Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉCONSTRUCTION-CONSTRUCTION D'UN CONCEPT MATHÉMATIQUE

Alberto CAMACHO[*], Avenilde ROMO-VÁZQUEZ[**]

Résumé – Dans cette communication, nous nous proposons de montrer la déconstruction du concept de gradient dans un contexte non-mathématique, la topographie. Du processus de déconstruction dans ce contexte résultent de nombreuses techniques qui aident à établir une définition du gradient. La définition qui en dérive fait intervenir des éléments venant de la topographie, des mathématiques et des mathématiques académiques. L'empirisme qui apparaît dans la déconstruction conduit à utiliser comme cadre théorique le modèle praxéologique étendu de Castela et Romo-Vázquez (2011). En considérant la démonstration associée à ce concept, il est possible de concevoir des organisations didactiques dont il fait partie.

Mots-clefs : déconstruction, reconstruction, définition, topographie, gradient.

Abstract – In this paper, deconstruction of the concept of gradient is examined in a non-mathematical context, topography. Many techniques and practices that help establish a definition of gradient are a result of such a deconstruction. The definition is developed using some elements of topography as well as mathematics and academic mathematics. The empiricism revealed in the deconstruction leads to the use of the praxeological extended model of Castela and Romo-Vázquez (2011) as a theoretical framework. It is possible to conceive didactical organizations related to this concept by considering the proof associated with it.

Keywords: deconstruction, reconstruction, definition, topography, gradient.

I. INTRODUCTION

Un des objectifs de cette communication est de fournir une déconstruction du concept de gradient située en dehors de toute praxéologie mathématique, tant disciplinaire que scolaire, le contexte choisi est la topographie, vue comme Institution. La déconstruction est vue comme le processus inverse de la construction d'un concept, c'est à dire qu'on part d'un concept et on essaie de trouver tous les éléments qui en font partie. Au moins dans le travail dont il est question ici, la déconstruction des concepts mathématiques est faite à partir d'une analyse des usages, du concept en question, dans les sciences non-mathématiques. Cette analyse permet de repérer des significations associées aux utilisations ainsi que d'autres éléments intervenant dans le processus de construction du concept.

[*] Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Mexique, camachoalberto@hotmail.com
[**] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Mexique, avenilderv@yahoo.com.mx

Camacho A., Romo-Vázquez A. (2015) Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 443-453.

Pour développer cette recherche, nous nous situons au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans l'objectif de réguler des phénomènes didactiques, cette théorie s'intéresse à la modélisation du savoir et des activités scolaires qui lui sont associées. Nous utilisons les notions d'institution et de praxéologie. La notion d'institution est considérée dans le sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire « comme un groupe des personnes aux yeux desquels au moins un objet existe » -cité dans Gantois (2012, p.48)- par exemple : l'école, l'œuvre mathématique des différentes époques, les manuels, etc. Nous considérons aussi le point de vue de Castela et Romo-Vázquez (2011) :

> Les *institutions,* c'est-à-dire des organisations sociales stables, encadrent les activités humaines et simultanément les rendent possibles par les ressources que ces institutions mettent à disposition de leurs sujets. Ces ressources matérielles et intellectuelles ont été produites par des communautés, tout au long des processus d'affrontement à des situations problématiques qu'il s'agit de surmonter avec régularité et efficacité. (Op. cité, p. 85)

Dans ce cadre, les organisations mathématiques (OM) sont reconnues comme praxéologies canoniques, principalement validées par la démonstration mathématique, validation dominante et privilégiée au sein de l'institution de production de savoirs mathématiques. Les praxéologies canoniques peuvent être explicités à partir de l'unité d'analyse [T, τ, θ, Θ] (op. cité), dont T est un type de tâches à résoudre dans un environnement scolaire, τ est la technique qui permet de réaliser la tâche du type T, θ la technologie est un discours qui produit la technique (théorèmes, axiomes, définitions, etc.) et Θ est un discours théorique qui à son tour produit, explique et valide la technologie.

On part de l'hypothèse que les praxéologies canoniques (OM) de l'institution enseignement des mathématiques, sont utilisées pour décrire des pratiques mathématiques habituelles sans prendre en compte des connaissances, des techniques et des pratiques issues des sciences non-mathématiques. Ce qui fait, par exemple, que les connaissances émergentes des sciences non mathématiques comme la topographie soient réduites à un type d'ethno-mathématique.

> L'utilisation de ressources de la physique et d'autres disciplines dans l'enseignement des mathématiques, est faite pour *motiver* l'introduction des sujets et d'objets mathématiques, pour interpréter des résultats des problèmes *pratiques* et même pour en résoudre. Ce type de résolution est demandé dans les programmes d'étude, principalement dans les formations du génie. Cependant, l'introduction de concepts externes à la pratique mathématique, implique d'autres types de techniques *pratiques* intermédiaires qui associées à des techniques mathématiques issues des théorèmes et définitions, permettent de résoudre certaines tâches. (Camacho & Sánchez 2015, p. 2)

La pratique est vue comme la capacité de l'homme à transformer et adapter les connaissances mathématiques aux circonstances des problèmes abordés, comme c'est le cas de l'activité d'ingénieurs et de topographes.

Notre objectif est de produire une définition du concept de gradient, qui, comme on le sait, associe un champ vectoriel à un champ scalaire, ce qui est fondamental tant dans la recherche en physique mathématique comme dans les mathématiques académiques, particulièrement dans l'enseignement du calcul vectoriel (enseignement centré sur la partie opératoire de l'analyse vectorielle).

La praxéologie du gradient peut être ainsi vue comme une codétermination entre praxéologies canoniques et praxéologies topographiques. Pour préciser les éléments technologiques qui l'intègrent, nous utiliserons le modèle praxéologique étendu de Castela et Romo-Vazquez (2011), c'est-à-dire un modèle praxéologie non-canonique en cours de construction, qui intègre des technologies théoriques θ^{th} et des technologies pratiques θ^{p}, schématisée ci-après :

$$\left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \begin{array}{c}\theta^{th} \\ \theta^{p}\end{array} & \Theta \end{array}\right] \begin{array}{l}\leftarrow P(M) \\ \leftarrow I_u\end{array}$$

Figure 1- *Modèle praxéologique étendu proposé par Castela et Romo–Vázquez (2011), dans lequel sont incluses l'unité classique d'analyse [T, τ, θ, Θ] ainsi qu'une technologie pratique* θ^p.

Dans la figure 1, I_u représente l'institution utilisatrice des mathématiques, comme c'est le cas de la topographie, productrice de technologies pratiques θ^p. $P(M)$ représente la discipline mathématique dont la communauté de chercheurs qui produit des praxéologies mathématiques fait partie. Le type de tâches T et la technique τ correspondent à ceux de l'unité classique d'analyse [T, τ, θ, Θ] (Op. cité).

Tout ce qui précède, permet de dégager certaines questions : Comment les savoirs mathématiques peuvent-ils devenir des connaissances pratiques (utilisables) ? Leur utilité permet-elle de les organiser en des organisations de niveaux plus ou moins complexes (ponctuel, local, etc.) au sein des pratiques ? Et dans le sens inverse : Est-ce qu'une connaissance ou praxéologie pratique (utilisable) peut devenir un objet ou praxéologie mathématique ? Comment les connaissances pratiques peuvent-elles aider à concevoir des organisations didactiques pour l'enseignement des mathématiques ? Pour les aborder, nous procèderons à la déconstruction de l'objet gradient en utilisant un *media* de diffusion de connaissances topographiques, le manuel de Diaz-Covarrubias (1890). Dans ce manuel est présenté le savoir-faire de la localisation de la *Ligne de Plus Grande Pente* (LPGP), sur lequel nous nous centrons.

II. LE SAVOIR ENTRE DEUX INSTITUTIONS EXTREMES : MATHÉMATIQUES ACADEMIQUES E(M) ET TOPOGRAPHIE P(T)

1. La praxéologie dominante du concept gradient

Dans l'enseignement du calcul vectoriel pour futurs ingénieurs mexicains, la définition du gradient est établie de la manière suivante.

On considère les dérivées d'un champ scalaire, par exemple la variation de la fonction f en fonction de la position dans l'espace. Même si la fonction f est une fonction scalaire des variables x, y, z, ses dérivées partielles respectivement aux coordonnées prennent un caractère vectoriel :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} (f,\ \textit{fonction scalaire})$$

A partir d'un accroissement de f dans chaque direction, la différentielle de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Considérant ensuite le vecteur position :

$$\bar{r} = xi + yj + zk,$$

on a que :

$$\overline{dr} = dxi + dyj + dzk$$

Le gradient de f est la fonction vectorielle $\overline{\nabla} f$ définie par :

$$\bar{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial x} i+\frac{\partial f}{\partial y} j+\frac{\partial f}{\partial z} k,$$

et l'opérateur vectoriel, connu comme opérateur Nabla :

$$\bar{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x} i+\frac{\partial}{\partial y} j+\frac{\partial}{\partial z} k.$$

La différentielle df peut donc s'exprimer comme :

$$df=\bar{\nabla} f \cdot d\bar{r}$$

Dans cet enseignement, la définition du gradient n'est présentée que par le biais de l´opération précédemment montrée. Le vecteur gradient est déterminé en un point (x_0, y_0, z_0) pour des cas particuliers de fonctions scalaires. La praxéologie scolaire peut être décrite de la manière suivante :

T : Calculer le gradient de la fonction scalaire $f(x,y,z)$

τ : La technique institutionnellement reconnue par E(M) et contenue dans θ^{th}, est une procédure qui implique le calcul des trois dérivées partielles de la fonction :

$$\bar{\nabla} f=\frac{\vec{\partial}}{\partial x}(f(x,y,z)) i+\frac{\vec{\partial}}{\partial y}(f(x,y,z)) j+\frac{\vec{\partial}}{\partial z}(f(x,y,z)) k$$

θ^{th} : Lors de l'enseignement du calcul vectoriel, le gradient de la fonction scalaire f est un vecteur présenté sous la forme :

$$\bar{\nabla} f=\frac{\vec{\partial} f}{\partial x} i+\frac{\vec{\partial} f}{\partial y} j+\frac{\vec{\partial} f}{\partial z} k \text{ où } \bar{\nabla}=\frac{\vec{\partial}}{\partial x} i+\frac{\vec{\partial}}{\partial y} j+\frac{\vec{\partial}}{\partial z} k \text{ est l'opérateur Nabla appliqué à } f.$$

Θ : Elle n'est pas envisagée.

Une fois que la définition est établie, il est nécessaire de donner un sens réel à l'application $\bar{\nabla} f$; celui-ci est normalement donné à partir des cartes topographiques, prises comme des champs scalaires dont les vecteurs gradients indiquent la *direction de l'inclinaison maximale* d'une colline ou montagne. Notons que ce choix laisse de côté d'autres possibilités importantes dans le même contexte. Un exemple classique présenté aux étudiants pour leur faire comprendre ce concept, est le suivant (figure 2) :

On peut considérer la carte des courbes de niveau d'une montagne comme un champ scalaire qui attribue à chaque paire de coordonnées, latitude–longitude, une altitude scalaire (champ scalaire à deux variables). Dans ce cas, le vecteur du gradient a un point générique indique sur la carte la direction de la pente maximale de la montagne. Notez que le vecteur de gradient est perpendiculaire à la tangente à la courbe de niveau.

À partir des cartes qui présentent des lignes de niveau, une technique est suggérée :

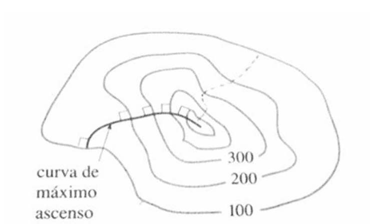

Figure 2*- Tracé d'une Courbe d'Ascension Maximale en utilisant seulement une paire d'équerres et un crayon. Prise de Stewart (2002), p. 935, Figure 12.*

Il s'agit de tracer des vecteurs gradients, en commençant par dessiner pour une suite de points choisis sur des courbes de niveau croissant (éminence) ou décroissant (dépression) la tangente en chaque point puis sa perpendiculaire, jusqu'à arriver à la partie supérieure ou inférieure du relief en question. La trace qui résulte suggère une ligne particulière de gradients sur la configuration, qui en effet établit une courbe d´ascension maximale (CAM) ou inversement, une courbe de descente maximale.

Cependant le discours traditionnel dans l'enseignement de mathématiques, normé par les manuels utilisés et par l'enseignant, se restreint à une intervention succincte de la CAM. D'une part, ne sont pas considérés les concepts fondamentaux des configurations des cartes appartenant aux pratiques topographiques, *courbe de niveau, versant, ligne de plus grande pente, crêtes, équidistance entre les courbes, les contrôles horizontaux et verticaux, des échelles, plan topographique*, etc. D'autre part, l'utilité du concept de gradient n'est que peu, voire pas, reconnue dans la topographie elle-même. En ce sens, la transposition praxéologique est limitée à une interprétation de la définition du concept, peu fiable pour améliorer la compréhension, puisqu'on part de la définition pour l'interpréter, en ignorant d'autres significations. Partant, « (…) cette situation problématique est immobile et non susceptible de développement » (Barquero, Bosch & Gascón 2010, p. 532).

La ligne pointillée qui apparaît dans la figure 2, est connue en topographie comme *Ligne de la Plus Grand Pente* (LPGP), elle correspond aux parties les plus abruptes par lesquelles l'écoulement de l'eau sur les flancs des montagnes ou des collines est le plus rapide. Dans l'enseignement de mathématiques, ce concept n'est pas exploité. Pourtant la topographie l'utilise pour concevoir des plans topographiques ; il serait donc possible d'utiliser la LPGP pour motiver l'introduction du gradient.

2. *La topographie*

La topographie est un système ordonné d'éléments géométriques dont les composants sont mis en relation par le biais d'arguments trigonométriques. Elle étudie l'ensemble des principes et des procédures permettant la représentation graphique de la surface de la terre, avec ses formes et détails ; autant naturels qu'artificiels, en associant les points de vue planimétrique et altimétrique. Cette représentation a lieu sur des surfaces planes, elle se limite à de petites zones des terrains. Une dimension importante est l'étude des versants dont il faut déterminer le profil, dans les parties les plus abruptes des terrains. La forme des versants détermine en effet le régime de ruissellement des eaux (pluviales au Mexique) le long des pentes de la montagne. En érodant les sols, les flux d'eau provoquent l'apparition de cônes de déjection dans certaines zones d'embouchure, entraînant parfois des retenues d'eau causes de graves inondations dans les vallées.

Les flux d'eau s'écoulent localement le long de la plus grande pente et ce faisant façonnent, par érosion, les versants, les creusant par exemple de sillons qui constituent une matérialisation des LPGP. Ceci explique plus généralement que localisation des LPGP et réalités topographique et géologique (hydrologique) se co-déterminent, ce qui à nos yeux rend envisageable de prendre appui sur l'étude de cartes topographiques pour introduire aux concepts de ligne de plus grande pente et de vecteur gradient. Nous allons voir que cette notion de LPGP est aussi au fondement des pratiques de délinéation pour le dessin de cartes topographiques.

3. *Le gradient dans la pratique de délinéation. La déconstruction*

La pratique de la délinéation a été un contexte dans lequel le gradient a montré sa grande utilité. Cette méthode, connue comme le *clair-obscur,* a été développée par l'ingénieur mexicain Francisco Díaz-Covarrubias au milieu du XIXe siècle et abandonnée au début du XXe siècle. Elle a été en elle-même une pratique du dessin topographique qui a donné le sens de la profondeur et du relief aux cartes topographiques. La pratique incorpore une technique conduisant à la localisation et la détermination de la LPGP, technique qui fait essentiellement référence à la configuration la plus abrupte entre courbes de niveau.

La figure 3 montre le plan topographique d'une montagne, qui apparaît dans Díaz-Covarrubias (1890, p. 559) : on peut voir dans l'image de droite le relief, aussi bien que les versants figurés entre les parties les plus obscures de la configuration. La méthode consiste principalement à graduer *l'ombrage* selon les pentes du terrain. A partir de cette idée, l'outil pour représenter les accidents verticaux a été associé aux courbes de niveau (les courbes de niveau sont visibles dans l'image de gauche de la figure 2, et sont remplacées par les *traits de plume*[160] du clair-obscur dans l'image de droite de la même figure), de sorte que la pente entre chaque couple de courbes est $p = \frac{e}{\Delta}$, où e représente l'écart constant de niveau entre courbes et Δ la séparation ou distance entre les projections horizontales de ces mêmes courbes. Plus abrupte est la pente, plus est forte la proportion du noir par rapport au blanc.

La *théorie* derrière la technique du clair-obscur, provient d'une pratique qui a comme référence la topographie :

> (...) si pour n'importe quel point du terrain compris entre deux plans sécants, on suppose qu'un corps lourd est abandonné à l'action de la gravité, celui-ci descendrait tout au long du versant suivant la ligne la plus courte, qui est perpendiculaire aux intersections du terrain avec les plans sécants : celle-ci est nommée la *ligne de plus grande pente,* car elle prend le plus grand angle avec l'horizontal relativement à toute autre ligne qu'on prend. (Díaz-Covarrubias 1890, p. 559)

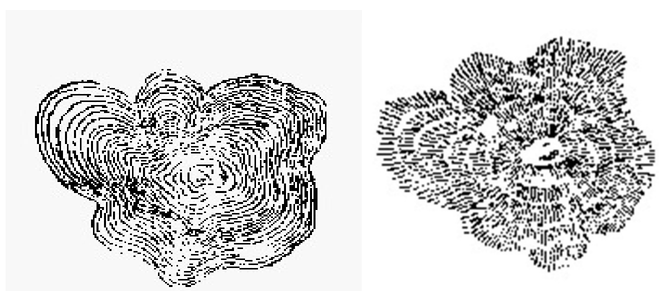

Figure 3- *Dans l'image de droite, apparaît un dessin d'une partie de la carte topographique où la technique du clair-obscur a été utilisée. L'image de gauche montre les courbes de niveau à partir desquelles s'obtient la réalisation du dessin de droite.*

Figure 4- *Collines du Abrigo, Nouveau-Mexique U.S.A : tout au long des collines sont visibles les crêtes des courbes qui déterminent les versants. Dans certains cas, les versants sont localisés par les parties plus ombrées de la configuration. Image prise de* *http://maps.google.com.mx*

[160] En espagnol : *plumazos.*

La technique utilisée pour localiser dans la configuration la LPGP, est une « technique pratique » qui permet de l'identifier sur les crêtes consécutives entre chaque couple de courbes. En résumé, les deux étapes pour la localiser sont les suivantes : 1) on dessine une ligne pointillée continue, qui correspond essentiellement à la LPGP recherchée (voir la grande quantité de versants figurés entre les courbes de niveau et les crêtes correspondantes sur la carte de la figure 4), 2) puis des traits de plume à l´encre allant du blanc vers le noir, sont tracés tout au long de la carte topographique, restituant ainsi l´impression de profondeur et de relief des accidents du terrain.

Le concept de ligne de plus grande pente sert de base à une technique *produite* dans le cadre du dessin topographique, qui est habilitée par un savoir-faire, intégrant des connaissances mathématiques qui la justifient.

III. DÉFINITION DU GRADIENT A PARTIR DE LA LPGP

En utilisant des éléments de la technique du clair-obscur, avec un minimum d'arguments de la topographie, nous proposons un schéma d'enseignement qui mène à la définition du gradient sous la forme $\overline{\nabla}f$. La séquence commence par la *localisation* de la LPGP située entre deux courbes de niveau d'une portion de terrain sur un croquis. Ce croquis est ensuite incorporé à un environnement géométrique élémentaire qui permet de déterminer les vecteurs gradients entre courbes de niveau, ce qui permet aussi d'aller vers une application « variationnelle » sur les fonctions de deux variables comme celles qui figurent dans $\overline{\nabla}f$. Les éléments provenant de la topographie ne sont pas nombreux : *la partie d'une colline configurée par des courbes de niveau qui déterminent les versants.*

1. Le croquis. L'eau coule plus rapidement par les versants

La carte qui est présentée ci-après (figure 5) représente une certaine *partie d'une colline* dessinée par des courbes de niveau comme le font les topographes, les ingénieurs civils et les architectes dans leurs projets. En fait, la représentation de la colline est une tentative pour la montrer en trois dimensions. Dans la figure 6 apparaît un croquis montrant le versant qui est dans la partie inférieure gauche de la figure 5.

Figure 5- *Idéalisation : courbes de niveau sur une colline dans une image tridimensionelle. Par où suppose-t-on que l'eau coule lorsqu'il pleut ? Image prise de : http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_nivel.*

Les courbes de niveau sont *équidistantes* dans le sens où la distance verticale entre les plans horizontaux contenant deux courbes de niveau consécutives est fixe. On peut voir, dans les deux figures (5 et 6) que les courbes de niveau se dirigent vers le haut en formant des crêtes pour après descendre à nouveau.

Des définitions *pratiques,* appartenant à la Topographie P(T), sont ensuite présentées :

- θ_1^P ***Courbe de niveau*** : Ce sont les intersections des surfaces de terrain avec des plans sécants équidistantes qui les coupent horizontalement (figure 5).

- θ_2^P ***Équidistance entre courbes de niveau :*** Distance verticale entre deux courbes consécutives, elle est généralement constante. Dans la figure 5 les équidistances sont les distances verticales entre les plans sécants qui coupent la colline.
- θ_3^P ***Échelle :*** Lorsque la réalité du terrain est représentée par une carte dans une certaine proportion, l'échelle exprime le coefficient de proportionnalité. Par exemple, une carte dessinée au 1 : 5000 signifie que 1 cm sur la carte représente 5000 cm ou 50 m du terrain.
- θ_4^P ***Pente entre les courbes de niveau :*** $p = \frac{e}{\Delta}$ c'est-à-dire, équidistance/longueur horizontale qui sépare deux courbes de niveau.
- θ_5^P ***Surface :*** Portion limitée du terrain qui correspond avec l'espace réel.

Dans la carte de courbes de niveau donnée, comment identifier la trajectoire par laquelle l'eau coule le plus rapidement quand il pleut ?

La façon de reconnaître la trajectoire la plus abrupte, c'est-à-dire celle par laquelle l'eau coule le plus rapidement, est d'examiner les « *vertientes*[161] » qui suivent les lignes les plus courtes entre chaque couple de courbes de niveau consécutives. Dans ce cas, *les plans sécants* sont représentés par les contours, et la trajectoire la plus courte est celle qui est placée dans les parties où les courbes se *tournent* vers le haut (dans l´espace) en simulant des crêtes qui unies déterminent le *vertiente*, par lequel le flux d'eau coule *de manière échelonnée* (figure 6).

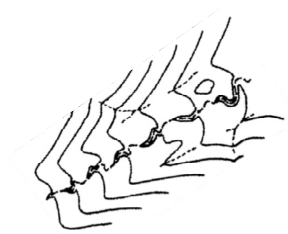

Figure 6*- Idéalisation : Croquis du versant, l'eau coule d'un échelon à l'autre. Qu'est-ce qui se passe à la limite, lorsque les plans sécants sont très proches les uns des autres ?*

2. *Modélisation géométrique du versant*

Le gradient est une des expressions différentielles les plus élémentaires qui peuvent représenter la manière dont une grandeur physique varie dans l´espace. Il est obtenu en considérant les dérivés d'un champ scalaire, par exemple la variation de l'espace $z = f\ (x, y)$ qui représente une colline. Même si z est un scalaire, les dérivées par rapport à x et y ont un caractère vectoriel.

Notre objectif est de chercher, en un point A de la surface $z = f(x, y)$ (la colline), la pente p d'écoulement de l'eau, c'est-à-dire la pente de la LPGP (figure 7). Dans ce qui suit, nous produisons un discours technologique qui ne serait pas reçu comme une validation légitime dans les institutions P(M) de la recherche mathématique et E(M) de l'enseignement académique de mathématiques. Par contre, il l'est dans les institutions analogues des sciences physiques. Ce choix nous permet de rendre accessible aux lecteurs de cet article, non nécessairement au fait de la théorie mathématique de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, les raisons des liens entre gradient et LPGP. Autrement il s'agit d'un discours d'explication (Castela & Romo-Vazquez 2011, p. 89), pouvant appartenir à la praxéologie mathématique du type de tâches Localiser la LPGP.

[161] Ruisseaux dans les collines par lesquels l´eau coule plus rapidement.

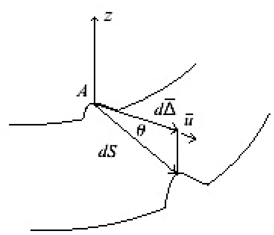

***Figure 7** - Triangle infinitésimal déterminé par la trajectoire $\overrightarrow{dS}$ parcourue par l'eau*

On assimile, comme les physiciens, petits accroissements et différentielles. A partir de $\Delta(x, y)$, projection horizontale de A, on se déplace horizontalement de $\overrightarrow{d\Delta} = (dx, dy)$. Alors l'altitude varie de $dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, la deuxième égalité s'obtenant selon une technique classique en physique, identifiant hypoténuse d'un triangle rectangle et côté, taux d'accroissement et limite, dans le cas d'accroissements tendant vers 0, la dérivée, partielle ou non, étant vue comme quotient des différentielles mathématiques). C'est dans cette phase que peuvent précisément être introduites les dérivées partielles, puis le vecteur gradient.

Par définition, la pente dans la direction (dx, dy, dz) est $\frac{dz}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}$ c'est-à-dire :

$p = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|} =< grad(f), (\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}) >$[162].

Mais on sait qu'un produit scalaire est maximum quand les vecteurs sont colinéaires, donc p est maximum quand les vecteurs $(\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|})$ et $\mathrm{grad}(f)$ sont colinéaires. Ainsi la pente est maximum quand Δ, projeté de A sur un plan horizontal ou représentation de A sur le plan topographique, se déplace tangentiellement au gradient, et on a $p = \|\overrightarrow{grad(f)}\|$ puisque le vecteur $(\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|})$ est unitaire. Si on note $\overrightarrow{dS}$ le petit déplacement correspondant le long de la ligne de plus grande pente, le triangle rectangle infinitésimal donne :

$\|\overrightarrow{dS}\|^2 = \|\overrightarrow{d\Delta}\|^2 + dz^2$, et donc $\frac{dz}{\|\overrightarrow{dS}\|} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

On voit ainsi qu'il est possible d'introduire le vecteur gradient comme pertinent dans le contexte topographique de la recherche de la LPGP. A partir de là, tout une technologie théorique, légitime du point de vue des institutions mathématiques peut être développée pour démontrer les affirmations tenues précédemment et les intégrer dans une théorie mathématique.

IV. RÉSULTATS

Nous avons présenté un processus de circulation des savoirs entre deux institutions mathématiques P(M) et topographiques P(T), des savoirs qui ont été utilisés dans la topographie mexicaine de la fin du XIXe siècle et même transformées pour donner lieu à la définition de la LPGP. Sans prendre trop de distance avec leur contexte et leur signification

[162] La notation <-,-> désigne le produit scalaire.

originaux, ces vestiges sont impliqués dans un processus en sens inverse, allant de la topographie vers la mathématique, pour définir le gradient.

Dans ce processus, deux activités sont mises en évidence : la première est une déconstruction du savoir qui permet de le situer au sein de problèmes issus des sciences non-mathématiques, comme c'est le cas de la topographie. La seconde présente une recontextualisation du savoir déconstruit dans la topographie, qui sert ensuite de point d'appui pour l'amener aux mathématiques. Dans le premier cas, le savoir a été l'objet d'une transposition vers P(T) qui a fait que sa relation à la technologie théorique θ^{th} s´est perdue, ainsi que son sens mathématique d'origine. Dans le second cas on ne peut pas parler d'une transposition didactique dans le sens classique, parce que la connaissance ne procède pas du savoir mathématique, mais des connaissances, compétences et procédures mixtes, mathématiques académiques et topographiques.

Deux techniques issues d'une discipline non-mathématique sont identifiées pour déterminer le gradient : celle qui est suggéré traditionnellement dans les manuels d'enseignement pour le calcul vectoriel et celle qui a été proposée dans cette communication à partir de la réalité des portions d'espaces topographiques, configurées par des courbes de niveau, s'appuie sur la notion de ligne de plus grande pente, déterminée par une technique pratique et introduit à la suite le gradient.

Dans ce sens, les disciplines non-mathématiques nourrissent la mathématique académique à travers des savoirs transformés dans le contexte.

V. CONCLUSIONS

1. Vers la conception d'une organisation didactique

L'analyse praxéologique présentée ci-dessus constitue une base pour concevoir des organisations didactiques adaptées pour l'enseignement mathématique et en particulier, pour celui-ci du calcul vectoriel. L'organisation aura comme axe principal la présentation du statut des éléments de la topographie, tels que le point sur le terrain $P(x, y, z = e)$, puis le passage au cadre des fonctions de deux variables comme $z = f(x, y)$. Pour la conception de l'organisation nous pensons qu'il faudra prendre en compte la modélisation en termes de macro-espace, méso-espace et micro-espace, utilisé par la recherche de Matheron et Noirfalise (2010). Les principales lignes directrices seront les suivantes.

Dans une première étape, afin que les étudiants puissent localiser et identifier les LPGP, il serait nécessaire de proposer des tâches sollicitant des techniques de la topographie sur croquis extraits de cartes topographiques (voir figure 8).

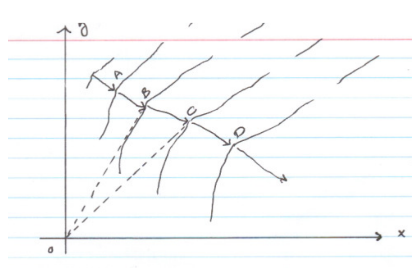

Figure 8*- Obtention de la LPGP sur un plan topographique.*

Dans les croquis, les étudiants vont tracer la LPGP en l'identifiant au moyen des crêtes consécutives entre les couples de courbes. Ils font apparaître des vecteurs sécants $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, etc., dont les composantes dans un repère rectangulaire peuvent être déterminées en utilisant seulement une paire d'équerres graduées. Avec la réalisation de cette pratique, dans une deuxième étape, l'enseignant et ses étudiants auront des éléments géométriques pour introduire le gradient dans le cours.

Le gradient relie différents niveaux de connaissances qui permettent de tenir compte des processus de construction de connaissances empiriques déterminées par θ^P et des praxéologies non-canoniques. Comme concept décontextualisé, le gradient possède de vastes attributs opératoires, ce qui en fait un objet intéressant pour le faire circuler entre différentes institutions.

Ce qui précède montre une voie pour reconnaître et établir des relations entre les institutions, dans ce cas la topographie P(T) et les mathématiques P(M) - E(M). Ce qui de notre point de vue, est nécessaire pour former de futurs professionnels, montrant différentes manières dont les mathématiques sont utilisées et validées.

REFERENCES

Barquero, B. Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. In Bronner A, Larguier M, Artaud M, Bosch M, Chevallard Y, Cirade G, & Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques comme outils de conaissansse et d´action (et les autres savoirs)* (pp. 527-549). Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier.

Camacho A., Sánchez B. (2015) Praxeologías y empiremas, recursos extremos para la construcción de conocimiento. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/464/257

Castela C., Romo-Vázquez A. (2011) Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruíz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Díaz Covarrubias F. (1890) *Manual de Topografía*. México: Imprenta del Gobierno en Palacio.

Gantois J-Y. (2012) *Un milieu graphique-cinématique pour l´apprentissage des dérivées dans une praxéologie "modélisation" : potentialités el limites*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Liège.

Matheron Y., Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Stewart J. (2002) *Cálculo Multivariable*. México: Thomson Learning, Cuarta Edición.