmes de collège et de lycée de chimie, le lien entre le pH et le logarithme n'apparait que dans les manuels de terminale. Nous analysons le principal manuel conforme au programme de terminale C. Il s'agit du manuel édité à l'INRAP en 2009.

Dans ce manuel (INRAP, 2009), les chapitres sont organisés (comme les programmes scolaires) en objectifs généraux et spécifiques. La notion de pH est étudiée dans l'objectif général n°6 « Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases ». Une définition du pH y est proposée :

> IV – Établissement de l'échelle de pH « pouvoir hydrogène »
>
> 1 – Définition du pH
>
> Le pH d'une solution est une grandeur sans unité, égale à l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions hydronium.
>
> Soit pH = - log [H_3O+] d'où [H_3O+] = 10^{-pH}
>
> (Extrait du manuel INRAP 2009, p. 69)

Ka, la constante d'acidité et le pKa sont définis dans le cas des acides et des bases faibles. A partir de l'équation-bilan de la réaction de l'acide AH avec l'eau (figure 2), où AH est un acide et A^- sa base conjuguée, on a à l'état d'équilibre du système : Ka $= \frac{[A^-]\times[H_3\,O^+]}{[AH]}$.

$$AH + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$$

Figure 2 *- Équation bilan*

La définition du pKa est établie par analogie, il en résulte une relation entre pH et pKa :

Par analogie à la définition du pH, nous définissons également le pKa tel que

pKa = -logKa et Ka = 10^{-pKa}

Comme $\text{Ka} = \frac{[A^-]\times[H_3\,O^+]}{[AH]}$.

Soit $\log \text{Ka} = \log[H_3O^+] + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

D'où $-\log \text{Ka} = -\log[H_3O^+] - \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

alors $\text{pKa} = \text{pH} - \log\frac{[A^-]}{[AH]}$ ou $\text{pH} = \text{pKa} + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

(Extrait de manuel INRAP 2009, p. 76)

Par analogie, on définit la constante de basicité du couple Acide/base par la relation : $\text{Kb} = \frac{[Acide]\times[OH^-]}{[Base]}$.

Ensuite, on établit la relation entre le pKb et le pOH : $\text{pOH} = \text{pKb} + \log\frac{[Base]}{[Acide]}$.
La relation entre le pH et le pKa (ou entre le pKb et le pOH) est obtenue à partir de la formule de Ka et de l'une des propriétés algébriques du logarithme étudiée en mathématiques, à savoir : $\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$.

Malgré l'emploi des propriétés du logarithme, aucune référence aux programmes des mathématiques n'est faite dans ce manuel pour justifier les calculs.

4. *Rôle des graphiques dans les relations acido-basiques*

L'étude du dosage acido-basique s'appuie sur une représentation graphique des données expérimentales.

Examinons le cas du dosage de l'acide éthanoïque (acide faible) par l'hydroxyde de sodium (base forte), l'allure de la courbe du pH en fonction du volume de la base est la suivante (voir figure 3).

La courbe présente quatre parties :

- la partie AB où le pH augmente rapidement,
- la partie BC où le pH augmente faiblement,
- la partie CD avec un « saut de pH »,
- la partie DF où le pH croît peu et tend vers une valeur limite.

Cette courbe est obtenue à partir des données expérimentales, on remarquera que le tracé est réalisé en lissant la courbe, il faut aussi supposer que le tracé des tangentes est réalisée de manière graphique (la tangente vue comme droite localement confondue avec la courbe). Elle est vue *a priori*, non pas comme la représentation d'une fonction mathématique, mais comme la représentation d'un phénomène chimique : ici, l'évolution du pH en fonction du volume de la base.

Les manuels en vigueur dans les classes de terminale ne proposent pas la recherche d'une telle fonction. Une activité développée autour de cette recherche devrait permettre non seulement de montrer la force des mathématiques pour modéliser certains phénomènes mais de mieux comprendre les différents moments du dosage acide/base en obligeant les élèves à s'interroger sur ce qui du point de vue du chimiste différencie les différents moments du dosage acide/base.

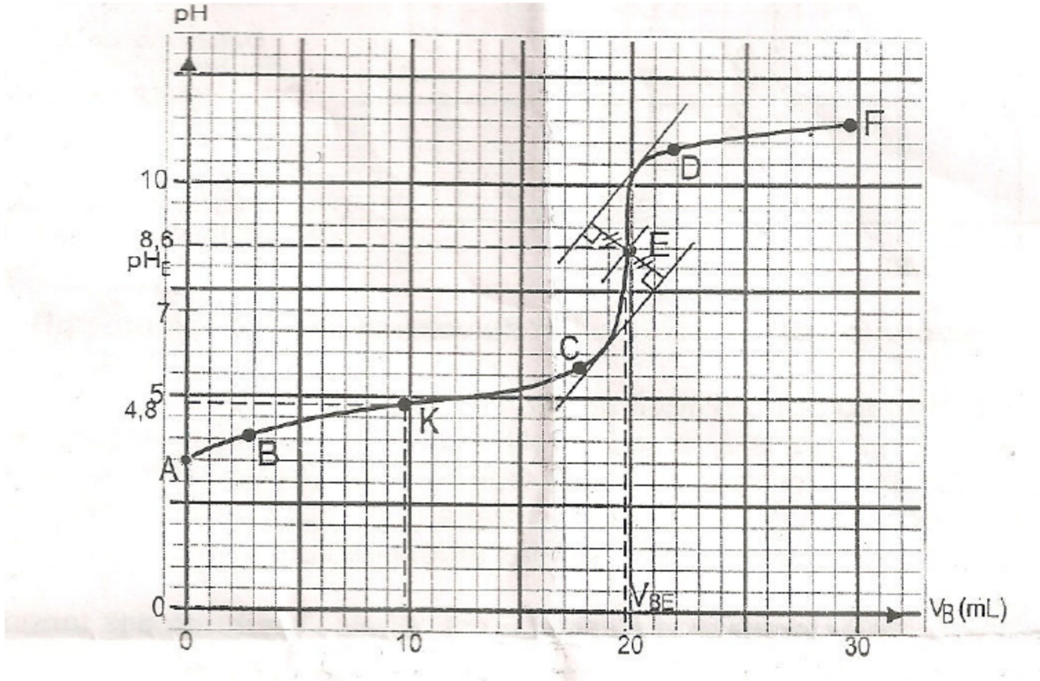

Fig. 9: Variation du pH en fonction du volume de base versé

Figure 3 *- Extrait du manuel INRAP (2009) p. 86*

Au cours de nos différents échanges avec les enseignants de chimie au lycée, nous avons constaté que l'expression d'une telle fonction n'est pas connue des enseignants. Cela leur apparaît peu intéressant car ils arrivent à expliquer le phénomène à partir de la théorie chimique, comme le précise un enseignant :

> la courbe (voir figure 3) permet de conclure que l'acide est consommé au fur et à mesure qu'on rajoute la base. La solution devient basique à partir du point d'équivalence.

Or il suffit d'observer la courbe pour constater que cette affirmation est fausse puisque dès qu'il y a autant d'ions hydroxyde que d'ions hydronium en solution, à 25°C, alors le pH est égal à 7. Le professeur semble distinguer trois phases : une première phase où l'acide n'est pas entièrement consommé, ce qui correspond à la portion AE de la courbe ; une deuxième phase où il y a autant d'ions HO^- que d'ions H_3O^+, c'est le point d'équivalence qui correspond sur la courbe au point E ; une troisième phase où l'acide est entièrement consommé, ce qui correspond à la portion ED de la courbe. Or ce modèle est erroné dans le cas cité car il faut tenir compte du fait qu'interviennent une base faible associée à l'acide faible et une base forte versée.

Nous nous sommes alors intéressés à la nature de la fonction mathématique permettant de modéliser ce phénomène chimique.

5. *Modélisation mathématique de l'évolution du pH*

Nous nous appuyons sur un exemple[174] pour illustrer notre propos. On considère le dosage de l'acide chlorhydrique de concentration C_0 égale à 0,1 mol.L^{-1}, dans un volume V_0 égal à 100 mL, par l'hydroxyde de sodium (soude) de concentration C_b égale à 0,5 mol.L^{-1}.

L'équation du dosage est :

$$Na^+ + HO^- + H_3O^+ + Cl^- \longrightarrow Na^+ + Cl^- + 2H_2O$$

Figure 4 *– Équation du dosage*

Première phase : avant l'équivalence

Le nombre de moles d'ions hydronium (n H_3O^+) contenu initialement dans la solution est égal à $C_0.V_0$ si le volume est exprimé en Litres ; si le volume est exprimé en mL, ce que nous ferons dans la suite, alors c'est un nombre de millimoles que donne cette formule. Numériquement cela fait n H_3O^+ = 0,1×100 soit 10 mmol. Si l'on ajoute un volume V de soude dans la solution d'acide chlorhydrique, le nombre de mmoles d'ions hydroxyde apporté est égal à $C_b.V$. Étant donnée la réaction entre les ions hydronium et les ions hydroxyde pour donner de l'eau, V étant inférieur à Ve (le volume équivalent), on aura un nombre de mmoles d'ions hydronium restant en solution qui sera égal à : $C_0.V_0 – C_bV$. Le volume de la solution étant devenu égal à $V_0 + V$, la concentration des ions hydronium restant en solution sera égale à :

$[H_3O^+] = \frac{C_0.V_0 - C_b.V}{V_0+V}$ d'où l'expression pH $= -\log(\frac{10-0{,}5.V}{100+V})$

V étant la variable, que nous désignons par *x* exprimé en mL, nous avons donc la fonction :

$f_1(x) = -\log(\frac{10-0{,}5.x}{100+x})$ définie sur [0 ; 20[.

Deuxième phase : l'équivalence

On se ramène alors au calcul du pH d'une solution de chlorure de sodium puisque l'acide fort est exactement neutralisé par une base forte. Dans ce cas, le pH à l'équivalence vaut 7 à 25°C. Il faut avoir versé 20mL de base forte, ce que l'on peut écrire mathématiquement par $f_2(x) = 7$ pour x = 20. On peut aussi écrire $f_2(20) = 7$.

Troisième phase : après l'équivalence

On aura versé depuis le départ un volume supérieur à 20 mL pour accéder à cette portion de courbe. Si l'on appelle V ce volume total de soude versée, en mL, le nombre total de mmoles d'ions hydroxyde apportés est égal à $C_b.V$. Comme l'ion hydroxyde réagit avec l'ion hydronium, la quantité de mmoles d'ions hydroxyde en excès sera égale à : $C_b.V - C_0.V_0$.

La concentration des ions hydroxyde lorsqu'on aura versé un volume V de soude dans la solution d'acide chlorhydrique sera alors égale à :

$[HO^-] = \frac{C_b.V - C_0.V_0}{V_0+V}$

Le pH de la solution sera donné en écrivant : pH $= 14 + \log([HO^-])$

Dans l'exemple qui est choisi, il faudra écrire que : pH $= 14 + \log(\frac{0{,}5.V-10}{100+V})$

D'où la fonction : $f_3(x) = 14 + \log(\frac{0{,}5x-10}{100+x})$ définie sur]20 ; +∞[.

On obtient finalement une fonction de raccordement (définie par intervalles).

[174] Ce passage est inspiré du cours mis en ligne par F. Marsal http://marsal.univ-tln.fr/

L’obtention des différentes expressions algébriques de la fonction qui permet de modéliser le phénomène de dosage acido-basique peut conduire à confronter l’expérimentation et certains résultats théoriques. Il serait aussi intéressant de traiter mathématiquement le calcul des coordonnées du point d’équivalence.

Ce travail de recherche d’une expression mathématique permettant de traduire mathématiquement un phénomène chimique est nécessaire et peut être comparé à ce qui se fait en physique lorsqu’on étudie les phénomènes physiques dépendants du temps.

VI. CONCLUSION

Notre étude sur l’enseignement du logarithme en mathématiques a permis de constater deux « statuts » pour le même objet : *nombre* et *fonction*. Nous regrettons le fait que cet enseignement, lacunaire, laisse un vide didactique au niveau du passage du concept de nombre (collège) au concept de *fonction* (au lycée).

Du point de vue de l’articulation mathématiques-chimie, il est clair que l'enseignement du logarithme au Collège est légitimé par l'étude en chimie du phénomène du dosage acido-basique d'une solution aqueuse. Cependant les programmes de chimie ne font pas mention de la nécessité de cet enseignement. Si en classe de 3^e, le pH permet d'évaluer la concentration des ions hydronium présents dans une solution aqueuse, aucune définition ne permet d’en réaliser un calcul impliquant le logarithme et la concentration des ions H_3O^+.

Prenant appui sur l’introduction en seconde d’une définition formelle du pH par le programme de chimie, nous cherchons actuellement à mieux explorer la relation entre les mathématiques et la chimie au lycée et à mettre en place des tâches de transition entre les deux disciplines. Notre souhait est de faire vivre dès le lycée, les interfaces entre les mathématiques et les autres sciences pour assurer une meilleure visibilité des mathématiques et en montrer l’intérêt pour la compréhension des avancées scientifiques et technologiques.

REFERENCES

Bâ C. (2007) *Étude épistémologique et didactique de l’utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique.* Thèse de doctorat (cotutelle). Université Lyon 1 et Université Cheikh Anta Diop – Dakar.

Chevallard Y. (1999) L’analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-265.

Defranceschi M., Gratias D., Toulhoat H., Vidal C. (2005) Mathématiques et sciences chimiques. In Yocooz C. (Ed.) *Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain* (pp. 67-101), *Académie des sciences. Rapport sur la science et la technologie n°20*. Paris : Éditions TEC & DOC.

Malafosse D., Lerouge A., Dusseau J.-M. (2000) Étude en interdisciplinarité des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège: changement de cadre de rationalité. *Didaskalia* 16, 49-60.

Malonga Moungabio F. (2009) Les équations différentielles à l'interface mathématiques - physique : praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminale S. *Recherche en didactique des mathématiques* 29(3), 335-357.

Malonga Moungabio F., Beaufils D. (2010) Modélisation et registres sémiotiques : exemple d'étude de manuels de physique de terminale. *Revue de didactique des sciences et de technologie*, 1(1), 293-316.

Malonga Moungabio F., Beaufils D., Parzysz B. (2008) La méthode d'Euler dans l’enseignement de mathématiques et de physique en terminale S. *Bulletin de l’Union des Physiciens* 907, 1133-1152.

Mizony M. (2006) Relations entre mathématiques et physique, un problème épistémologique. L’héritage de Poincaré : de l’éther à la modélisation. *Repères Irem* 64, 91-111.

Perrenoud P. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (dir.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd’hui* (pp.61-76). Paris : ESF.

Rodriguez R. (2007) *Les équations différentielles comme outils de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématique au lycée : une étude des manuels et de processus de modélisation d’élèves en Terminale S.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier – Grenoble 1.

Rogalski M. (2006) Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs – Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères IREM* 64, 27-48.