Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

APPORTS DE LA PLURALITE DE SYSTÈMES MATHEMATIQUES ANCIENS POUR L'ENSEIGNEMENT

Charlotte DE VARENT*

Résumé – Nous nous intéresserons à l'utilisation de textes mathématiques anciens[163] sur le thème de l'aire du rectangle et notamment à l'intérêt des différents équilibres entre nombres et grandeurs qu'ils offrent. Dans le cadre d'une analyse préalable à une expérimentation utilisant l'histoire des sciences en classe, nous expliciterons comment ils ont influencé notre lecture de manuels scolaires de CM2 (10-11 ans, 5ième année d'élémentaire). Nous nous baserons sur cette analyse pour justifier l'utilisation de l'un de ces textes anciens dans un travail visant l'explicitation et l'approfondissement des thèmes aire et grandeurs avec des élèves de seconde.

Mots-clefs : histoire des mathématiques, grandeurs, aire, interdisciplinarité, ingénierie didactique

Abstract – We are interested in the use of ancient mathematical texts regarding the area of a rectangle, with a focus on the different equilibria that exist between numbers and the quantities they offer. We bring forward the way in which these texts influenced our reading of 10 and 11 year olds' (French "CM2" or fifth grade) textbooks within the framework of a preliminary analysis for an experiment that uses the history of sciences in the classroom. Our analysis should allow us to justify the use of one of these ancient texts in an experimentation intended to clarify and deepen the themes of area and quantities with 15-16 year old students (French "seconde" or tenth grade).

Keywords: history of mathematics, quantities, area, interdisciplinarity, didactic engineering

I. INTRODUCTION ET MÉTHODOLOGIE

Nous nous intéresserons à la justification de l'utilisation de l'histoire des mathématiques anciennes, dans la perspective d'une expérimentation en cours de réalisation en classe de seconde. L'intérêt en a été soulevé maintes fois (Hosson & Schneeberger 2011 ; Guedj, Laube & Savaton 2007) et peut sembler évident : motivation des élèves en classe, approche de la diversité culturelle, meilleur recul sur la nature de la science et le discours scientifique, etc. Cependant, les didacticiens et enseignants intéressés par le sujet ont dégagé une multitude de formes d'utilisation possible des sources historiques (De Hosson 2011, Bernard, Brechenmacher & Husson 2014) et les expérimentations ont révélé qu'elles ont des conséquences variables (Jankvist 2009).

* Université Paris 7 Diderot - ERC SAW - CNRS - SPHERE – en co-direction au LDAR – France – charlotte.dvarent@etu.univ-paris-diderot.fr

[163] La recherche conduisant à ces résultants a reçu un financement du Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013)/ERC Grant agreement n. 269804.

De Varent C. (2015) Apports de la pluralité de systèmes mathématiques anciens pour l'enseignement. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 454-467.

Du point de vue des sources historiques anciennes, nous avons d'abord choisi le thème de la multiplication dans le sens large des situations multiplicatives à plusieurs espaces de mesure qui ne sont pas toujours dépendantes de l'addition itérée (Vergnaud 1990, Roditi 2005). Cela nous a permis de découvrir, dans la lignée du travail mené par le projet « mathematical Sciences in the Ancient World » (SAW dans la suite – voir Saw ERC. Hypothèses », s.d.), diverses propositions d'équilibre nombres/grandeurs dans ces situations multiplicatives, comme les calculs d'aire, de volume, la règle de trois. La spécificité du projet SAW est la mise en valeur de la diversité des solutions mathématiques que les textes offrent sans « coller » une représentation actuelle sur un texte ancien. L'attention portée aux types d'éléments sur lesquels l'algorithme opère à chaque étape et au vocabulaire est l'un des piliers de cette historiographie. Le traitement des unités de mesure (ou leur absence) s'est ainsi révélé être l'une des clés de la diversité des approches mathématiques.

Du point de vue didactique de nombreux travaux sont à l'intersection de la géométrie et des grandeurs, notamment Rogalksi (1985) sur l'acquisition de la bidimensionnalité, Munier et Passelaigue (2012) sur l'importance de l'approche épistémologique des grandeurs mesurées et de la mesure. Les travaux de Chambris (2007, 2009), rappellent l'histoire de la suppression partielle des unités dans les années 1970 en France, en partie réintroduites mais avec un statut qu'elle propose de travailler en lien avec la numération décimale. Sur le thème de l'aire, Douady et Perrin-Glorian (1985, 1989), Perrin-Glorian (1990, 2002) montrent l'importance et la complexité du sujet. Roditi (2005, pp.74-79) rappelle des difficultés importantes à l'entrée en sixième.

Nous travaillons dans le cadre d'une ingénierie didactique (Artigue 1989). Cette méthodologie de l'ingénierie didactique est liée ici à celle, propre à l'utilisation de l'histoire des sciences, d'un dialogue entre les textes anciens, les travaux didactiques et l'analyse de manuels scolaires (Dorier 2006, p.29). C'est ce dialogue (Hosson & Schneeberger 2011 ; Décamp & Hosson 2012) qui nous a permis de cerner des points de diversité qui nous paraissent éclairants, d'interroger en profondeur les concepts de base, grâce au recul que permet la diversité historique. Ces allers-retours constituent pour nous l'analyse préalable, pour laquelle nous développerons l'apport de trois textes mathématiques anciens sur le thème de l'aire du rectangle.

Nous montrerons comment les réponses qu'ils offrent, révélées par les traductions au plus près des notations mathématiques, influencent l'analyse de contenus. Pour cela nous exposerons une grille d'analyse composée de questions qui nous ont permis de lire les manuels scolaires de CM2 (10-11 ans, primaire 5) à la lumière des textes anciens, mettant en évidence certains implicites. Travailler sur le même plan des systèmes mathématiques différents, anciens et actuels, nous a menés à construire des catégories particulières, adopter une approche textuelle et voir les procédures de calcul d'aire comme des algorithmes. Nous justifierons a priori l'utilisation de l'un des textes mathématiques anciens en classe de seconde (15-16 ans, secondaire 5)[164] . Nous faisons en effet l'hypothèse que les différentes variations précisées par cette approche amèneront l'élève à réinterroger ses connaissances sur le thème de l'aire du rectangle.

[164] La classe de seconde a été choisie pour revenir en profondeur sur une notion supposée stabilisée (aire du carré) et permettre la compréhension de la tablette : multiplication en base 60, inverses, système métrologique différent. Le cadre de « l'option découverte histoire des sciences », créée et animée à Levallois-Perret par l'historien des sciences médiévales au CNRS M. Husson, offrait un cadre souple pour ce travail préliminaire, bien que nous n'excluions pas l'inclusion ultérieure dans un cours de mathématiques.

II. PRESENTATION DES TEXTES ANCIENS UTILISES DANS LA RECHERCHE

Précisons ici l'apport théorique du dialogue entre trois textes anciens sélectionnés pour la diversité des réponses qu'ils apportent au thème de l'aire du rectangle et l'étude de manuels scolaires en classe de CM2 (10-11 ans).

- cunéiforme : une tablette de l'école de scribes de Nippur (Proust 2007, pp.190-197),
- chinois : un texte issu de la traduction des *Neuf Chapitres* (Chemla & Guo 2004, pp.153-155),
- sanskrit : un texte issu de la traduction du commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya* (Keller 2006, pp.13-19 vol.1, pp.8-10 vol.2).

1. Un texte cunéiforme

Ce texte nous a semblé révéler un choix mathématique intéressant. Nous étudierons l'exemple de la tablette CBS 11318[165] (Proust 2007, p.191) provenant de l'école de scribes de Nippur.

***Figure 1** – CBS 11318 – Face*

Dans cette tablette (voir tableau 1 pour la traduction de Proust 2007, p.191), il est remarquable que le calcul exprimé dans la traduction en haut à gauche, ne soit pas du type « 1 kuš$_3$ × 1 kuš$_3$ » ou « 1 × 1 » mais « 5 × 5 ».

5 5 25	
	1 kuš$_3$ le côté (du carré). Quelle est sa surface ? Sa surface est 1/3 gin$_2$ 15 še

***Tableau 1**- CBS 11318, Traduction de Proust*

La première étape de la procédure permettant de calculer l'aire d'un carré consiste en effet selon Proust (Op. cité, pp.190-197) à traduire la longueur du côté en « nombres flottants » à

[165] JCS 36,251 (s.d.). Dans CDLI. Repéré le 09 septembre 2014 à : http://www.cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254478

l'aide d'un dictionnaire appelé « table métrologique » (Proust 2005). Celle-ci donne pour une grandeur mesurée son équivalent en nombre flottant. Ici, 1 kuš$_3$ → 5 (la flèche ne figure pas dans le texte historique d'origine). Le 5 obtenu est flottant : c'est un élément sur lequel il est possible de calculer sans connaître l'ordre de grandeur. Il est exprimé dans un système numérique similaire à notre notation des heures-minutes, le SPVN (notation sexagésimale positionnelle). Mais en SPVN, bien que chaque position soit soixante fois supérieure à la précédente, on ne sait pas quelle puissance de 60 possède la toute première position donc il est impossible de connaître l'ordre de grandeur du nombre. Les longueurs comme 1 kuš$_3$, par contre (et les mesures en général), sont exprimées dans un système numérique qui n'est pas « flottant », comme c'est le cas dans notre système numérique.

Pour calculer l'aire du carré, le nombre flottant 5 ainsi obtenu grâce à la table métrologique est multiplié par lui-même. Il faut alors « convertir le résultat (ici 25) en surface » à l'aide de la table métrologique des surfaces[166], qui possède pour chaque mesure d'aire (à gauche) un équivalent en nombre flottant (à droite). Ici 25 est donc converti en « 1/3 gin$_2$ 15 še ». Ainsi le choix est fait de ne pas calculer sur des grandeurs (comme 1 kuš$_3$) mais sur des nombres flottants (comme 5). La gestion des espaces de mesure entrant en jeu dans le calcul de l'aire du carré paraît ainsi être faite par une séparation nette, la conversion (ou « traduction ») permettant de passer de l'un à l'autre. De même cette conversion permettra pour le cas de la règle de trois, de faire communiquer les différentes sortes de grandeurs en jeu. Cette conversion est nettement moins visible dans le système français actuel du fait de l'homogénéité des facteurs entre unités de mesure, ainsi que de l'utilisation des mêmes notations pour les nombres à calculer et les grandeurs.

2. *Le texte chinois*

Ce texte apporte une autre réponse sur le thème de l'aire du rectangle, quant au traitement des unités de mesure. En effet si la longueur d'un rectangle est en unité de mesure LI, le résultat du calcul d'aire sera en « LI du produit ». Selon une hypothèse suggérée par Chemla, il s'agit peut-être d'une transformation géométrique du rectangle en une « bande rectangulaire unité ». Si le rectangle est de 3 LI de longueur et 2 LI de largeur comme le propose l'un des exemples du texte, alors la bande rectangulaire unité serait de 6 LI du produit de longueur et de 1 LI de largeur (figure 2)

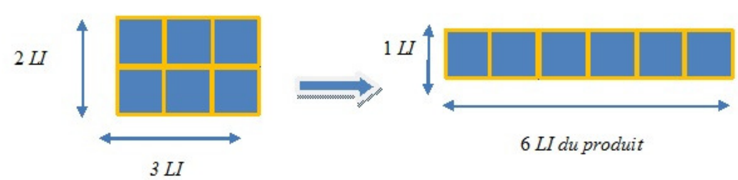

***Figure 2**- Transformation en bande rectangulaire*

[166] Pour expliquer le « nombre flottant », nous pouvons faire l'analogie avec les résultats intermédiaires de la multiplication posée (avant addition) de nombres décimaux actuellement utilisée en France. En effet ces derniers servent à calculer, à être les arguments d'un algorithme de multiplication ou d'inversion, sans se soucier provisoirement de la position de l'unité. La « conversion » depuis le nombre flottant se fait de manière implicite, probablement au moment où la virgule est positionnée après l'addition, puisqu'ainsi est rétabli l'ordre de grandeur.

Ensuite, la procédure précise qu'il faut convertir les LI du produit obtenus en unités de mesure MU si le nombre de LI est suffisant. Le MU est par ailleurs une unité qui n'est jamais une unité de longueur, il n'y a donc pas de MU du produit. Peut-être est-ce le moment où l'on quitte l'interprétation géométrique de l'unité de mesure pour une unité de mesure de statut différent. Cette relation entre les LI du produit et les MU nous a donné à réfléchir sur l'articulation entre « unité de mesure géométrique » et « unité de mesure arithmétique ».

3. *Le texte sanskrit*

Enfin, un troisième texte sur ce thème, issu du commentaire de Bhāskara (629) sur l'*Āryabhaṭīya* d'Āryabhaṭa est frappant par son absence d'unités de mesure. Dans le commentaire, il s'agit d'un algorithme pour élever des « quantités » (nombres avec partie entière et partie fractionnaire) au carré, avec des exemples numériques sans unité de mesure. En revanche, l'introduction de Bhāskara au traité de l'*Āryabhaṭīya*, nous indique qu'arithmétique et géométrie sont deux facettes d'un même monde. L'algorithme est directement présenté après une discussion géométrique sur la définition du carré ce qui laisse entrevoir un possible lien conceptuel entre les deux parties du texte, cristallisé notamment par le double sens du mot sanskrit « *phala* », signifiant à la fois « l'aire » et « le résultat » (après élévation au carré). D'autre part le commentateur Bhāskara annonce qu'ici l'algorithme est réalisé sur des « quantités », nombres auxquels il est facile d'apposer une unité de mesure, sans qu'il soit besoin de faire une étape de « conversion » si l'on souhaite appliquer cet algorithme à un exemple géométrique. L'ordre de grandeur n'est jamais perdu contrairement à l'exemple cunéiforme.

4. *Un bilan préalable au passage à l'enseignement*

Dans le texte en chinois, le changement de dimension paraît être géré par le passage à une surface intermédiaire qui fait un lien clair entre la multiplication issue de la mesure des côtés de rectangle et l'unité de surface. Cette solution nous semble apporter un pont intéressant entre « l'activité découverte » et la formule. Cela nous a conduits à nous intéresser au statut de l'unité de mesure cm^2 à chaque étape du manuel scolaire : comment le lien est-il fait entre unité de mesure représentée géométriquement et unité de mesure servant dans l'analyse dimensionnelle ? La question de la distinction entre : nombre à calculer (par exemple, des résultats intermédiaires), grandeur mesurée, quantité, est peut-être plus délicate dans un système comme le nôtre (et celui de Bhāskara) que dans un système cunéiforme où nombres flottants et grandeurs mesurées sont séparés et où les conversions entre les éléments sont apparentes. Cela nous a conduits à regarder précisément l'étape « d'apposition » de l'unité de mesure dans l'introduction de la formule des manuels scolaires. D'autre part, si le texte sanskrit est effectivement lu comme étant géométrique et arithmétique à la fois, le vocabulaire porte un double sens. Que veulent dire réellement les mots qu'emploient les auteurs de manuels? Sont-ils géométriques, arithmétiques, ou les deux ? Le vocabulaire est-il, comme dans les textes anciens, l'ultime trace de phases non explicitées ? Quelles sont les conséquences pour l'élève de ces implicites langagiers ?

III. ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES A LA LUMIERE DE CES TEXTES

Ainsi, la diversité proposée par ces trois exemples anciens nous semble illustrer différentes réponses à un même problème mathématique (de Hosson & Chorlay à paraître). Nous avons fait l'hypothèse que cette diversité est intéressante pour l'analyse de contenus. Il s'agissait de comprendre quelle réponse les manuels proposaient, dans cette situation didactique donnée, sur le même plan que les textes anciens. Pour permettre ce dialogue avec le passé, il fallait s'attacher à une grille d'analyse textuelle commune des éléments explicitement présents à l'écrit. Nous sommes conscients que du manuel aux pratiques, il y a un fossé plus ou moins grand selon l'enseignant.

Nous nous centrons ici sur cinq manuels scolaires déjà étudiés parmi treize, ils introduisent l'aire du rectangle en CM2. Le passage de l'activité « découverte » du manuel (justifiant pour l'élève la procédure de calcul d'aire) à l'institutionnalisation (se traduisant généralement par une formule de type « L × l », avec ou sans application à un exemple) a été au cœur de notre intérêt. Nous tenterons ici de donner les grandes lignes des résultats de cette analyse.

1. Une première analyse globale

La première impression qui se dégage est celle de l'homogénéité. L'activité découverte de cette séquence consiste généralement à compter des carrés-unités d'un centimètre de côté à l'intérieur de surfaces parfois originales, puis de rectangles et de carrés.

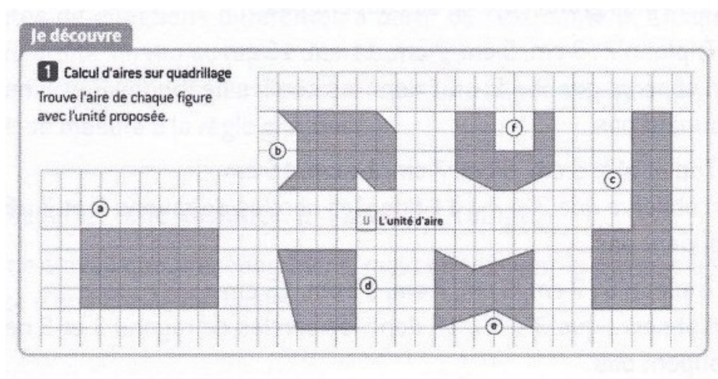

Figure 3 *– Compte de carreaux dans l'activité découverte (La clé des maths*[167]*)*

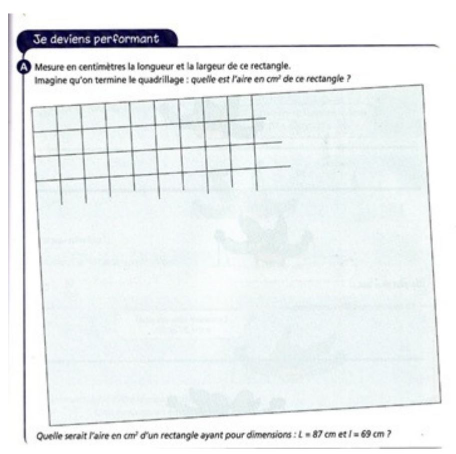

Figure 4 *– Compte de carreaux dans l'activité découverte (J'apprends les maths*[168]*)*

Tous les manuels analysés présentent l'utilisation d'une telle grille pour introduire la formule de l'aire du rectangle ou du carré (exemple figure 3). L'activité découverte amène l'élève

[167] *La clé des maths*, Séquence 39 sur 72 en période 3 sur 5, p.94.
[168] *J'apprends les maths*, séquence 47 sur 119 en période 2 sur 4, p.75.

(plus ou moins explicitement selon les cas) à réaliser qu'il est plus rapide de multiplier le nombre de carreaux de la longueur par le nombre de carreaux de la largeur que de compter les carreaux un à un. Il faut ensuite passer directement à la mesure des côtés à la règle, qui amène la formule. Cette dernière étape de mesure n'est en fait explicitement liée au compte de carreaux sur une ligne que dans 1/5 du manuel, *J'apprends les maths* (figure 4).

La formule « L×l » est alors introduite dans un encadré, dans 4/5 manuels, avec parfois un exemple précis d'application.

2. *Analyser à la lumière des textes anciens*

Pour dépasser ce sentiment premier d'homogénéité et en nous fondant sur la diversité des réponses présentes dans les sources anciennes, nous avons décidé de regarder les différents éléments, listés dans le tableau 2. Celui-ci explicite d'une part le lien entre le choix des critères et les textes anciens, d'autre part le lien entre ces critères et la méthodologie d'étude textuelle provenant de l'histoire (pouvant rejoindre l'analyse de contenus didactique). Il précise enfin si le critère a pu être appliqué à l'analyse des textes anciens eux-mêmes pour faciliter le dialogue.

Critère ou question adressé(e) aux manuels	Inspiré par le texte…	Méthodologie provenant de l'Histoire	Critère similaire appliqué aux textes anciens
Détail de l'algorithme associé à l'activité découverte et de l'algorithme associé à la formule (et son application à un exemple)	cunéiforme notamment (du fait de la différence explicite avec notre méthode et de l'explicitation des éléments sur lesquels on opère à chaque étape de l'algorithme dans ce texte)	Oui : attention portée aux procédures	OUI
Sur quel type d'élément est faite l'opération à chaque étape de l'algorithme ? (ex : mesure d'un côté exprimée par un nombre et une unité de mesure, nombre seul issu d'une mesure, nombre issu d'un compte de carreaux, élément implicite pouvant représenter les deux, etc.)	cunéiforme (du fait des nombres flottants pour les calculs/non flottants pour les mesures)	Oui : les éléments sur lesquels on opère sont des indices importants lorsqu'il faut naviguer dans des systèmes de mathématiques différents sans pouvoir interroger l'auteur	OUI
Type d'unité de mesure utilisé à chaque étape de l'algorithme (ex : carreau géométrique ou unité de mesure sur laquelle il est possible d'opérer une multiplication)	chinois (unité de mesure « LI du produit » qui fait référence à une transformation géométrique liée à la longueur d'un rectangle « bande », servant de transition)	Oui : -Attention portée aux traces écrites -Hypothèse de la « bande unité »	OUI

Gestion des étalons de mesure de dimensions 1 et 2 : -> a conduit premièrement : à la mise en évidence de trois phases (plus ou moins implicites selon les manuels) 1) compte de carreaux-unité un à un (activité découverte) 2) multiplication « nb de carreaux sur une ligne » × « nb de carreaux sur une colonne » (activité découverte) 3) mesure du côté pour connaître le nombre de carreaux (très souvent implicite) ->a conduit deuxièmement : à réaliser que chaque formule semble selon le manuel faire référence à une des trois phases selon la façon dont elle est exprimée	en cunéiforme (explicitation d'une proposition de transition entre mesures de longueur et mesures de surface par ce texte) en chinois (transition par les « li du produit »)	Oui pour le « deuxièmement » : attention particulière aux indices textuels mathématiques	OUI
Gestion/explicitation de « l'apposition » du terme « cm^2 » au moment de l'application de la formule à un exemple	comparaison du texte en cunéiforme par contraste avec le texte en sanskrit (utilisant des nombres sans unités de mesure auxquels il est facile d'apposer une unité de mesure après le calcul)		NON
Étude du vocabulaire à chaque étape (ex : traces de vocabulaire géométrique au moment de l'application de la formule), ce qui est réellement écrit, ce qui est sous-entendu	en sanskrit (traces du lien avec la géométrie dans une procédure arithmétique)	Attention particulière aux indices textuels pour chercher des indices de la pensée de l'auteur / du fonctionnement du système mathématique	OUI

***Tableau 2** – Grille d'analyse venant des textes anciens*

3. *Analyse en terme d'algorithme*

La décomposition en termes d'algorithmes a permis de mieux repérer les phases possibles (détaillées plus loin) dans la transition de l'activité découverte vers la formule, et de remarquer le degré d'explicitation des éléments sur lesquels l'algorithme opère à chaque étape. Nous y reviendrons. Par souci de synthèse nous ne donnerons pas ici les décompositions pour chaque manuel mais seulement une « moyenne ».

Algorithme associé à l'activité découverte	Algorithme associé à la formule lors de l'institutionnalisation	Algorithme associé à la tablette cunéiforme
Choisir un étalon (le carreau cm^2) -> *fait par le manuel* L'étape de choix de l'étalon est plus ou moins implicite selon les manuels, mais les séquences précédentes travaillent généralement sur le choix d'une unité géométrique « u » et l'expression de l'aire en fonction de l'unité « u » choisie.	Le choix de l'étalon est effacé (il faudrait s'en souvenir)	Le choix de l'étalon est effacé dans la tablette[169]
Compter le nombre de carreaux sur une ligne (ex : 3)	Mesurer un côté en centimètres : ex : 3 ou 3 cm selon les manuels (correspond implicitement à donner le nombre de carreaux d'1 cm^2 sur une ligne).	L'énoncé donne « le côté » du carré, 1 kuš$_3$
La transformation du résultat du compte de carreaux en nombre à calculer est inexistante	La transformation de la mesure du côté en élément (nombre de carreaux ? valeur issue d'une mesure ? nombre à calculer ?) est inexistante ou effacée par le système numérique	Le côté du carré est transformé en nombre flottant à l'aide d'une table métrologique : 5.
Multiplication du nombre de carreaux sur une ligne par lui-même *3 × 3 = 9*	Multiplier l'élément par lui-même (il n'est pas précisé s'il s'agit du nombre de carreaux, d'une valeur issue de la mesure, d'une mesure, d'un nombre à calculer, etc.) *« 3 × 3 = 9 », ou : « 3 cm ×3 cm = 9* cm^2 *»* *ou : « 3 × 3 = 9* cm^2 *»*	Multiplier le nombre flottant par lui-même 5 5 25
Le nombre de carreaux donné est le nombre de cm^2 La transformation du résultat de la multiplication en mesure d'aire se fait par l'apposition du terme cm^2 après l'égalité ou dans la phrase réponse. Ici cette apposition prend un sens géométrique : il y a par exemple 9 carreaux (resp. 9 « u »), les carreaux « sont [170]» des cm^2 (resp. des « u ») donc il y a 9 cm^2 (resp. « 9 u »)	La transformation du résultat de la multiplication en mesure d'aire se fait par l'apposition seule du terme cm^2 après l'égalité ou dans la phrase réponse. Elle ne peut prendre un sens géométrique facilement s'il n'est pas fait de lien entre la mesure du côté en centimètres (dimension 1) et le carreau cm^2 (dimension 2).	Convertir le résultat en « surface » 1/3 gin$_2$ 15 še

***Tableau 3**- Algorithmes associés*

4. Analyse en terme de phases de la progression

Si l'on considère trois phases :

1) compte de carreaux un à un,

2) multiplication du nombre de carreaux sur une ligne par le nombre de carreaux sur une colonne pour trouver le nombre total de carreaux,

3) mesure des côtés pour trouver le nombre de carreaux sur une ligne et une colonne,

[169] Nous présenterons ultérieurement des textes cunéiformes plus anciens où la surface est décomposée selon des étalons standards.

[170] L'étalon de dimension 2 « u » étant une portion de surface décomposant la surface à mesurer, « u » prend un double statut de surface et d'unité de mesure d'aire, son statut est donc ambigu et par extension celui du cm^2 aussi.

le rapport qui unit les phases 2 et 3 est explicite dans 1/5 manuels seulement. La gestion des espaces de mesure est donc le plus souvent implicite et pourrait créer un conflit d'interprétation entre la formule de type « cm × cm » qui fait intervenir la dimension 1 et l'activité découverte utilisant des carreaux de dimension 2.

Manuel	Phase 1	Phase 2	Phase 1 ou 2	Phase 3
Pour comprendre les maths	Non, pas explicitement	Non, pas explicitement	Non, pas explicitement mais réalise peut-être la phase 1 (ou 2), étant donné la présence d'une grille	Non (même dans le livre du maître)
Vivre les maths	Oui (livre du maître)	Oui (livre du maître)		Non, pas explicitement
La clé des maths			Oui : le livre du maître évoque le « dénombrement ».	Non, pas explicitement
EuroMaths			Oui : le livre du maître évoque le « dénombrement ».	Non, il est demandé de prévoir l'aire d'un carré sans utiliser de quadrillage pour faire le lien entre l'aire du carré et la dimension du côté, ce qui pourrait correspondre à la phase 3. Un cm^2 valant quatre carreaux, il faut explicitement chercher l'étalon choisi, ce qui conduit peut-être à favoriser la phase 3.
J'apprends les maths	Non, la phase 1 n'est pas évoquée (mais ce manuel, comme d'autres, utilise la vision grille pour la multiplication depuis l'introduction de cette notion).	Non, car la phase 2 est rendue impossible intentionnellement pour conduire à la phase 3.		Oui : effacement de la grille qui impose la mesure du côté *pour* connaître le nombre de carreaux.

***Tableau 4** – Explicitation des phases selon les manuels*

A chaque étape les éléments sur lesquels l'algorithme de la formule opère la multiplication sont implicites. Cet implicite peut être géré plus ou moins positivement si les phases 2 et 3 sont (ou non) articulées explicitement dans le manuel. Il semble que les formules portent une trace de l'activité découverte (comptage de carreaux) ou de la mesure à la règle (ou les deux), ou bien d'une conversion de nombre à calculer en grandeur mesurée (ce pourrait être le cas d'une notation semi-séparative « $5 \times 4 = 20\ cm^2$ »), sans que ce choix soit expliqué dans le manuel ou le livre du maître et sans que le lien entre formule et activité découverte soit toujours possible du fait de la non explicitation de la phase 3.

5. Représentation de l'unité de mesure et apposition du terme cm^2

Dans tous les manuels, une introduction « géométrique » du cm^2, de type : « 1 cm^2 est l'aire d'un carré de 1 cm de côté » est donnée dans l'activité découverte. Mais dans la formule, il semble que son statut change. La formule notée « 5 cm × 4 cm = 20 cm^2 » par exemple, pourrait donner l'impression de multiplier des unités de mesure « cm » comme dans la notation : « cm × cm = cm^2 ». Or la possibilité factice de « multiplier » des « notations d'unités de mesure », liée à l'homogénéité de l'équation, est utile notamment en physique (Chevallard & Bosch 2001) pour vérifier des écritures de résultats mettant en jeu un grand nombre d'unités de mesure. Mais elle est sans réalité multiplicative géométrique (ou indirectement) et n'est pas introduite explicitement. L'unité de mesure passe donc dans cet exemple d'un statut quasi-géométrique (un carreau) à un statut « arithmétique » (un élément sur lequel on peut opérer), sans que ce soit explicité. Cette double conception n'est pas introduite comme telle dans le livre du maître. D'autres présentations (formules de type séparative : « A = 38 × 29 = 1102, 1102 cm^2 » ou semi-séparative : « A = 38 × 29 = 1102 cm^2 ») ne semblent pas non plus rendre limpide le lien à l'activité découverte. Elle n'explicite pas sur quoi opère l'élève, qui finira, faute de phase 3, par lier 38 à la mesure du côté, qu'il doit faire à chaque utilisation de la formule. Sans rejeter les trois types de notations, il est toutefois notable qu'elles ne soient nulle part explicitées, d'une part, et qu'elles donnent lieu à un conflit possible avec l'activité qui doit justement donner sens à la formule, d'autre part.

C'est l'unité de mesure qui semble porter la trace d'une transition entre étalons de dimension 2 et 1 qui parfois est à la charge seule de l'élève. La justification de l'apposition de l'unité cm^2 dans l'application de la formule est faite dans 2/5 manuels par un argument d'homogénéité du type : « si l'unité est en cm, le résultat sera en cm^2 ». L'un des deux spécifie même qu'il faut utiliser « la même unité » qu'au départ, bon exemple de l'ambiguïté régnante. Les autres manuels ne donnent pas de raison. Pour l'élève, est-il possible de créer une représentation géométrique erronée pour correspondre mieux à la formule ?

IV. CONCLUSION ET AUTRES QUESTIONS

Pour cette introduction d'une formule algébrique, il semble donc que les difficultés soient cumulées : représenter un nombre quelconque par une lettre, faire le lien entre la formule, le compte de carreaux de dimension 2 et la mesure à la règle d'étalons de dimension 1, utiliser une unité de mesure qui a une réalité « géométrique » et « arithmétique », opérer sur des éléments qui ne sont pas spécifiés clairement (nombre, grandeurs, carreaux ?). Le risque de conflit de représentation entre l'activité et la formule pouvant mener à une difficulté à donner du sens à cette dernière apparaît. Ces résultats nous semblent rejoindre et compléter les précédents travaux sur ce thème, en mettant particulièrement en avant l'importance d'un travail épistémologique de fond sur la métrologie en géométrie. Il nous semble que les parties distinguées par M-J. Perrin (1990) que sont les pôles géométrie (les surfaces comme parties du plan), grandeur (l'aire comme concept indépendant de la surface et de sa mesure), numérique (les mesures d'aires) sont maintenant travaillés en partie selon les manuels, l'influence des travaux didactiques se faisant sentir peu à peu. Nous remarquons notamment souvent des activités sur la distinction aire/périmètre, des découpages-recollement, l'utilisation d'un étalon quelconque « u » précédant l'étalon cm^2. En revanche, la présente analyse nous paraît mettre en valeur l'appartenance de l'unité de mesure à plusieurs pôles, sans explicitation. Celle-ci peut avoir une surface, une aire, une mesure d'aire et servir de mesure d'aire en étant une surface. Elle appartient aussi à un pôle « arithmétique » puisqu'elle paraît « multipliable » (cm × cm) ou produit d'une multiplication (cm × cm = cm^2). Les pôles qui ont pu faire l'objet de distinction au préalable nous semblent souvent mélangés du point de vue de la métrologie et au moment de l'institutionnalisation (formule) lorsque le lien entre les phases 2 et 3 n'est pas explicite.

La grille d'analyse issue du travail avec les sources anciennes a permis, grâce à la diversité mathématique et le traitement des grandeurs mesurées qu'ils apportent, de mettre en valeur l'importance et la possibilité d'un travail centré sur la métrologie dans les manuels. Le multiple statut des unités de mesure et l'introduction de la métrologie en géométrie comme en algèbre nous paraît être un aspect essentiel ignoré des livres du maître. Pourtant, il est au cœur de nombreuses applications de la géométrie et du lien entre mathématiques et physique. Les textes anciens, du fait de la place accordée au système métrologique et de la représentation de l'unité de mesure, proposent des solutions intéressantes qui nous semblent pouvoir servir à une réflexion de fond, en didactique comme en formation des enseignants.

D'autre part, la prise de conscience des implicites, permise par les textes anciens justifie l'hypothèse qu'utiliser ceux-ci avec les élèves pour revenir en profondeur sur les notions et les mettre en position « d'analyse de contenus » peut être intéressant. En ce sens, nous nous rapprochons de l'effet de réorientation souligné par Jahnke, Acarvi, Barbin, Bekken, Furinghetti., El Idrissi, da Silva et Weeks (2000). L'utilisation de la tablette cunéiforme nous a paru pouvoir apporter de nouvelles questions ou une meilleure compréhension de la situation et de sa part d'implicite.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281-308.

Bernard A., Brechenmacher F., Husson, M. (2014) Points cardinaux pour la conception de formations universitaires pluridisciplinaires en épistémologie et histoire des sciences pour les enseignants du secondaire, ou comment s'appuyer sur des dilemmes. SHS Web of Conferences, 13, 05004. http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20141305004

Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In Ouvrier-Buffet C., Perrin-Glorian M.J. (Eds.) *Approches plurielles en didactique des mathématiques* (pp. 211-222). Paris : LDAR, Université Paris Diderot.

Chambris C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM* 69, 5-31.

Chemla K., Guo S. (2004) *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

Chevallard Y., Bosch M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, (55), 5-32.

Chorlay R., de Hosson C. (à paraître) History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research In Lagrange J-B., Kuzniak A. (Eds) Actes du colloque La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michèle Artigue, 31 mai - 2 juin 2012, Université Paris Diderot, Paris.

Décamp N., de Hosson C. (2012) Implementing Eratosthenes' discovery in the classroom: some educational cares, *Science and Education* 21 (6), 911-920.

de Hosson C. (2011) *L'histoire des sciences : un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement de la physique*. HDR, Université Paris-Diderot.

de Hosson C., Schneeberger P. (2011) Orientations récentes du dialogue entre recherche en didactique et histoire des sciences, *Recherche en Didactique des Sciences et des Technologies* 3, 9-20.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1985) Aires de surfaces planes (2ème partie). *Petit X* 8, 5–30.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20(4), 387–424.

Dorier J.-L. (2006) *Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, perspectives théoriques sur leurs interactions*, Cahiers Leibniz, 12.

Guedj M., Laube S., Savaton P. (2007) Vers une didactique de l'histoire des sciences. Éléments de problématiques et de méthodologie pour une didactique de l'épistémologie et de l'histoire des sciences et des techniques (EHST). In Marquet P., Hedjerassi N., Jarlegan A., Pacurar E., Remoussenard P. (Eds.) *Actes du colloque AREF*, Strasbourg.
http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Muriel_GUEDJ_285.pdf

Jahnke N.-H., Acarvi A., Barbin E., Bekken O., Furinghetti F., El Idrissi A., da Silva C.-M.-S., Weeks C.(2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel J., van Maanen J. (Eds.) *History in MathematicsEducation: The ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer.

Jankvist U.-T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 235–261.

Keller A. (2006) Expounding the Mathematical Seed, A Translation of Bhāskara I on the Mathematical Chapter of the *Āryabhaṭīya* (2 vol.)."Science Networks", *Historical Studies* (30), Basel: Birkhäuser

Munier V., Passelaigue D. (2012) Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma* (38), 106–147.

Perrin-Glorian M.-J. (1990) L'aire et la mesure. *Petit X* (24), 5–36.

Perrin-Glorian M.-J. (2002) Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.299–315). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions

Proust C. (2005) Le calcul sexagésimal en Mésopotamie.
Repéré à http://culturemath.ens.fr/content/le-calcul-sexagesimal-en-mesopotamie-2461

Proust C. (2007) Tablettes mathématiques de Nippur. *Varia Anatolica (XVIII)*. Istanbul: IFEA, De Boccard.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: Editions L'Harmattan.

Rogalski J. (1985) *Acquisition de la bidimensionnalité*. Thèse d'Etat.

SAW ERC Hypothèses. (s.d.) Mathematical Sciences in the Ancient World. Repéré à http://sawerc.hypotheses.org/

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* (10/2.3), 133-170.

MANUELS SCOLAIRES

Blanc J.-P., Bramand P., Debû P., Gély J., Lafont E., Peynichou D., Vargas A., (2010) *Pour comprendre les mathématiques CM2. Programmes 2008*, Paris : Hachette

Brissiaud R., Clerc P., Lelièvre F., Ouzoulias A., (éd. 2013) *J'apprends les maths CM2. Programmes 2008*, Paris : Retz (Présente édition: 2010)

Champeyrache G., Evanno C., (2011) *La clé des maths CM2. Programmes 2008*, Paris : Belin

Corrieu L., Jardy Jacq., Jardy Jack., Rouy L., (2009) Vivre les maths CM2. Programmes 2008, Paris : Nathan

Peltier M.-L., Briand J., Ngono B., Vergnes D., (2009) *EuroMaths CM2. Programmes 2008*, Paris : Hatie