LES INTERACTIONS ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LES AUTRES DISCIPLINES DANS LES FORMATIONS GÉNÉRALE ET PROFESSIONNELLE

Compte-rendu du Groupe de Travail n°5

Corine CASTELA[*]– Abdellah EL IDRISSI[**]– Fernand MALONGA MOUNGABIO[***]

C'est la cinquième fois qu'EMF dédie un Groupe de Travail au thème évoqué de manière générique dans l'intitulé figurant dans le titre de ce compte rendu. Les raisons évoquées par les responsables de ce groupe en 2012 pour justifier cette longévité n'ont pas pris une ride. Les sociétés contemporaines accordent de plus en plus d'importance à des apprentissages moins académiques, plus orientés vers le développement de compétences plutôt générales, présentées comme plus adaptées à l'intégration des nouvelles générations dans le monde social et économique tel qu'il est devenu. Elles orientent leurs politiques éducatives vers des réalisations interdisciplinaires, souvent appuyées sur une pédagogie de projets dans lesquels les élèves peuvent être conduits à solliciter en les adaptant à des contextes non scolaires des savoirs relevant de plusieurs disciplines (sans toutefois que ce soit forcément le principal enjeu visé). Ainsi, relativement tardivement par rapport à d'autres pays francophones, la France a donné récemment une ampleur plus importante à cette approche : la réforme de 2015 introduit dans la structure de l'enseignement du collège des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires. Ces injonctions institutionnelles mettent donc le monde éducatif et celui des recherches en didactique des mathématiques au défi de concevoir, expérimenter et évaluer des réalisations interdisciplinaires dans le cadre de l'enseignement général. Il en est de même pour l'enseignement technique, au sein duquel, du fait de la proximité avec les finalités professionnelles, la nécessité d'interactions entre disciplines générales, disciplines professionnelles et pratiques d'atelier semble une évidence depuis longtemps. Mais la chose est moins simple que ne semblent le croire les décideurs. La complexité des difficultés soulevées par les interactions, aussi bien entre les disciplines scolaires qu'entre disciplines scolaires et pratiques professionnelles, est trop sous-estimée, faute d'avoir été suffisamment analysée. Autrement dit, il était légitime de maintenir en vie le GT5 à EMF 2015.

[*] LDAR Université Paris Diderot-Université de Rouen- France –corine.castela@univ-rouen.fr
[**] Centre de Formation des Inspecteurs, Rabat- Maroc-abdellah_elidrissi@yahoo.fr
[***] Université Marien Ngouabi – Congo (Brazzaville)- malongaf@gmail.com

Castela C., El Idrissi A., Malonga Moungabio F. (2015) Les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines dans les formations générale et professionnelle – *Compte-rendu du groupe de travail n°5*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 424-430.

13 personnes ont suivi plus ou moins complètement les travaux du groupe et ont entendu 9 communications. 5 nationalités étaient représentées : Congo Brazzaville, Maroc, Mexique, Tunisie et France.

I. AXE 1 : LES MATHEMATIQUES DANS LES PRATIQUES PROFESSIONNELLES, Y COMPRIS ARTISANALES, ET LES FORMATIONS QUI Y PREPARENT

1. Reprise d'une direction définie à l'issue des travaux du GT5 à EMF 2012

En 2012, deux axes de travail avaient été proposés : la modélisation comme lieu privilégié d'interactions entre les mathématiques et d'autres disciplines ; la problématique des interactions dans le cas particulier de la formation professionnelle. Sur les dix communications présentées en 2012, sept avaient concerné le deuxième axe. A l'issue du travail commun, les participants avaient insisté sur « la nécessité de maintenir au sein des colloques EMF un espace de partage des études didactiques sur les formations professionnelles mais aussi, et surtout, d'initier des recherches sur le terrain même des pratiques professionnelles visées par ces formations, où peuvent intervenir des mathématiques plus ou moins imbriquées à des savoirs non mathématiques. » (Ba & al. 2012) En effet, s'étaient manifestées dans plusieurs communications des difficultés de collaboration entre enseignants de mathématiques d'une part, enseignants des disciplines techniques et formateurs professionnels d'autre part dues à une méconnaissance chez les premiers des besoins spécifiques des seconds. Ces besoins se traduisaient par des formes particulières des savoirs et praxéologies mathématiques dans les contextes professionnels, parfois rejetées par les mathématiciens. En 2015, il a été considéré qu'aucun groupe n'ayant été créé sur le thème de l'enseignement technique et professionnel, le GT5 devait donner suite au souhait exprimé en 2012 en formulant donc deux questions :

> Sous quelles formes les mathématiques académiques vivent-elles dans les professions ? Comment la formation professionnelle s'accommode-t-elle des effets transpositifs inévitables de ces circulations interculturelles ?

2. Vers une ethnomathématique de langue française

Si l'on suit l'histoire du GT5, on constate que ce sont des phénomènes mis en évidence dans l'enseignement professionnel qui fournissent la raison d'être de la première de ces questions. Mais celle-ci ouvre une perspective à part entière, non immédiatement dirigée vers la formation. Cette perspective est plus épistémologique et anthropologique que didactique, intéressée par la productivité praxéologique des institutions professionnelles et ses effets sur les praxéologies mathématiques académiques. L'appel à communication de 2015 élargit encore ce champ de possibles recherches bien accueillies dans le GT5 : une continuité naturelle y est en effet postulée entre l'étude des mathématiques dans les professions donnant lieu à des enseignements professionnels et un domaine de recherche évoqué en 2009 à Dakar par la conférence plénière de P. Gerdes, à savoir l'ethnomathématique, domaine largement ignoré par l'espace francophone, y compris en Afrique. Le GT5 2015 s'est donc voulu groupe d'accueil de ce qu'on pourrait appeler une anthropologie du mathématique où les mathématiques savantes du XXIe siècle et leur histoire ne sont pas considérées comme permettant de tout dire des créations mathématiques imbriquées dans les pratiques humaines. Il s'agit de s'intéresser par exemple à des pratiques artisanales (tissage, construction, etc.), ayant une teneur mathématique sans pourtant utiliser les productions de la science mathématique, ce qui soulève les questions suivantes :

Qu'est-ce que le mathématique dans ce cas ? Où le trouve-t-on ? Quels sont les savoirs mathématiques ? Par qui sont-ils produits ? Comment sont-ils transmis ?

3. Quatre communications, des terrains et questionnements différents

Le texte de Diana Solares concerne les connaissances relatives aux écritures numériques et au calcul de différents acteurs du travail agricole dans le Nord du Mexique. Ce travail a été réalisé dans le but de concevoir un enseignement mathématique pour les enfants des ouvriers, travaillant dans les champs avec leurs parents mais cette partie de la recherche n'est pas évoquée dans la communication. La question d'une formation professionnelle des adultes n'est pas posée. Il s'agit donc exclusivement de traiter la toute première question évoquée à la fin de la section 1. ; l'on voit très clairement la nature anthropologique du travail à réaliser pour comprendre les différentes formes de l'activité sur le terrain et recueillir le faire et le dire des acteurs.

L'étude de Nathalie Auxire est centrée sur l'existant ordinaire : dans quelle mesure trois disciplines de la filière Productique-Usinage de l'enseignement professionnel français interagissent-elles autour de la notion de vecteurs ? Sont impliquées la bi-discipline Mathématiques-Sciences Physiques et chimiques, la Construction Mécanique (discipline intermédiaire) et la Productique-Usinage, dispensée en atelier et basée sur l'utilisation de machines-outils à dimension numérique. C'est un fonctionnement en parallèle et plutôt désajusté qui apparaît. Le programme de mathématiques est en retard sur les besoins des matières professionnelles. Par ailleurs, les interviews des enseignants montrent un réel cloisonnement entre Mécanique et Productique-Usinage, avec des usages différents d'une matière à l'autre. En particulier, le rôle très important de la sémiotique des machines-outils en atelier est ignoré à l'extérieur.

Le travail présenté par Avenilde Romo Vázquez et Alberto Camacho a une visée différente des deux précédentes soumissions puisqu'il s'agit de concevoir un enseignement de la notion de gradient d'une fonction pour des élèves ingénieurs. Les auteurs partent d'un questionnement et de pratiques relevant de la Topographie, relativement à la détermination des lignes de plus grande pente, sur une carte portant des lignes de niveau. Une telle réalisation suppose un travail de modélisation du problème topographique en jeu, travail qui aboutit, moyennant un traitement des accroissements infiniment petits, usuel en physique, à l'introduction de la fonction gradient comme outil. Cette situation pourrait donc effectivement constituer une base pour un enseignement de mathématiques. Toutefois, on peut entrevoir dans le texte que le mode de raisonnement qui est susceptible de conduire à l'introduction du gradient, peut être considéré comme probant dans un contexte non mathématique et entrer en conflit avec la théorisation formelle que peuvent vouloir enseigner les mathématiciens. On rejoint alors un débat, très présent en 2012 mais peu abordé en 2015, concernant notamment le niveau de rigueur et de formalisme des mathématiques pour les ingénieurs.

La quatrième soumission présentée par Thomas Morel concerne l'histoire de la formation professionnelle des personnels de l'Administration des mines dans les Académies de Freiberg (Saxe) et Schemnitz (en Basse-Hongrie), pendant la deuxième moitié du XVIIIe siècle. On y voit comment, dans ces Académies nouvellement créées, se met en place un enseignement des mathématiques (en particulier de ce qui est appelé géométrie souterraine) en rupture avec les pratiques universitaires en usage à l'époque en Allemagne. La résolution de problèmes professionnels y occupe une place centrale. En même temps, par la volonté des Administrations des mines, tutelles des Académies, la responsabilité de cet enseignement passe des maîtres de terrain à des professeurs de mathématiques. Cette contribution relève d'une épistémologie anthropologique. Elle met en évidence un processus de légitimation, par les institutions professionnelles supérieures, d'une organisation praxéologique (savoirs et pratiques) développée par des mathématiciens et ceci via des choix organisationnels dans une institution de formation. Cela confirme l'importance du didactique dans la production sociale des savoirs et encourage à lier comme le fait T. Morel recherches en épistémologie, histoire et didactique.

II. AXE 2 : L'INSERTION DE LA DISCIPLINE MATHÉMATIQUE DANS L'INTERDISCIPLINARITÉ AUX DIFFÉRENTS NIVEAUX DE LA SCOLARITÉ ET DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS.

Le champ de la recherche sur la formation à la modélisation n'apparaît pas dans l'appel à communication du GT5 en 2015. Il était justifié en 2012 par le fait que la modélisation est un terrain privilégié pour des interactions des mathématiques avec d'autres disciplines. Mais il faut remarquer que d'une part certaines recherches sur ce thème sont strictement internes aux mathématiques (voir par exemple le Working group *Applications* and *Modelling* de CERME), et que d'autre part, c'est toujours en tant qu'outil pour d'autres disciplines que les mathématiques sont impliquées dans une situation de modélisation interdisciplinaire. Or, même si c'est à ce titre que la discipline mathématique contribue largement aux projets interdisciplinaires, ce n'est pas le seul rôle qui peut lui être attribué. Le deuxième axe proposé par le GT5 s'est donc voulu ouvert aux différentes modalités d'une interdisciplinarité visant à développer chez les élèves une compréhension multidimensionnelle des phénomènes en associant les mathématiques aux autres disciplines scolaires, qu'elles relèvent des sciences, des langues, des arts ou des humanités. Les questions proposées étaient les suivantes :

Quelles sont ces pratiques et quelles sont leurs caractéristiques spécifiques, en particulier au niveau du rôle des enseignants ?
Quels sont les apports effectifs de ces pratiques pour l'apprentissage des mathématiques et pour la formation des enseignants ?
A quelles difficultés se heurtent leur intégration dans les curricula ?
Comment « les vertus interdisciplinaires» de ces pratiques sont-elles légitimées et évaluées ?

Cinq contributions se sont inscrites dans cet axe, avec une centration quasi exclusive sur la présentation de réalisations et sur les difficultés rencontrées. Les questions portant sur le rôle de l'enseignant et l'évaluation des acquis mathématiques et interdisciplinaires ne sont pas abordées dans les présentations. Aucun exemple ne concerne la formation des maîtres.

1. *Les mathématiques comme pourvoyeuse d'outils*

Fernand Malongo présente un travail préalable à une possible interaction entre les mathématiques et la chimie. Cette interaction est voulue institutionnellement au Congo Brazzaville et se traduit par l'introduction dans le programme de mathématiques du logarithme décimal comme nombre en 4^{e} et 3^{e} dans la perspective d'être utilisé en chimie pour la notion de pH. L'étude des programmes des deux disciplines fait apparaître deux phénomènes concernant la progression didactique : d'une part, un désajustement important des progressions puisque le pH n'est défini formellement qu'en seconde en Chimie et n'est fortement utilisé qu'en Terminale C ; d'autre part, une discontinuité de trois ans en mathématiques entre l'introduction au collège du logarithme nombre et la reprise en Terminale du logarithme fonction. Comme le confirme l'analyse des manuels dans les deux disciplines, ces phénomènes qui relèvent de la responsabilité des concepteurs de programmes favorisent un cloisonnement entre disciplines mais aussi entre niveaux scolaires à l'intérieur des mathématiques.

Eric Laguerre rend compte d'une expérimentation réalisée en 3^{e} dans le double but de que les élèves comprennent au moins partiellement le phénomène d'éclipse totale du soleil et que soit introduite la notion de tangente. La situation fait intervenir une double modélisation : modélisation du phénomène astronomique par une situation physique de visée dont il est possible de faire vivre aux élèves une expérience directe, puis modélisation de celle-ci par un modèle géométrique, qui est l'occasion d'une première rencontre avec le concept de tangente comme outil. Il s'agit donc d'un exemple de réalisation qui pour les mathématiques est en cohérence avec le programme de la classe pour lequel il fournit un point d'appui. Mais la présentation détaillée de la situation fait bien apparaître sa complexité et son coût temporel : plusieurs séances sont nécessaires pour atteindre pleinement les objectifs visés au bénéfice des deux disciplines.

Les deux travaux précédents ne mentionnent pas une collaboration avec un chercheur ou un enseignant de la discipline non mathématique impliquée. C'est encore le cas de la soumission de Hicham Maadan, enseignant de mathématiques qui a présenté au groupe une de ses réalisations en classe. La séquence s'appuie sur un énoncé d'inspiration écologique proposé par un manuel de mathématiques. Dans le cadre d'un travail de groupes, les élèves sont conduits à modéliser la situation par des suites récurrentes et à étudier leur évolution. La séquence est riche du point de vue des mathématiques. Par contre, l'intervention de l'écologie est assez ponctuelle : la validité du modèle relativement au phénomène de déboisement étudié n'est jamais questionnée.

2. *Les mathématiques comme une contribution à un projet multi-dimensionnel*

La réalisation présentée par Marie-Hélène Lécureux-Têtu est un dispositif construit autour de la recherche sur les nanotechnologies et les questionnements éthiques associés. Expérimenté en classe de 3^{e}, il met à contribution les enseignants de mathématiques, physique-chimie, technologie, français, anglais et éducation civique, juridique et sociale mais aussi des chercheurs d'un laboratoire sur les nanotechnologies. Les mathématiques sont impliquées dans les questions d'échelle et de représentations de très petites longueurs. Les quatre séances de sciences sont analysées dans la communication, elles associent à chaque fois les enseignants de deux disciplines. Un phénomène que l'on pourrait nommer « oubli des disciplines non physiquement représentées» est constaté plusieurs fois : les apports des disciplines absentes sont négligés, c'est le cas des techniques de mesurage en l'absence de l'enseignant de technologie, des techniques de calculs de quatrième proportionnelle en l'absence de l'enseignant de mathématiques. Ceci peut s'expliquer par l'effacement des disciplines derrière l'objet du projet mais aussi par les effets transpositifs qui affectent les praxéologies dans leur passage d'une discipline à l'autre, par exemple le monopole du produit en croix pour la proportionnalité en dehors des mathématiques. Chaque enseignant importe dans les séances où il est présent la culture de sa discipline, rendre cohérent ce qui est au total présenté aux élèves exige certainement un travail de préparation hors classe conséquent.

3. *Les mathématiques comme objet d'étude d'une autre discipline*

La contribution de Charlotte de Varent s'inscrit dans un travail de thèse dirigé par un didacticien et une historienne, visant la réalisation d'une ingénierie didactique basée sur l'utilisation de textes anciens comme point d'appui pour l'enseignement des mathématiques. Les mathématiques n'y interviennent pas en tant qu'outil de résolution d'un problème issu d'une autre discipline. Au contraire, dans le texte présenté au groupe, l'histoire des mathématiques anciennes, grâce à la variété des éclairages qu'elle apporte sur les relations entre grandeurs et nombres, est mobilisée comme outil pour questionner des réalisations didactiques autour de la notion d'aire. Autrement dit, les connaissances historiques sont utilisées comme outils de la recherche didactique, elles pourraient de même l'être pour les enseignants de mathématiques, en les aidant à porter un regard critique sur un enseignement donné. L'hypothèse de la thèse est que l'introduction d'une dimension historique avec les élèves constituerait également un point d'appui pour un meilleur apprentissage de certaines connaissances mathématiques. Ceci est une forme de relation entre deux disciplines très différente des précédentes : aucune des deux disciplines n'est un outil pour l'autre, la discipline non mathématique est un outil pour leur enseignement et ce parce qu'elle prend les mathématiques ou certaines de ces productions comme objets d'étude.

III. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Comme on vient de le voir, les travaux discutés dans le groupe étaient d'une grande variété. Néanmoins lors du bilan final, les participants ont exprimé un avis très positif en mettant en avant la richesse des échanges. On peut avancer qu'une cohérence s'est construite, par delà les différences, en s'appuyant sur un point commun : une ouverture à la diversité des mondes de savoirs, ayant débouché pour chacun sur une rencontre concrète avec, ce que suivant la Théorie Anthropologique du Didactique, nous désignerons comme une ou des institutions scientifiques ou professionnelles non mathématiques. Chaque participant avait donc déjà fait l'expérience du besoin d'explorer les épistémologies et organisations praxéologiques des différentes institutions en jeu et d'analyser les effets transpositifs de la circulation des savoirs et, plus complètement des praxéologies. La réflexion commune a donc pu se développer à ce niveau.

Trois directions de recherche différentes sont apparues dans ce groupe qui, chacune, mériterait un développement autonome : une anthropologie épistémologique visant l'étude de la vie des savoirs mathématiques, une didactique de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement technique et professionnel et enfin l'interdisciplinarité. Faut-il créer des groupes autonomes ? Les participants à la session de 2015 ont plutôt plaidé pour un statu quo. Tout peut dépendre du nombre de soumissions reçues.

Faisons l'hypothèse que la création du dispositif des EPI (Enseignements Pratiques Interdisciplinaires) en France va être l'occasion d'un développement de recherches actions et de recherches académiques sur l'interdisciplinarité. L'organisation d'un colloque Inter IREM en mai 2016 associant enseignement en collège et enseignement professionnel en est un indicateur. Les questions rappelées plus haut et soulevées dans l'appel à communication du GT5 resteraient d'actualité pour un GT centré sur ce thème. Il serait important d'avancer sur la définition des enjeux d'apprentissage visés par ces dispositifs :

> *En quoi contribuent-ils à la formation disciplinaire ? S'expriment-ils en termes de compétences indépendantes des disciplines ? Existe-t-il des savoirs à construire dans l'un et l'autre cas ? Ces savoirs sont-ils explicités, institutionnalisés ? Plus généralement, par quelle organisation didactique cherche-t-on à s'assurer de la réalisation de ces apprentissages ? Comment évalue-t-on la réalisation de ces apprentissages par les élèves ?*

A propos de toutes ces questions, on pourrait appeler à une réflexion spécifique sur la forme d'interdisciplinarité qui ne consiste pas en une interaction dissymétrique entre deux disciplines (par exemple, les mathématiques permettant de résoudre un problème posé par une autre discipline) mais en la mobilisation quasi indépendante de plusieurs disciplines pour éclairer un objet commun.

Par ailleurs, il serait bienvenu que, pour toutes les formes d'interdisciplinarité, des communications abordent la question des modalités de travail des enseignants impliqués.

REFERENCES

Ba C., Bessot A., Caron F. (2012) Compte-rendu du Groupe de Travail n°5. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle-Actes du colloque EMF 2012* (pp. 663-667).

Castela C., Elguero C. (2013) Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 33(2), 79-130.

Fontolliet P.-G. (2002) Interdisciplinarité et nouvelle maturité. In Perrig-Chilello P., Darbellay F. (dir.) *Qu'est-ce que l'interdisciplinarité ? Les nouveaux défis de l'enseignement* (pp. 37-43). Lausanne : Réalités sociales.

INFLUENCE DE LA SÉMIOTIQUE D'UNE MACHINE-OUTIL À COMMANDES NUMÉRIQUES SUR L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS DANS LA FILIÈRE PRODUCTIQUE-USINAGE EN LYCÉE PROFESSIONNEL

Nathalie AUXIRE[*] – Nicole BIAGIOLI[*] – René LOZI[*]

Résumé – Dans le cadre d'une approche comparatiste de l'enseignement des vecteurs par trois disciplines de la filière productique-usinage de lycée professionnel, nous montrons, en couplant l'analyse de discours d'enseignants et l'analyse épistémologique de l'objet vecteur, comment la sémiotique d'une machine à commandes numériques implantée dans l'atelier de productique-usinage influence le discours de l'enseignant de l'une des disciplines connexes : la construction mécanique. Nous discutons la cohérence et les limites qu'une telle influence exerce sur le discours enseignant à travers les ressources sémiotiques disponibles dans la discipline, la mémoire de la classe entre les disciplines et les objectifs disciplinaires.

Mots-clefs : mathématiques, vecteur, interdidactique, discipline technologique, sémiotique

Abstract – We have compared vector teaching in three subjects at vocational secondary French school : mathematics, mechanical machining, engineering and technical design. Our method is grounded in a cross-cultural approach and combines discourse analysis with epistemological analysis. We show how the semiotics of a computer numerical control machine, set in the machining classroom, influences teachers' discourse in engineering and, to a lesser extent, in mathematics. We examine the way in which this influence strengthens the coherence of general vector teaching in this educational program about the way of writing, as well as operating and modeling with vectors, due to the semiotic tools available in the context and the specific educational goals.

Keywords: mathematics, vector, cross-cultural approach, technological subject, semiotics

I. INTRODUCTION : LES VECTEURS, UN ENJEU DANS LA FILIÈRE PRODUCTIQUE-USINAGE

1. *Le contexte de la filière productique-usinage*

Le lycée professionnel, au sein duquel se trouve la filière productique-usinage, recrute après le collège, des élèves de 15 ans se destinant à des études courtes : pour un domaine d'activités professionnelles donné, une formation mixte (professionnelle et générale) de trois années y est dispensée conduisant à la délivrance d'un baccalauréat professionnel et à la possibilité d'occuper un poste de technicien.

[*] Université de Nice Sophia Antipolis, EA 6308. Laboratoire I3DL– France – auxire@unice.fr, biagioli@unice.fr, lozi@unice.fr

Auxire N., Biagioli N., Lozi R. (2015) Influence de la sémiotique d'une machine-outil à commandes numériques sur l'enseignement des vecteurs dans la filière productique-usinage en lycée professionnel, Actes EMF2015 – GT5, pp. 431-442.

La filière productique-usinage organise sa formation à partir de la discipline technologique *construction mécanique*, de la discipline professionnelle *productique-usinage* et de disciplines générales souvent bivalentes dont la discipline *mathématiques-sciences physique et chimiques*.

La productique-usinage est un domaine d'activités industrielles dans lequel des objets techniques sont d'abord conçus en réponse à un besoin matériel puis produits à partir de barreaux d'acier par enlèvement de matière à l'aide de machines-outils automatisées et enfin contrôlés en qualité. Dans le contexte d'une entreprise, le cycle de vie d'un projet de produit technique implique différents métiers (concepteur, dessinateur, usineur, contrôleur). Théoriquement, il résulte d'une approche systématique visant à rationaliser les procédures et à optimiser les ressources (temps de travail, matière, occupation des machines-outils, transmission des informations). Les documents techniques circulant entre les différents acteurs pour réaliser le projet d'un produit technique sont conçus dans cette perspective d'économie des ressources et de minimisation des erreurs.

En tant que discipline technologique, la *construction mécanique* enseigne la technologie des systèmes mécaniques et la lecture-écriture normalisée des dessins techniques. En tant que discipline professionnelle, la *productique-usinage* a pour objectif de rendre compétents et autonomes les élèves concernant la mise en œuvre de procédures de production unitaire ou industrielle (installation et maintenance de machine, contrôle de pièce, qualité de procédure), l'interprétation et la modification de documents techniques. Contribuant fortement à la modélisation géométrique et numérique des objets tridimensionnels, les mathématiques amènent à considérer ces deux disciplines comme mathématisées.

La filière productique-usinage, peu connue, recrute souvent des élèves dont le premier choix d'orientation à l'issue du collège était autre et dont le niveau en mathématiques est faible (en numération décimale et en opérations élémentaires notamment).

Il aurait été intéressant d'élargir notre étude à l'enseignement des mathématiques par les sciences physiques, d'autant plus qu'au lycée professionnel, les enseignants de mathématiques enseignent aussi les sciences physiques et chimiques. Cependant, nous ne l'avons pas fait car nous avons souhaité aborder l'apprentissage de l'espace mathématique dans des disciplines qui organisent leur enseignement théorique en situation, c'est-à-dire dans l'espace physico-technologique des machines, ce à quoi satisfont les disciplines *construction mécanique* et *productique-usinage*.

2. *Les vecteurs dans la filière productique-usinage*

En mécanique et en productique-usinage, les vecteurs sont omniprésents pour raisonner dans l'espace : orienter une surface dans un dessin technique, programmer des positions sur une machine-outil, calculer des efforts sur un élément d'un objet technique, décrire une liaison entre deux pièces d'un objet technique…

A partir des documentations disciplinaires de la productique-usinage et de la construction mécanique, nous avons répertorié quatre fonctions des vecteurs : (1) calculer numériquement des grandeurs physiques ou géométriques dans le plan affine euclidien, (2) calculer graphiquement dans le plan affine, (3) décrire des rotations ou des translations dans l'espace euclidien, (4) classer des liaisons entre surfaces.

Dans cette contribution, nous présentons des résultats relatifs aux vecteurs selon la fonction (3) uniquement. Ils sont issus de la thèse de N.Auxire, *Interdidactique de l'enseignement des mathématiques dans la filière productique-usinage du lycée professionnel*, soutenue en Novembre 2015, au laboratoire d'I3DL de l'université de Nice- Sophia Antipolis.

Nous analysons les discours enseignants sur les vecteurs relativement à l'activité de réglage d'une machine-outil dans les disciplines *construction mécanique* et *productique-usinage*.

3. Plan de la contribution

Premièrement, nous présentons le champ de l'interdidactique par ses présupposés, ses objets et ses méthodes. Ce champ constitue le cadre théorique de notre recherche.

Deuxièmement, nous décrivons nos données : elles sont constituées d'observations d'une machine-outil à commandes numériques en atelier et des discours de deux enseignants collectés au cours d'entretiens. Nous analysons la sémiotique[158] de la machine à commandes numériques ainsi que les discours enseignants autour des vecteurs en relation avec l'activité de réglage d'une machine-outil à commandes numériques.

Un enseignant de productique-usinage (noté E-pu2) fournit deux explications, l'une concernant l'activité de réglage d'une machine-outil précédant l'installation d'un outil, l'autre portant sur le concept de vecteur dans la filière productique-usinage. Un enseignant de construction mécanique (noté E-cm) improvise pour ses élèves une interrogation orale portant sur l'addition vectorielle.

Troisièmement, nous discutons d'une part la relation entre les modalités d'enseignement d'objets mathématiques et les ressources sémiotiques disponibles et, d'autre part, la liaison des enseignements par les mathématiques dans la filière scolaire de productique-usinage.

II. METHODES DE L'APPROCHE INTERDIDACTIQUE

1. Le champ de l'interdidactique et ses présupposés

Selon Biagioli (2012, p.3),

> l'interdidactique est un domaine de recherche qui concerne l'étude des phénomènes résultant de la coexistence des disciplines d'enseignement dans le cursus scolaire et universitaire. […] le terme 'interdidactique' désigne la partie des pratiques enseignantes et apprenantes concernée par l'articulation des apprentissages notionnels, discursifs et linguistiques des disciplines étudiées, et la recherche qui les prend pour objet. Les travaux […] s'organisent autour de trois thèmes :
>
> - l'impact des disciplines scolaires et universitaires sur la construction de l'identité professionnelle des enseignants et des apprenants ;
>
> - la complexité spécifique des phénomènes qui résultent de la mise en relation des disciplines au cours des apprentissages ;
>
> - l'influence de la mondialisation des savoirs sur les systèmes scolaires et universitaires, les curriculums et les pratiques d'enseignement, les dispositifs d'intégration scolaire et linguistique.
>
> Ces thèmes répondent au besoin de situer l'évolution des disciplines.

Dans cette contribution, notre approche interdidactique se focalise sur les discours enseignants relatifs à un même objet mathématique (le vecteur pour caractériser un déplacement) enseigné par deux disciplines de lycée professionnel. Les discours enseignants révèlent des variations interindividuelles de pratiques couplées à des variations culturelles induites par les spécificités disciplinaires et contextuelles.

---

[158] La sémiotique étudie les relations entre les signes (symbole, icône, indice), leurs référents (ce que les signes désignent) et les utilisateurs de ces signes : comment les signes sont-ils organisés pour former un message qui a l'effet voulu dans un système d'interprétation ?
Selon Peirce (1839-1914), un signe est un symbole s'il nécessite une convention sociale d'interprétation, une icône si l'interprétation s'appuie sur des ressemblances apparentes avec le référent, un indice si l'interprétation se fait grâce à la proximité (geste de pointer du doigt, soulignement d'un mot, …).

Notre démarche consiste d'abord à recueillir la représentation qu'un enseignant a de « la fréquentation des mathématiques qu'il organise pour [ses élèves] dans sa classe » (Robert & Rogalski 2002, p.3) ou pour lui-même et de croiser cette représentation déclarée, donc reconstruite, avec les pratiques disciplinaires. Notre analyse consiste à étudier les tensions, compatibles ou non, entre les différentes représentations recueillies.

La démarche comparatiste de l'interdidactique présuppose que les productions intellectuelles ou esthétiques, linguistiques ou scientifiques, scientifiques ou technologiques ne sont pas séparées : elles sont des éléments différents d'une même culture. L'école et les disciplines sont des constructions sociales de cette culture mais sont aussi des espaces de différenciation culturelle. Nous plaçons notre étude dans le champ de l'interdidactique pour chercher des phénomènes explicatifs des variations de l'enseignement des mathématiques à travers différentes disciplines. Ce présupposé inscrit l'interdidactique dans le champ de la Théorie Anthropologique du Didactique, les variations culturelles exprimant la dimension récursive de notre institution scolaire :

> Toute institution admet un environnement qui est un univers culturel ; tout univers culturel est une institution ; toute institution peut fonctionner comme univers culturel pour d'autres institutions (dont elle constitue alors l'environnement culturel). (Chevallard 1988, p. 97)

2. *Des objets de l'interdidactique*

Les acteurs d'une discipline recourent à une palette d'outils sémiotiques, parmi lesquels la langue naturelle et la sémiotique spécifiquement disciplinaire (jargon, notations, situations de référence, signes vestimentaires, gestes...). Or l'usage sémiotique est situé : il dépend des contenus disciplinaires prescrits mais aussi du contexte de recrutement des élèves, des moyens de production sémiotique, des valeurs accordées à l'oral et à l'écrit, des objectifs éducatifs de la discipline et enfin de la relation didactique de l'enseignant et de ses élèves entre eux et vis-à-vis des autres disciplines.

La notion de langage disciplinaire (Auxire, Biagioli & Lozi. 2014 ; Auxire 2014) exprime ce tissu complexe entre les outils sémiotiques, les acteurs et le genre dominant de communication. Dans cette perspective, la langue naturelle et les moyens de production sémiotiques (Barrier, Chesnais & Hache 2014 ; Radford 2006), témoignant de la dualité oral-écrit, apparaissent comme objets d'étude privilégiés de l'interdidactique pour leurs fonctions d'articulation entre :

- la tâche prescrite et l'activité,
- les différentes significations d'un concept d'une discipline à l'autre,
- les conceptions véhiculées par la langue naturelle et les conceptions scientifiques visées par les enseignements disciplinaires.

3. *Méthodes : couplage de l'analyse du discours et de l'analyse épistémologique*

L'interdidactique envisage les processus d'enseignement-apprentissage comme un espace-temps où coexistent différentes variétés culturelles (celle des acteurs, celle des disciplines) observables à travers les langages disciplinaires. Notre méthode d'analyse des productions langagières combine l'analyse de discours et l'analyse épistémologique des objets enseignés.

L'analyse du discours s'applique aux textes ou aux dires oraux. Celle-ci considère le type de discours (narration, argumentation, description), les marques de l'énonciation (marques expressives de la situation et de la subjectivité de l'énonciateur en lien avec le destinataire du discours), les valeurs modales, le genre de discours (présupposé, stéréotype), la diversité sémiotique (parole, geste, dessin). L'analyse du discours apporte en plus des données informatives, des données expressives habituellement cachées car elles ne sont pas écrites (Perrenoud 1993) et indicatrices de l'identité professionnelle acquise (Jouet Le Pors 2004).

L'analyse épistémologique d'un concept enseigné donne une fonction au concept selon les situations-problèmes résolues par ce concept et place ce concept dans un réseau de concepts. Dans une discipline, les fonctions et la situation réticulaire d'un concept établissent un rapport entre savoir, savoir-faire et compétence, rapport qui s'apparente à la notion de praxéologie de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1997). Pratiquement, l'analyse épistémologique permet de décrire les changements induits par un changement de discipline et outille la discussion sur les dispositifs institutionnels de liaison des enseignements disciplinaires.

Pour notre part, nous étudions comment un enseignant de construction mécanique opère et justifie certains choix vis-à-vis de la discipline de productique-usinage dans son discours didactique sur les vecteurs dans une situation de déplacement.

III. PRESENTATION ET ANALYSE DES DONNEES

A partir des discours de deux enseignants et de l'observation du préréglage d'une machine-outil, nous étudions quelle sémiotique se développe à propos du vecteur comme objet mathématique enseigné.

1. Synthèse par un enseignant de productique-usinage

Le discours ci-après résume les attentes de la filière productique-usinage telles que l'enseignant de productique-usinage (E-pu2) se les représente en répondant au chercheur (Ch).

1-Ch : quels sont les savoirs sur les vecteurs nécessaires pour le baccalauréat productique-usinage ?

2-E-pu2 : comprendre la différence entre sens et direction/ c'est la position dans le repère/ comprendre les changements de repère/ on recherche ce vecteur/ mais aussi la norme qu'ils recherchent/ / un vecteur reste un modèle mathématique d'une force/ d'une tension/ d'un déplacement// si j'enlève les éléments/ il reste la chaîne vectorielle

E-pu2 envisage des situations étudiées dans d'autres disciplines (construction mécanique ou sciences physiques) mais les indicateurs vectoriels qu'il cite font référence aux vecteurs d'un espace affine euclidien (repère, norme) et à leur décomposition (*chaîne vectorielle*) rendue possible par le choix d'un repère. La chaîne vectorielle évoquée ici est le modèle géométrique représentant les positions relatives des différents organes de la machine, assimilés à des points (origine-machine, origine-porte-pièce, origine-programme, origine-porte-outil, point générateur). Dans une base orthonormée directe, les vecteurs permettent de représenter des écarts orientés, d'abstraire le principe de réglage de la machine puis d'appliquer à différentes situations selon qu'on connaît les écarts entre l'une ou l'autre des origines. Lorsqu'on dessine les vecteurs, on obtient, selon chaque direction, des vecteurs bout à bout : d'où l'expression « *chaîne vectorielle* » que l'enseignant forme par analogie avec l'expression « chaîne géométrique » qui, en productique, désigne les positions relatives de la pièce et de l'outil par rapport à la machine.

2. La machine à commandes numériques

Une machine-outil à commandes numériques est un automate qui permet de régler les positions relatives du porte-outil et du porte-pièce et la vitesse d'avance ou de rotation de l'outil. Dans la discipline de productique-usinage, la fiche d'observation (figure 1) destinée aux élèves pour anticiper le réglage montre une représentation schématique d'une machine-outil et de son référentiel de mouvements.

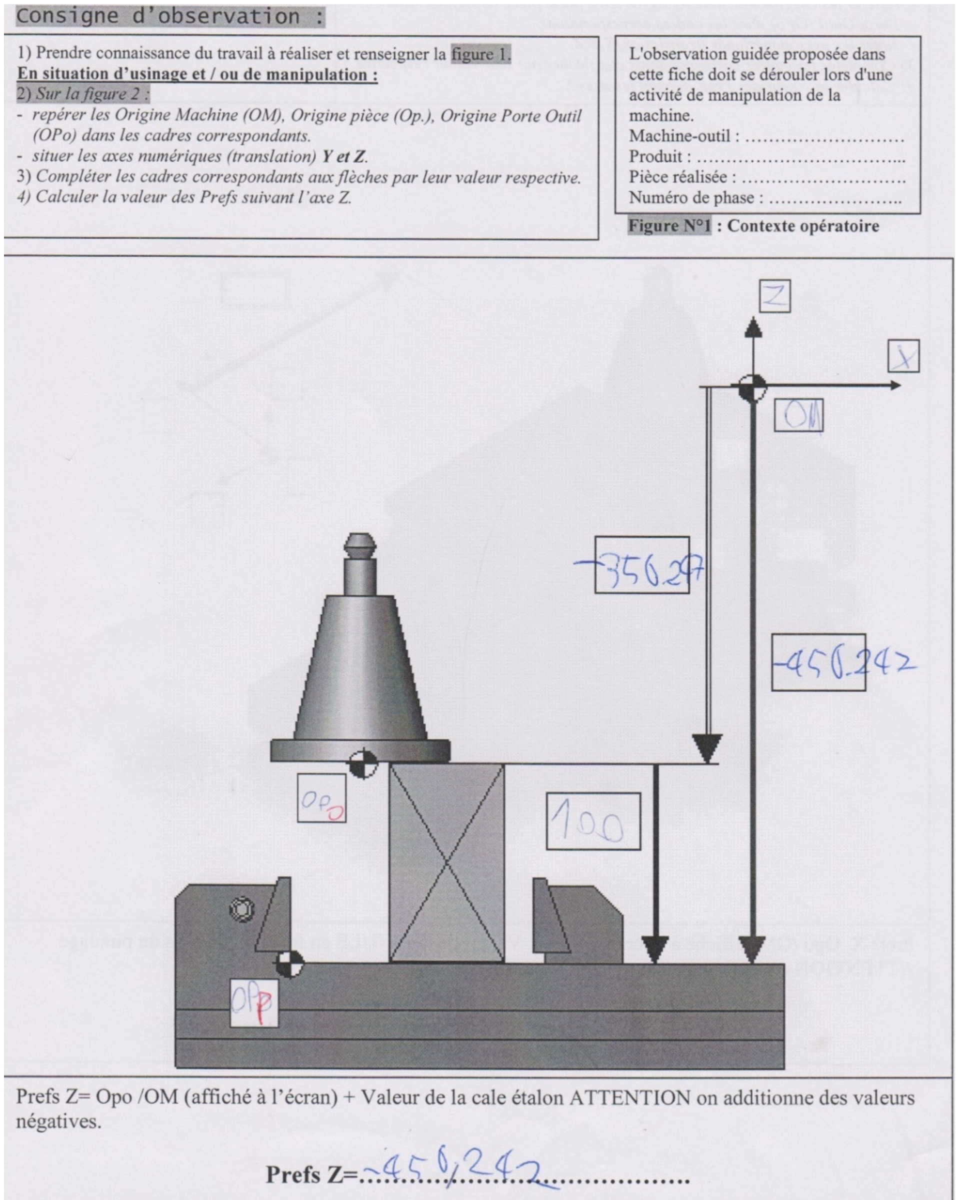


Figure 1–*Schéma du référentiel de mouvements associé à une machine-outil à commandes numériques. Document pédagogique transmis par E-pu1.*

Le modèle mathématique sous-jacent est un repère affine orthonormé direct dans lequel l'axe orienté des Z positifs est la direction modélisant la trajectoire rectiligne du porte-outil s'éloignant orthogonalement du plan contenant le porte-pièce.

Le technicien d'usinage programme la machine par une séquence d'instructions en code-machine correspondant à une phase d'usinage. Avant de lancer la machine, il doit replacer le porte-outil en position initiale. L'initialisation est commandée en entrée au clavier et contrôlée en sortie par lecture de l'écran (figure 2) ou observation directe du porte-outil.

Figure 2– *Contrôle d'une machine-outil à commandes numériques.*

Expliquons la sémiotique de l'écran de la machine (figure 2).

Le porte-outil est modélisé par un point géométrique appelé *point courant* (PT COUR) dans un repère orthonormé direct défini par le constructeur et dont l'origine, appelée *origine mesure*, est notée Om dans les documents pédagogiques. Un point auxiliaire, appelé *origine programme*, noté OP, conceptuellement très proche de Om, sert de référence pour exprimer les mesures algébriques notées X, Y, Z à l'écran dans ce repère (PT COUR/ OP). En situation de réglage, elles sont interprétables comme les coordonnées du point courant ou comme composantes d'une translation. La sémiotique de la machine-outil est ergonomique :

- stable dans son organisation spatiale (type tableau, format décimal au millième),
- facilitatrice dans le lien aux référents (abréviation, acronyme, signe explicite contrairement à l'usage mathématique qui ne spécifie par le +),
- spécifique (unité du millimètre non spécifiée, DELTA pour différence, POURSUITE pour itérer manuellement une commande de déplacement selon chaque axe).

Mathématiquement, la sémiotique de la machine-outil se réfère au champ conceptuel de repère affine euclidien. Technologiquement, l'axe OZ, qu'il corresponde ou non à un axe vertical, modélise toujours la direction de déplacement du porte-outil, orienté positivement lorsque l'outil s'éloigne de la pièce. La sémiotique de la machine-outil rend donc compte d'un modèle technologique mathématisé.

3. Explication par un enseignant de productique-usinage

La séquence conversationnelle présentée ici se déroule dans l'atelier entre quatre interlocuteurs : l'enseignant de productique-usinage (E-pu2), deux élèves de première professionnelle (E1, E2) et le chercheur (Ch). E-pu2 et ses élèves organisent une explication conjointe à l'attention de Ch du modèle mathématique permettant de raisonner spatialement à partir de la machine-outil.

1-E-pu2: donc euh // prise d'origine machine/ c'est d'euh // faire en sorte de coïncider euh les éléments réels de la machine avec c'qu'on appelle l'origine machine // l'origine machine / c'est le départ si vou'voulez de l'origine constructeur qui permet euh / ensuite tous les préréglages euh qui vont v'nir par la suite euh/ en termes de position de pièce// donc euh on/ on va initialiser si vous voulez la machine/ c'est une une// on va déplacer euh essentiellement des axes en visualisant sur son écran et euh en //

(*à E1*) comment tu fais là ? comment t'as fait ? qu'est-ce que tu vas faire par exemple ?

2-E1: euh/ là je fais mode mode manu / j'ai mis en marche la machine / j'ai fait euh encor' mode mode manu parc'que c'était d'jà en mode manuel donc j'ai déplacé les / les axes X moins euh Y et Z

3-E-pu2: donc là / tu viens d'déplacer les axes euh/ négatifs de la machine pour témoigner justement de cette origine machine qui est que (*inaudible*) prise de butée// c't-à-dire que c'est vraiment une limite physique/ si on atteint cette limite physique/ la machine se met en défaut/ on coupe euh // le contact électrique/ on arrête la puissance (*inaudible*)une histoire de prise de risque/ on peut taper// donc le constructeur a mis également une limite / euh au contact électrique// donc là/ i's'est décalé d'sa butée parc'qu'i va revenir sur sa butée (*à E1*) mais en quel mode ?/ en quel mode ?

4-E1: mode POM

5-E-pu2-: donc c'est un mode POM/ prise d'origine machine

6-E2: c'est fait / m'sieur/ i' l'a déjà fait

7-E-pu2: (*à E2*) oh/euh/ il le refait là / (*à Ch*) donc là/ i'va y aller en positif/ maint'nant retourner vers cette origine et / c'est la machine qui va lui indiquer où s'arrêter/ c't-à-dire elle va s'arrêter tout'seule// c'qu'i' n'peut pas faire en mode manuel bien sûr / si i'fait ça donc/ i'rentrera sur une butée

8-E1: ça y est /c'est les POM

9-E-pu2: voilà / donc là/ quand euh euh l'opération est effectuée qu'est-ce qui ? comment la machine t'indique qu'les POM sont réalisées ?

10-E1: ben il arrête de clignoter

11-E-pu2: donc là il est / il est rev'nu su'c'qu'on appelle l'origine machine/ euh en réalité y 'a deux origines/ origine mesure / origine machine/ on leur dit qu'c'est un peu confondu/ mais on voit qu'elles sont à trois millimètres euh (*montrant l'affichage numérique sur l'écran*)

Les résultats que nous mettons en avant montrent comment la situation d'énonciation permet d'appréhender l'influence de la sémiotique de la machine-outil sur l'enseignement des vecteurs pour décrire un déplacement de l'espace.

La sémiotique non symbolique de la machine-outil comprend des composantes matérielles (3-*prise de butée*, 3-*limite physique*) ou communicationnelles (10-*clignoter*) qui influencent le mode de validation et la conceptualisation du déplacement vectoriel.

Si le vecteur de déplacement est anticipé par calcul, ses modes de validation peuvent être perceptif (1-*visualiser*, 2-*écran*, 3-*taper*) ou procédural (2-*je fais…j'ai mis…j'ai fait…donc j'ai déplacé…*).

La notion de sens vectoriel est verbalisée en lien avec les informations lues sur l'écran (2-*les axes* X *moins*, 3-axe négatif) ou bien avec les mouvements matériels perçus (1-2-*déplacer les axes*, 7-*retourner vers cette origine*, 7-*aller en positif*).

Sur le plan du discours, le déictique personnel révèle une mosaïque de points de vue de la part de l'enseignant. Les points de vue du technicien professionnel (1-*on va initialiser si vous voulez, 3-si on atteint cette limite physique… on coupe*), du compagnon d'apprentissage (1-*qu'est-ce que tu vas faire… ?* 3-*…tu viens d'déplacer les axes*), de l'enseignant (7-*il le refait là*, 11-*on leur dit qu'c'est un peu confondu…*) coexistent et donnent au discours didactique des ressorts de différentes natures : technologique, pragmatique, mathématique. La multiplicité des points de vue est un indicateur de professionnalité (Jouet Le Pors 2004).

Enfin, l'analyse de discours fait apparaître des modalisateurs épistémiques (3-*pour témoigner justement … c'est vraiment une limite physique*, 11-*en réalité…c'est un peu confondu mais on voit*…). Le discours de l'enseignant se positionne par rapport au système de connaissances technologiques relatives au concept de machine-outil.

L'enseignement des vecteurs dans le langage de la discipline de productique-usinage s'appuie donc sur un mode d'interprétation couplant perceptions et lecture symbolique et sur la pluralité des rôles sociaux de l'enseignant.

4. *Mise en œuvre par un enseignant de construction mécanique*

Dans un entretien à propos des compétences des élèves en mathématiques dans la filière productique-usinage, un enseignant (E-cm) de la discipline construction mécanique souligne la difficulté à enseigner une discipline mathématisée à des élèves en difficultés dans leurs apprentissages scolaires en mathématiques. Répondant à la question initiale du chercheur (Ch), E-cm improvise une interrogation des élèves présents dont les traces orales et écrites sont reproduites en parallèle (figure 3).

4 Ch: je voudrais que vous me parliez des connaissances mathématiques de vos élèves, me dire ce que vous avez repéré comme savoir-faire/ ceux qui sont maîtrisés/ ceux qui ne le sont pas/ ce genre de choses

5 E-cm :y'a d'gros problèmes en maths/ savoir mesurer/ savoir mesurer en millimètre / c'est la panique en dehors du centimètre// les surfaces/ les volumes/ les densités// dans la plupart des métiers il y a nécessité de métrer // aussi les vecteurs des efforts// la première chose c'est de pas parler des maths/ de s'détacher/ si on peut s'passer des maths/ c'est OK/ c'est l'résultat qui compte//(silence) y'a aussi les volumes/ les intervalles de tolérances/ le calcul de cote moyenne les conversions les échelles//mais je crois qu'vous vous rendez pas compte du niveau qu'i'ont/ tenez on va faire un test (*l'enseignant appelle cinq élèves en train de travailler en autonomie sur un logiciel, va au tableau et s'adressant à eux*) j'vais vous poser dix questions / vous répondez

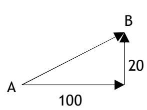
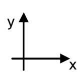
Ce que l'enseignant écrit au tableau	Ce que l'enseignant dit oralement
$A\left\vert\begin{matrix}+0\\+12\\+26\end{matrix}\right.$   $B\left\vert\begin{matrix}?\\?\\?\end{matrix}\right.$	j'suis sur une commande numérique/ j'fais un déplac'ment on est là/ vu de dessus (l'enseignant pointe le repère qu'il a dessiné avec le bâton de craie)

Figure 3*–Les discours d'un enseignant de construction mécanique.*

E-cm a fait s'appuie sur la situation de réglage d'une machine-outil (*j'suis sur une commande numérique/ j'fais un déplac'ment*) issue de la discipline connexe de productique-usinage pour dévoluer aux élèves la situation de calcul. Son évocation combine la sémiotique du dessin technique (repère orthonormé du plan (oxy)), du calcul graphique (dessin du triangle) et celle de la machine-outil (signes explicités composante par composante, matrice colonne sans parenthèse).

L'absence de réponses correctes parmi celles des élèves (figure 4) confirment une difficulté soit à utiliser le formalisme pour déterminer les composantes du vecteur de translation, soit à opérer entre coordonnées homologues, soit à interpréter les dessins (la vue de haut et la somme par le bout-à-bout).

Rappel de la question posée	Réponse attendue	Réponses des élèves
Calcul des coordonnées du point image de $A\left\vert\begin{matrix}+0\\+12\\+26\end{matrix}\right.$ par le vecteur de translation $\overrightarrow{v}\left\vert\begin{matrix}100\\20\\0\end{matrix}\right.$.	$B\left\vert\begin{matrix}+100\\+32\\+26\end{matrix}\right.$	$B\left\vert\begin{matrix}0\\100\\20\end{matrix}\right.$ $B\left\vert\begin{matrix}100\\0\\46\end{matrix}\right.$ $B\left\vert\begin{matrix}20\\112\\26\end{matrix}\right.$ $B\left\vert\begin{matrix}0\\32\\126\end{matrix}\right.$ Un élève ne répond pas.

Figure 4*–Les réponses des élèves.*

Malgré l'évocation d'une activité emblématique de la productique-usinage (le réglage d'une machine-outil), le milieu observé à l'occasion de cet entretien est peu comparable : il ne contient ni la machine-outil elle-même, ni son écran de contrôle. En productique-usinage, la signification donnée au vecteur de translation est ancrée dans la manipulation de la machine-outil avec, comme nous l'avons vu, des modes de validation combinés (perception, lecture numérique). Le langage de la discipline construction mécanique, ne disposant pas des mêmes ressources sémiotiques, rend nécessaire des outils sémiotiques spécifiques (la vue de haut, les figures auxiliaires). Les réponses incorrectes des élèves font apparaître des difficultés d'ordre mathématique sur la notation des composantes vectorielles en matrice colonne (ordre, correspondance, lien avec la projection dans le plan).

IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Notre discussion porte sur la manière dont les ressources sémiotiques fournies par la machine à commandes numériques influencent les discours disciplinaires d'enseignement de certains objets mathématiques. Afin de situer ces objets par rapport aux objets mathématiques déclarés dans la filière productique-usinage, nous avons interrogé le programme de mathématiques de la discipline *mathématiques-sciences physiques et chimiques (*BOEN[159] spécial n°2 du 19/02/2009. http://www.education.gouv.fr/pid20873/special-n-2-du-19-fevrier-2009.html).

En seconde, l'espace est travaillé « à partir de quelques solides connus, [dont sont extraites] des figures planes connues » permettant « de réactiver des propriétés de géométrie plane » du collège (Ibid. p.9). En première, lors de son introduction, le vecteur est décomposé dans un repère orthonormé du plan. En terminale, « le passage du plan à l'espace se fait de façon intuitive » (Ibid. p.22) et le vecteur se décompose alors dans un repère orthonormé de l'espace. Aucune translation, en tant que transformation du plan ou de l'espace, n'est citée dans le programme de mathématiques. Aucun système de notation des coordonnées vectorielles n'est préconisé pour lier les enseignements généraux et spécialisés. Lorsque les élèves entrent en seconde professionnelle, il leur appartient de coordonner l'enseignement de la discipline générale en mathématiques restreint au plan à ceux des disciplines spécialisées (*productique-usinage* et *construction mécanique*) de l'espace tridimensionnel. Dans le cadre de dispositifs de liaison des enseignements, la partie *mathématiques* de la discipline générale est éventuellement sollicitée pour consolider l'addition vectorielle graphique (dans le cas de bilan de forces) ou l'addition de nombres négatifs (figure 1).

Au premier abord, la sémiotique de la machine-outil à commandes numériques constitue une ressource qui rend possible l'enseignement informel des translations de l'espace. En effet,

[159] BOEN : Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale

dans la discipline *productique-usinage*, le modèle vectoriel est mobilisé en présence de la machine-outil et sa syntaxe est stable et non assujettie aux choix de l'enseignant. Les formes sémiotiques utilisées prennent sens au sein de la machine-outil et peuvent ne pas poser de difficultés d'interprétation aux élèves. En contexte professionnel, Rogalski et Vidal-Gomel (2007, p. 73) indiquent qu'une interprétation pertinente des formes sémiotiques de façon spontanée reste possible tant que la syntaxe de ces formes n'est pas perturbée ou que la tâche associée n'est pas modifiée. Les difficultés des élèves à calculer les coordonnées du point translaté (figure 4) montrent que le transfert d'une discipline à l'autre ne va pas de soi car ou bien les ressources sémiotiques ne sont pas conservées, ou bien leurs fonctions changent.

En productique-usinage, le contrôle du réglage de la machine-outil prévaut : la sémiotique est orientée vers la facilitation de la prise d'informations alpha-numériques et perceptives. Ainsi, on retrouve, un des résultats des travaux de Castela et Romo Vázquez (2011) : à travers les situations et le matériel (instrument, matière, logiciel), les disciplines technologiques convoquent les objets mathématiques dont la théorie reste enfouie.

En construction mécanique, la sémiotique est orientée vers l'analyse de données techniques et leur communication de manière anticipée à l'action. L'évocation d'une situation de référence de productique-usinage ne suffit pas à régler la différence d'activité mathématique.

La machine-outil à commandes numériques a toutefois une dimension interdidactique : elle ancre l'expression de la cohérence des deux disciplines spécialisées.

La discipline générale se démarque. Certes, elle fournit des outils conceptuels (point, vecteur, base orthonormée, etc.) pour raisonner dans l'espace de la productique-usinage. Mais, elle n'est pas synchronisée aux disciplines spécialisées (les vecteurs de l'espace ne sont programmés qu'en terminale) et est, seule parmi les trois disciplines, désignée pour dispenser des compléments (sur les vecteurs) en vue d'une poursuite d'étude (BOEN n°2 du 19/02/2009, p. 24).

En conclusion, nous avons étudié un objet enseigné porteur d'une même fonction épistémologique par différentes disciplines, comparables au sein d'une même filière. L'analyse des discours enseignants fournit des arguments explicatifs sur le partage ou le non-transfert de ressources sémiotiques entre deux disciplines, c'est-à-dire sur la faisabilité de la liaison des enseignements.

REFERENCES

Auxire N., Biagioli N., Lozi R. (2014) Analyse de discours d'enseignants de différentes disciplines de lycée professionnel à propos de l'enseignement des vecteurs. *Spirale Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques* 54, 103-128.

Auxire N. (2014) Conditions d'apparition et indicateurs de la présence des langages disciplinaires. In Hache C. et Spitalas C. (Dir.) *Séminaire national 2013 des jeunes chercheurs de l'ARDM* (pp. 11-20). Paris: IREM de Paris.

Barrier T., Chesnais A., Hache Ch. (2014) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale : Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques* 54, 175-193.

Biagioli N. (2012) Les rencontres des chercheurs en interdidactique. In Lozi R. et Biagioli N. (Eds.) *L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'Université. Actes des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique* (pp. 1-7). Université de Nice-Sophia Antipolis.

Castela C., Romo Vázquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (1988) Esquisse d'une théorie formelle du didactique. In Laborde C. (Ed.), *Actes du Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 97-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3), 17–54.

Jouet Le Pors M. (2004) *L'évolution des représentations sociales des étudiants infirmiers sur la profession infirmière au cours de la formation : un chemin vers l'autonomie et la professionnalisation pour une mise en œuvre de l' ''Agir'' infirmier*. Mémoire pour l'obtention du diplôme des hautes études en pratiques sociales. Université de Rennes 2.

Perrenoud P. (1993) Curriculum: le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (dir.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui* (pp.61-76). Paris: ESF.

Radford L. (2006) Elements of a cultural theory of objectification. *Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa,* Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 505-528.

Rogalski J., Vidal-Gomel C. (2007) La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *@ctivités, revue électronique* 4(1), 49-84.

DÉCONSTRUCTION-CONSTRUCTION D'UN CONCEPT MATHÉMATIQUE

Alberto CAMACHO*, Avenilde ROMO-VÁZQUEZ**

Résumé – Dans cette communication, nous nous proposons de montrer la déconstruction du concept de gradient dans un contexte non-mathématique, la topographie. Du processus de déconstruction dans ce contexte résultent de nombreuses techniques qui aident à établir une définition du gradient. La définition qui en dérive fait intervenir des éléments venant de la topographie, des mathématiques et des mathématiques académiques. L'empirisme qui apparaît dans la déconstruction conduit à utiliser comme cadre théorique le modèle praxéologique étendu de Castela et Romo-Vázquez (2011). En considérant la démonstration associée à ce concept, il est possible de concevoir des organisations didactiques dont il fait partie.

Mots-clefs : déconstruction, reconstruction, définition, topographie, gradient.

Abstract – In this paper, deconstruction of the concept of gradient is examined in a non-mathematical context, topography. Many techniques and practices that help establish a definition of gradient are a result of such a deconstruction. The definition is developed using some elements of topography as well as mathematics and academic mathematics. The empiricism revealed in the deconstruction leads to the use of the praxeological extended model of Castela and Romo-Vázquez (2011) as a theoretical framework. It is possible to conceive didactical organizations related to this concept by considering the proof associated with it.

Keywords: deconstruction, reconstruction, definition, topography, gradient.

I. INTRODUCTION

Un des objectifs de cette communication est de fournir une déconstruction du concept de gradient située en dehors de toute praxéologie mathématique, tant disciplinaire que scolaire, le contexte choisi est la topographie, vue comme Institution. La déconstruction est vue comme le processus inverse de la construction d'un concept, c'est à dire qu'on part d'un concept et on essaie de trouver tous les éléments qui en font partie. Au moins dans le travail dont il est question ici, la déconstruction des concepts mathématiques est faite à partir d'une analyse des usages, du concept en question, dans les sciences non-mathématiques. Cette analyse permet de repérer des significations associées aux utilisations ainsi que d'autres éléments intervenant dans le processus de construction du concept.

* Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Mexique, camachoalberto@hotmail.com
** Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Mexique, avenilderv@yahoo.com.mx

Camacho A., Romo-Vázquez A. (2015) Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 443-453.

Pour développer cette recherche, nous nous situons au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans l'objectif de réguler des phénomènes didactiques, cette théorie s'intéresse à la modélisation du savoir et des activités scolaires qui lui sont associées. Nous utilisons les notions d'institution et de praxéologie. La notion d'institution est considérée dans le sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire « comme un groupe des personnes aux yeux desquels au moins un objet existe » -cité dans Gantois (2012, p.48)- par exemple : l'école, l'œuvre mathématique des différentes époques, les manuels, etc. Nous considérons aussi le point de vue de Castela et Romo-Vázquez (2011) :

> Les *institutions,* c'est-à-dire des organisations sociales stables, encadrent les activités humaines et simultanément les rendent possibles par les ressources que ces institutions mettent à disposition de leurs sujets. Ces ressources matérielles et intellectuelles ont été produites par des communautés, tout au long des processus d'affrontement à des situations problématiques qu'il s'agit de surmonter avec régularité et efficacité. (Op. cité, p. 85)

Dans ce cadre, les organisations mathématiques (OM) sont reconnues comme praxéologies canoniques, principalement validées par la démonstration mathématique, validation dominante et privilégiée au sein de l'institution de production de savoirs mathématiques. Les praxéologies canoniques peuvent être explicités à partir de l'unité d'analyse [T, τ, θ, Θ] (op. cité), dont T est un type de tâches à résoudre dans un environnement scolaire, τ est la technique qui permet de réaliser la tâche du type T, θ la technologie est un discours qui produit la technique (théorèmes, axiomes, définitions, etc.) et Θ est un discours théorique qui à son tour produit, explique et valide la technologie.

On part de l'hypothèse que les praxéologies canoniques (OM) de l'institution enseignement des mathématiques, sont utilisées pour décrire des pratiques mathématiques habituelles sans prendre en compte des connaissances, des techniques et des pratiques issues des sciences non-mathématiques. Ce qui fait, par exemple, que les connaissances émergentes des sciences non mathématiques comme la topographie soient réduites à un type d'ethno-mathématique.

> L'utilisation de ressources de la physique et d'autres disciplines dans l'enseignement des mathématiques, est faite pour *motiver* l'introduction des sujets et d'objets mathématiques, pour interpréter des résultats des problèmes *pratiques* et même pour en résoudre. Ce type de résolution est demandé dans les programmes d'étude, principalement dans les formations du génie. Cependant, l'introduction de concepts externes à la pratique mathématique, implique d'autres types de techniques *pratiques* intermédiaires qui associées à des techniques mathématiques issues des théorèmes et définitions, permettent de résoudre certaines tâches. (Camacho & Sánchez 2015, p. 2)

La pratique est vue comme la capacité de l'homme à transformer et adapter les connaissances mathématiques aux circonstances des problèmes abordés, comme c'est le cas de l'activité d'ingénieurs et de topographes.

Notre objectif est de produire une définition du concept de gradient, qui, comme on le sait, associe un champ vectoriel à un champ scalaire, ce qui est fondamental tant dans la recherche en physique mathématique comme dans les mathématiques académiques, particulièrement dans l'enseignement du calcul vectoriel (enseignement centré sur la partie opératoire de l'analyse vectorielle).

La praxéologie du gradient peut être ainsi vue comme une codétermination entre praxéologies canoniques et praxéologies topographiques. Pour préciser les éléments technologiques qui l'intègrent, nous utiliserons le modèle praxéologique étendu de Castela et Romo-Vazquez (2011), c'est-à-dire un modèle praxéologie non-canonique en cours de construction, qui intègre des technologies théoriques θ^{th} et des technologies pratiques θ^{p}, schématisée ci-après :

$$\left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \begin{array}{c}\theta^{th}\\ \theta^{p}\end{array} & \Theta \end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow P(M)\\ \leftarrow I_u\end{array}$$

***Figure 1-** Modèle praxéologique étendu proposé par Castela et Romo–Vázquez (2011), dans lequel sont incluses l'unité classique d'analyse [T, τ, θ, Θ] ainsi qu'une technologie pratique θ^p.*

Dans la figure 1, I_u représente l'institution utilisatrice des mathématiques, comme c'est le cas de la topographie, productrice de technologies pratiques θ^p. $P(M)$ représente la discipline mathématique dont la communauté de chercheurs qui produit des praxéologies mathématiques fait partie. Le type de tâches T et la technique τ correspondent à ceux de l'unité classique d'analyse [T, τ, θ, Θ] (Op. cité).

Tout ce qui précède, permet de dégager certaines questions : Comment les savoirs mathématiques peuvent-ils devenir des connaissances pratiques (utilisables) ? Leur utilité permet-elle de les organiser en des organisations de niveaux plus ou moins complexes (ponctuel, local, etc.) au sein des pratiques ? Et dans le sens inverse : Est-ce qu'une connaissance ou praxéologie pratique (utilisable) peut devenir un objet ou praxéologie mathématique ? Comment les connaissances pratiques peuvent-elles aider à concevoir des organisations didactiques pour l'enseignement des mathématiques ? Pour les aborder, nous procèderons à la déconstruction de l'objet gradient en utilisant un *media* de diffusion de connaissances topographiques, le manuel de Diaz-Covarrubias (1890). Dans ce manuel est présenté le savoir-faire de la localisation de la *Ligne de Plus Grande Pente* (LPGP), sur lequel nous nous centrons.

II. LE SAVOIR ENTRE DEUX INSTITUTIONS EXTREMES : MATHÉMATIQUES ACADEMIQUES E(M) ET TOPOGRAPHIE P(T)

1. La praxéologie dominante du concept gradient

Dans l'enseignement du calcul vectoriel pour futurs ingénieurs mexicains, la définition du gradient est établie de la manière suivante.

On considère les dérivées d'un champ scalaire, par exemple la variation de la fonction f en fonction de la position dans l'espace. Même si la fonction f est une fonction scalaire des variables x, y, z, ses dérivées partielles respectivement aux coordonnées prennent un caractère vectoriel :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \; (f,\ \textit{fonction scalaire})$$

A partir d'un accroissement de f dans chaque direction, la différentielle de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Considérant ensuite le vecteur position :

$$\bar{r} = xi + yj + zk,$$

on a que :

$$\overline{dr} = dxi + dyj + dzk$$

Le gradient de f est la fonction vectorielle $\overline{\nabla} f$ définie par :

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k,$$

et l'opérateur vectoriel, connu comme opérateur Nabla :

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

La différentielle df peut donc s'exprimer comme :

$$df = \bar{\nabla} f \cdot d\bar{r}$$

Dans cet enseignement, la définition du gradient n'est présentée que par le biais de l´opération précédemment montrée. Le vecteur gradient est déterminé en un point (x_0, y_0, z_0) pour des cas particuliers de fonctions scalaires. La praxéologie scolaire peut être décrite de la manière suivante :

T : Calculer le gradient de la fonction scalaire $f(x, y, z)$

τ : La technique institutionnellement reconnue par E(M) et contenue dans θ^{th}, est une procédure qui implique le calcul des trois dérivées partielles de la fonction :

$$\bar{\nabla} f = \frac{\vec{\partial}}{\partial x}(f(x,y,z))i + \frac{\vec{\partial}}{\partial y}(f(x,y,z))j + \frac{\vec{\partial}}{\partial z}(f(x,y,z))k$$

θ^{th} : Lors de l'enseignement du calcul vectoriel, le gradient de la fonction scalaire *f* est un vecteur présenté sous la forme :

$$\bar{\nabla} f = \frac{\vec{\partial} f}{\partial x} i + \frac{\vec{\partial} f}{\partial y} j + \frac{\vec{\partial} f}{\partial z} k \text{ } où \text{ } \bar{\nabla} = \frac{\vec{\partial}}{\partial x} i + \frac{\vec{\partial}}{\partial y} j + \frac{\vec{\partial}}{\partial z} k \text{ est l'opérateur Nabla appliqué à } f.$$

Θ : Elle n'est pas envisagée.

Une fois que la définition est établie, il est nécessaire de donner un sens réel à l'application $\bar{\nabla} f$; celui-ci est normalement donné à partir des cartes topographiques, prises comme des champs scalaires dont les vecteurs gradients indiquent la *direction de l'inclinaison maximale* d'une colline ou montagne. Notons que ce choix laisse de côté d'autres possibilités importantes dans le même contexte. Un exemple classique présenté aux étudiants pour leur faire comprendre ce concept, est le suivant (figure 2) :

> On peut considérer la carte des courbes de niveau d'une montagne comme un champ scalaire qui attribue à chaque paire de coordonnées, latitude–longitude, une altitude scalaire (champ scalaire à deux variables). Dans ce cas, le vecteur du gradient a un point générique indique sur la carte la direction de la pente maximale de la montagne. Notez que le vecteur de gradient est perpendiculaire à la tangente à la courbe de niveau.

À partir des cartes qui présentent des lignes de niveau, une technique est suggérée :

Figure 2*- Tracé d'une Courbe d'Ascension Maximale en utilisant seulement une paire d'équerres et un crayon. Prise de Stewart (2002), p. 935, Figure 12.*

Il s'agit de tracer des vecteurs gradients, en commençant par dessiner pour une suite de points choisis sur des courbes de niveau croissant (éminence) ou décroissant (dépression) la tangente en chaque point puis sa perpendiculaire, jusqu'à arriver à la partie supérieure ou inférieure du relief en question. La trace qui résulte suggère une ligne particulière de gradients sur la configuration, qui en effet établit une courbe d´ascension maximale (CAM) ou inversement, une courbe de descente maximale.

Cependant le discours traditionnel dans l'enseignement de mathématiques, normé par les manuels utilisés et par l'enseignant, se restreint à une intervention succincte de la CAM. D'une part, ne sont pas considérés les concepts fondamentaux des configurations des cartes appartenant aux pratiques topographiques, *courbe de niveau, versant, ligne de plus grande pente, crêtes, équidistance entre les courbes, les contrôles horizontaux et verticaux, des échelles, plan topographique*, etc. D'autre part, l'utilité du concept de gradient n'est que peu, voire pas, reconnue dans la topographie elle-même. En ce sens, la transposition praxéologique est limitée à une interprétation de la définition du concept, peu fiable pour améliorer la compréhension, puisqu'on part de la définition pour l'interpréter, en ignorant d'autres significations. Partant, « (…) cette situation problématique est immobile et non susceptible de développement » (Barquero, Bosch & Gascón 2010, p. 532).

La ligne pointillée qui apparaît dans la figure 2, est connue en topographie comme *Ligne de la Plus Grand Pente* (LPGP), elle correspond aux parties les plus abruptes par lesquelles l'écoulement de l'eau sur les flancs des montagnes ou des collines est le plus rapide. Dans l'enseignement de mathématiques, ce concept n'est pas exploité. Pourtant la topographie l'utilise pour concevoir des plans topographiques ; il serait donc possible d'utiliser la LPGP pour motiver l'introduction du gradient.

2. *La topographie*

La topographie est un système ordonné d'éléments géométriques dont les composants sont mis en relation par le biais d'arguments trigonométriques. Elle étudie l'ensemble des principes et des procédures permettant la représentation graphique de la surface de la terre, avec ses formes et détails ; autant naturels qu'artificiels, en associant les points de vue planimétrique et altimétrique. Cette représentation a lieu sur des surfaces planes, elle se limite à de petites zones des terrains. Une dimension importante est l'étude des versants dont il faut déterminer le profil, dans les parties les plus abruptes des terrains. La forme des versants détermine en effet le régime de ruissellement des eaux (pluviales au Mexique) le long des pentes de la montagne. En érodant les sols, les flux d'eau provoquent l'apparition de cônes de déjection dans certaines zones d'embouchure, entraînant parfois des retenues d'eau causes de graves inondations dans les vallées.

Les flux d'eau s'écoulent localement le long de la plus grande pente et ce faisant façonnent, par érosion, les versants, les creusant par exemple de sillons qui constituent une matérialisation des LPGP. Ceci explique plus généralement que localisation des LPGP et réalités topographique et géologique (hydrologique) se co-déterminent, ce qui à nos yeux rend envisageable de prendre appui sur l'étude de cartes topographiques pour introduire aux concepts de ligne de plus grande pente et de vecteur gradient. Nous allons voir que cette notion de LPGP est aussi au fondement des pratiques de délinéation pour le dessin de cartes topographiques.

3. *Le gradient dans la pratique de délinéation. La déconstruction*

La pratique de la délinéation a été un contexte dans lequel le gradient a montré sa grande utilité. Cette méthode, connue comme le *clair-obscur,* a été développée par l'ingénieur mexicain Francisco Díaz-Covarrubias au milieu du XIXe siècle et abandonnée au début du XXe siècle. Elle a été en elle-même une pratique du dessin topographique qui a donné le sens de la profondeur et du relief aux cartes topographiques. La pratique incorpore une technique conduisant à la localisation et la détermination de la LPGP, technique qui fait essentiellement référence à la configuration la plus abrupte entre courbes de niveau.

La figure 3 montre le plan topographique d'une montagne, qui apparaît dans Díaz-Covarrubias (1890, p. 559) : on peut voir dans l'image de droite le relief, aussi bien que les versants figurés entre les parties les plus obscures de la configuration. La méthode consiste principalement à graduer *l'ombrage* selon les pentes du terrain. A partir de cette idée, l'outil pour représenter les accidents verticaux a été associé aux courbes de niveau (les courbes de niveau sont visibles dans l'image de gauche de la figure 2, et sont remplacées par les *traits de plume*[160] du clair-obscur dans l'image de droite de la même figure), de sorte que la pente entre chaque couple de courbes est $p = \frac{e}{\Delta}$, où e représente l'écart constant de niveau entre courbes et Δ la séparation ou distance entre les projections horizontales de ces mêmes courbes. Plus abrupte est la pente, plus est forte la proportion du noir par rapport au blanc.

La *théorie* derrière la technique du clair-obscur, provient d'une pratique qui a comme référence la topographie :

> (...) si pour n'importe quel point du terrain compris entre deux plans sécants, on suppose qu'un corps lourd est abandonné à l'action de la gravité, celui-ci descendrait tout au long du versant suivant la ligne la plus courte, qui est perpendiculaire aux intersections du terrain avec les plans sécants : celle-ci est nommée la *ligne de plus grande pente,* car elle prend le plus grand angle avec l'horizontal relativement à toute autre ligne qu'on prend. (Díaz-Covarrubias 1890, p. 559)

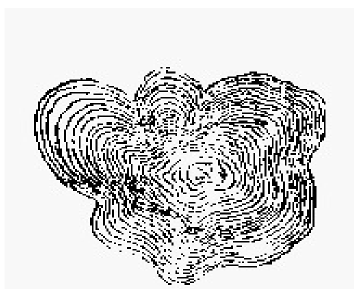


Figure 3- *Dans l'image de droite, apparaît un dessin d'une partie de la carte topographique où la technique du clair-obscur a été utilisée. L'image de gauche montre les courbes de niveau à partir desquelles s'obtient la réalisation du dessin de droite.*

Figure 4- *Collines du Abrigo, Nouveau-Mexique U.S.A : tout au long des collines sont visibles les crêtes des courbes qui déterminent les versants. Dans certains cas, les versants sont localisés par les parties plus ombrées de la configuration. Image prise de http://maps.google.com.mx*

[160] En espagnol : *plumazos.*

La technique utilisée pour localiser dans la configuration la LPGP, est une « technique pratique » qui permet de l'identifier sur les crêtes consécutives entre chaque couple de courbes. En résumé, les deux étapes pour la localiser sont les suivantes : 1) on dessine une ligne pointillée continue, qui correspond essentiellement à la LPGP recherchée (voir la grande quantité de versants figurés entre les courbes de niveau et les crêtes correspondantes sur la carte de la figure 4), 2) puis des traits de plume à l´encre allant du blanc vers le noir, sont tracés tout au long de la carte topographique, restituant ainsi l´impression de profondeur et de relief des accidents du terrain.

Le concept de ligne de plus grande pente sert de base à une technique *produite* dans le cadre du dessin topographique, qui est habilitée par un savoir-faire*,* intégrant des connaissances mathématiques qui la justifient.

III. DÉFINITION DU GRADIENT A PARTIR DE LA LPGP

En utilisant des éléments de la technique du clair-obscur, avec un minimum d'arguments de la topographie, nous proposons un schéma d'enseignement qui mène à la définition du gradient sous la forme $\overline{\nabla} f$. La séquence commence par la *localisation* de la LPGP située entre deux courbes de niveau d'une portion de terrain sur un croquis. Ce croquis est ensuite incorporé à un environnement géométrique élémentaire qui permet de déterminer les vecteurs gradients entre courbes de niveau, ce qui permet aussi d'aller vers une application « variationnelle » sur les fonctions de deux variables comme celles qui figurent dans $\overline{\nabla} f$. Les éléments provenant de la topographie ne sont pas nombreux : *la partie d'une colline configurée par des courbes de niveau qui déterminent les versants.*

1. Le croquis. L'eau coule plus rapidement par les versants

La carte qui est présentée ci-après (figure 5) représente une certaine *partie d'une colline* dessinée par des courbes de niveau comme le font les topographes, les ingénieurs civils et les architectes dans leurs projets. En fait, la représentation de la colline est une tentative pour la montrer en trois dimensions. Dans la figure 6 apparaît un croquis montrant le versant qui est dans la partie inférieure gauche de la figure 5.

Figure 5- *Idéalisation : courbes de niveau sur une colline dans une image tridimensionelle. Par où suppose-t-on que l'eau coule lorsqu'il pleut ? Image prise de : http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_nivel.*

Les courbes de niveau sont *équidistantes* dans le sens où la distance verticale entre les plans horizontaux contenant deux courbes de niveau consécutives est fixe. On peut voir, dans les deux figures (5 et 6) que les courbes de niveau se dirigent vers le haut en formant des crêtes pour après descendre à nouveau.

Des définitions *pratiques,* appartenant à la Topographie P(T), sont ensuite présentées :

- θ_1^P ***Courbe de niveau*** : Ce sont les intersections des surfaces de terrain avec des plans sécants équidistantes qui les coupent horizontalement (figure 5).

- θ_2^P ***Équidistance entre courbes de niveau :*** Distance verticale entre deux courbes consécutives, elle est généralement constante. Dans la figure 5 les équidistances sont les distances verticales entre les plans sécants qui coupent la colline.
- θ_3^P ***Échelle :*** Lorsque la réalité du terrain est représentée par une carte dans une certaine proportion, l'échelle exprime le coefficient de proportionnalité. Par exemple, une carte dessinée au 1 : 5000 signifie que 1 cm sur la carte représente 5000 cm ou 50 m du terrain.
- θ_4^P ***Pente entre les courbes de niveau :*** $p = \frac{e}{\Delta}$ c'est-à-dire, équidistance/longueur horizontale qui sépare deux courbes de niveau.
- θ_5^P ***Surface :*** Portion limitée du terrain qui correspond avec l'espace réel.

Dans la carte de courbes de niveau donnée, comment identifier la trajectoire par laquelle l'eau coule le plus rapidement quand il pleut ?

La façon de reconnaître la trajectoire la plus abrupte, c'est-à-dire celle par laquelle l'eau coule le plus rapidement, est d'examiner les « *vertientes*[161] » qui suivent les lignes les plus courtes entre chaque couple de courbes de niveau consécutives. Dans ce cas, *les plans sécants* sont représentés par les contours, et la trajectoire la plus courte est celle qui est placée dans les parties où les courbes se *tournent* vers le haut (dans l´espace) en simulant des crêtes qui unies déterminent le *vertiente*, par lequel le flux d'eau coule *de manière échelonnée* (figure 6).

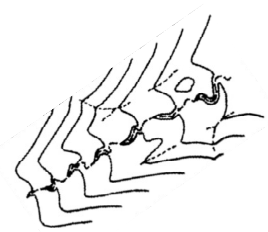


Figure 6*- Idéalisation : Croquis du versant, l'eau coule d'un échelon à l'autre. Qu'est-ce qui se passe à la limite, lorsque les plans sécants sont très proches les uns des autres ?*

2. *Modélisation géométrique du versant*

Le gradient est une des expressions différentielles les plus élémentaires qui peuvent représenter la manière dont une grandeur physique varie dans l´espace. Il est obtenu en considérant les dérivés d'un champ scalaire, par exemple la variation de l'espace $z = f\ (x, y)$ qui représente une colline. Même si z est un scalaire, les dérivées par rapport à x et y ont un caractère vectoriel.

Notre objectif est de chercher, en un point A de la surface $z = f(x, y)$ (la colline), la pente p d'écoulement de l'eau, c'est-à-dire la pente de la LPGP (figure 7). Dans ce qui suit, nous produisons un discours technologique qui ne serait pas reçu comme une validation légitime dans les institutions P(M) de la recherche mathématique et E(M) de l'enseignement académique de mathématiques. Par contre, il l'est dans les institutions analogues des sciences physiques. Ce choix nous permet de rendre accessible aux lecteurs de cet article, non nécessairement au fait de la théorie mathématique de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, les raisons des liens entre gradient et LPGP. Autrement il s'agit d'un discours d'explication (Castela & Romo-Vazquez 2011, p. 89), pouvant appartenir à la praxéologie mathématique du type de tâches Localiser la LPGP.

[161] Ruisseaux dans les collines par lesquels l´eau coule plus rapidement.

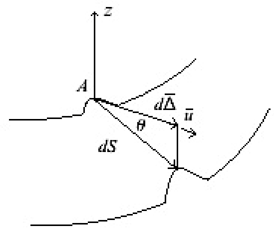


Figure 7 *- Triangle infinitésimal déterminé par la trajectoire $\overrightarrow{dS}$ parcourue par l'eau*

On assimile, comme les physiciens, petits accroissements et différentielles. A partir de $\Delta(x, y)$, projection horizontale de A, on se déplace horizontalement de $\overrightarrow{d\Delta} = (dx, dy)$. Alors l'altitude varie de $dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, la deuxième égalité s'obtenant selon une technique classique en physique, identifiant hypoténuse d'un triangle rectangle et côté, taux d'accroissement et limite, dans le cas d'accroissements tendant vers 0, la dérivée, partielle ou non, étant vue comme quotient des différentielles mathématiques). C'est dans cette phase que peuvent précisément être introduites les dérivées partielles, puis le vecteur gradient.

Par définition, la pente dans la direction (dx, dy, dz) est $\frac{dz}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}$ c'est-à-dire :

$p = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|} =< grad(f), (\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}) >$[162].

Mais on sait qu'un produit scalaire est maximum quand les vecteurs sont colinéaires, donc p est maximum quand les vecteurs $(\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|})$ et $\mathrm{grad}(f)$ sont colinéaires. Ainsi la pente est maximum quand Δ, projeté de A sur un plan horizontal ou représentation de A sur le plan topographique, se déplace tangentiellement au gradient, et on a $p = \|\overrightarrow{grad(f)}\|$ puisque le vecteur $(\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|})$ est unitaire. Si on note $\overrightarrow{dS}$ le petit déplacement correspondant le long de la ligne de plus grande pente, le triangle rectangle infinitésimal donne :

$\|\overrightarrow{dS}\|^2 = \|\overrightarrow{d\Delta}\|^2 + dz^2$, et donc $\frac{dz}{\|\overrightarrow{dS}\|} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

On voit ainsi qu'il est possible d'introduire le vecteur gradient comme pertinent dans le contexte topographique de la recherche de la LPGP. A partir de là, tout une technologie théorique, légitime du point de vue des institutions mathématiques peut être développée pour démontrer les affirmations tenues précédemment et les intégrer dans une théorie mathématique.

IV. RÉSULTATS

Nous avons présenté un processus de circulation des savoirs entre deux institutions mathématiques P(M) et topographiques P(T), des savoirs qui ont été utilisés dans la topographie mexicaine de la fin du XIXe siècle et même transformées pour donner lieu à la définition de la LPGP. Sans prendre trop de distance avec leur contexte et leur signification

[162] La notation <-,-> désigne le produit scalaire.

originaux, ces vestiges sont impliqués dans un processus en sens inverse, allant de la topographie vers la mathématique, pour définir le gradient.

Dans ce processus, deux activités sont mises en évidence : la première est une déconstruction du savoir qui permet de le situer au sein de problèmes issus des sciences non-mathématiques, comme c'est le cas de la topographie. La seconde présente une recontextualisation du savoir déconstruit dans la topographie, qui sert ensuite de point d'appui pour l'amener aux mathématiques. Dans le premier cas, le savoir a été l'objet d'une transposition vers P(T) qui a fait que sa relation à la technologie théorique θ^{th} s´est perdue, ainsi que son sens mathématique d'origine. Dans le second cas on ne peut pas parler d'une transposition didactique dans le sens classique, parce que la connaissance ne procède pas du savoir mathématique, mais des connaissances, compétences et procédures mixtes, mathématiques académiques et topographiques.

Deux techniques issues d'une discipline non-mathématique sont identifiées pour déterminer le gradient : celle qui est suggéré traditionnellement dans les manuels d'enseignement pour le calcul vectoriel et celle qui a été proposée dans cette communication à partir de la réalité des portions d'espaces topographiques, configurées par des courbes de niveau, s'appuie sur la notion de ligne de plus grande pente, déterminée par une technique pratique et introduit à la suite le gradient.

Dans ce sens, les disciplines non-mathématiques nourrissent la mathématique académique à travers des savoirs transformés dans le contexte.

V. CONCLUSIONS

1. Vers la conception d'une organisation didactique

L'analyse praxéologique présentée ci-dessus constitue une base pour concevoir des organisations didactiques adaptées pour l'enseignement mathématique et en particulier, pour celui-ci du calcul vectoriel. L'organisation aura comme axe principal la présentation du statut des éléments de la topographie, tels que le point sur le terrain $P(x, y, z = e)$, puis le passage au cadre des fonctions de deux variables comme $z = f(x, y)$. Pour la conception de l'organisation nous pensons qu'il faudra prendre en compte la modélisation en termes de macro-espace, méso-espace et micro-espace, utilisé par la recherche de Matheron et Noirfalise (2010). Les principales lignes directrices seront les suivantes.

Dans une première étape, afin que les étudiants puissent localiser et identifier les LPGP, il serait nécessaire de proposer des tâches sollicitant des techniques de la topographie sur croquis extraits de cartes topographiques (voir figure 8).

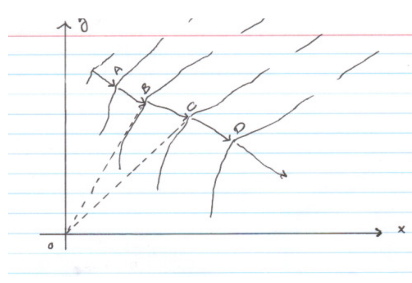


Figure 8*- Obtention de la LPGP sur un plan topographique.*

Dans les croquis, les étudiants vont tracer la LPGP en l'identifiant au moyen des crêtes consécutives entre les couples de courbes. Ils font apparaître des vecteurs sécants $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, etc., dont les composantes dans un repère rectangulaire peuvent être déterminées en utilisant seulement une paire d'équerres graduées. Avec la réalisation de cette pratique, dans une deuxième étape, l'enseignant et ses étudiants auront des éléments géométriques pour introduire le gradient dans le cours.

Le gradient relie différents niveaux de connaissances qui permettent de tenir compte des processus de construction de connaissances empiriques déterminées par θ^P et des praxéologies non-canoniques. Comme concept décontextualisé, le gradient possède de vastes attributs opératoires, ce qui en fait un objet intéressant pour le faire circuler entre différentes institutions.

Ce qui précède montre une voie pour reconnaître et établir des relations entre les institutions, dans ce cas la topographie P(T) et les mathématiques P(M) - E(M). Ce qui de notre point de vue, est nécessaire pour former de futurs professionnels, montrant différentes manières dont les mathématiques sont utilisées et validées.

REFERENCES

Barquero, B. Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. In Bronner A, Larguier M, Artaud M, Bosch M, Chevallard Y, Cirade G, & Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques comme outils de conaissansse et d´action (et les autres savoirs)* (pp. 527-549). Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier.

Camacho A., Sánchez B. (2015) Praxeologías y empiremas, recursos extremos para la construcción de conocimiento. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/464/257

Castela C., Romo-Vázquez A. (2011) Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruíz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Díaz Covarrubias F. (1890) *Manual de Topografía*. México: Imprenta del Gobierno en Palacio.

Gantois J-Y. (2012) *Un milieu graphique-cinématique pour l´apprentissage des dérivées dans une praxéologie "modélisation" : potentialités el limites*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Liège.

Matheron Y., Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Stewart J. (2002) *Cálculo Multivariable*. México: Thomson Learning, Cuarta Edición.

APPORTS DE LA PLURALITE DE SYSTÈMES MATHEMATIQUES ANCIENS POUR L'ENSEIGNEMENT

Charlotte DE VARENT[*]

Résumé – Nous nous intéresserons à l'utilisation de textes mathématiques anciens[163] sur le thème de l'aire du rectangle et notamment à l'intérêt des différents équilibres entre nombres et grandeurs qu'ils offrent. Dans le cadre d'une analyse préalable à une expérimentation utilisant l'histoire des sciences en classe, nous expliciterons comment ils ont influencé notre lecture de manuels scolaires de CM2 (10-11 ans, 5$^{\text{ième}}$ année d'élémentaire). Nous nous baserons sur cette analyse pour justifier l'utilisation de l'un de ces textes anciens dans un travail visant l'explicitation et l'approfondissement des thèmes aire et grandeurs avec des élèves de seconde.

Mots-clefs : histoire des mathématiques, grandeurs, aire, interdisciplinarité, ingénierie didactique

Abstract – We are interested in the use of ancient mathematical texts regarding the area of a rectangle, with a focus on the different equilibria that exist between numbers and the quantities they offer. We bring forward the way in which these texts influenced our reading of 10 and 11 year olds' (French "CM2" or fifth grade) textbooks within the framework of a preliminary analysis for an experiment that uses the history of sciences in the classroom. Our analysis should allow us to justify the use of one of these ancient texts in an experimentation intended to clarify and deepen the themes of area and quantities with 15-16 year old students (French "seconde" or tenth grade).

Keywords: history of mathematics, quantities, area, interdisciplinarity, didactic engineering

I. INTRODUCTION ET MÉTHODOLOGIE

Nous nous intéresserons à la justification de l'utilisation de l'histoire des mathématiques anciennes, dans la perspective d'une expérimentation en cours de réalisation en classe de seconde. L'intérêt en a été soulevé maintes fois (Hosson & Schneeberger 2011 ; Guedj, Laube & Savaton 2007) et peut sembler évident : motivation des élèves en classe, approche de la diversité culturelle, meilleur recul sur la nature de la science et le discours scientifique, etc. Cependant, les didacticiens et enseignants intéressés par le sujet ont dégagé une multitude de formes d'utilisation possible des sources historiques (De Hosson 2011, Bernard, Brechenmacher & Husson 2014) et les expérimentations ont révélé qu'elles ont des conséquences variables (Jankvist 2009).

[*] Université Paris 7 Diderot - ERC SAW - CNRS - SPHERE – en co-direction au LDAR – France – charlotte.dvarent@etu.univ-paris-diderot.fr

[163] La recherche conduisant à ces résultants a reçu un financement du Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013)/ERC Grant agreement n. 269804.

De Varent C. (2015) Apports de la pluralité de systèmes mathématiques anciens pour l'enseignement. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 454-467.

Du point de vue des sources historiques anciennes, nous avons d'abord choisi le thème de la multiplication dans le sens large des situations multiplicatives à plusieurs espaces de mesure qui ne sont pas toujours dépendantes de l'addition itérée (Vergnaud 1990, Roditi 2005). Cela nous a permis de découvrir, dans la lignée du travail mené par le projet « mathematical Sciences in the Ancient World » (SAW dans la suite – voir Saw ERC. Hypothèses », s.d.), diverses propositions d'équilibre nombres/grandeurs dans ces situations multiplicatives, comme les calculs d'aire, de volume, la règle de trois. La spécificité du projet SAW est la mise en valeur de la diversité des solutions mathématiques que les textes offrent sans « coller » une représentation actuelle sur un texte ancien. L'attention portée aux types d'éléments sur lesquels l'algorithme opère à chaque étape et au vocabulaire est l'un des piliers de cette historiographie. Le traitement des unités de mesure (ou leur absence) s'est ainsi révélé être l'une des clés de la diversité des approches mathématiques.

Du point de vue didactique de nombreux travaux sont à l'intersection de la géométrie et des grandeurs, notamment Rogalksi (1985) sur l'acquisition de la bidimensionnalité, Munier et Passelaigue (2012) sur l'importance de l'approche épistémologique des grandeurs mesurées et de la mesure. Les travaux de Chambris (2007, 2009), rappellent l'histoire de la suppression partielle des unités dans les années 1970 en France, en partie réintroduites mais avec un statut qu'elle propose de travailler en lien avec la numération décimale. Sur le thème de l'aire, Douady et Perrin-Glorian (1985, 1989), Perrin-Glorian (1990, 2002) montrent l'importance et la complexité du sujet. Roditi (2005, pp.74-79) rappelle des difficultés importantes à l'entrée en sixième.

Nous travaillons dans le cadre d'une ingénierie didactique (Artigue 1989). Cette méthodologie de l'ingénierie didactique est liée ici à celle, propre à l'utilisation de l'histoire des sciences, d'un dialogue entre les textes anciens, les travaux didactiques et l'analyse de manuels scolaires (Dorier 2006, p.29). C'est ce dialogue (Hosson & Schneeberger 2011 ; Décamp & Hosson 2012) qui nous a permis de cerner des points de diversité qui nous paraissent éclairants, d'interroger en profondeur les concepts de base, grâce au recul que permet la diversité historique. Ces allers-retours constituent pour nous l'analyse préalable, pour laquelle nous développerons l'apport de trois textes mathématiques anciens sur le thème de l'aire du rectangle.

Nous montrerons comment les réponses qu'ils offrent, révélées par les traductions au plus près des notations mathématiques, influencent l'analyse de contenus. Pour cela nous exposerons une grille d'analyse composée de questions qui nous ont permis de lire les manuels scolaires de CM2 (10-11 ans, primaire 5) à la lumière des textes anciens, mettant en évidence certains implicites. Travailler sur le même plan des systèmes mathématiques différents, anciens et actuels, nous a menés à construire des catégories particulières, adopter une approche textuelle et voir les procédures de calcul d'aire comme des algorithmes. Nous justifierons a priori l'utilisation de l'un des textes mathématiques anciens en classe de seconde (15-16 ans, secondaire 5)[164] . Nous faisons en effet l'hypothèse que les différentes variations précisées par cette approche amèneront l'élève à réinterroger ses connaissances sur le thème de l'aire du rectangle.

[164] La classe de seconde a été choisie pour revenir en profondeur sur une notion supposée stabilisée (aire du carré) et permettre la compréhension de la tablette : multiplication en base 60, inverses, système métrologique différent. Le cadre de « l'option découverte histoire des sciences », créée et animée à Levallois-Perret par l'historien des sciences médiévales au CNRS M. Husson, offrait un cadre souple pour ce travail préliminaire, bien que nous n'excluions pas l'inclusion ultérieure dans un cours de mathématiques.

II. PRESENTATION DES TEXTES ANCIENS UTILISES DANS LA RECHERCHE

Précisons ici l'apport théorique du dialogue entre trois textes anciens sélectionnés pour la diversité des réponses qu'ils apportent au thème de l'aire du rectangle et l'étude de manuels scolaires en classe de CM2 (10-11 ans).

- cunéiforme : une tablette de l'école de scribes de Nippur (Proust 2007, pp.190-197),
- chinois : un texte issu de la traduction des *Neuf Chapitres* (Chemla & Guo 2004, pp.153-155),
- sanskrit : un texte issu de la traduction du commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya* (Keller 2006, pp.13-19 vol.1, pp.8-10 vol.2).

1. Un texte cunéiforme

Ce texte nous a semblé révéler un choix mathématique intéressant. Nous étudierons l'exemple de la tablette CBS 11318[165] (Proust 2007, p.191) provenant de l'école de scribes de Nippur.

Figure 1 *– CBS 11318 – Face*

Dans cette tablette (voir tableau 1 pour la traduction de Proust 2007, p.191), il est remarquable que le calcul exprimé dans la traduction en haut à gauche, ne soit pas du type « 1 kuš$_3$ × 1 kuš$_3$ » ou « 1 × 1 » mais « 5 × 5 ».

5 5 25	
	1 kuš$_3$ le côté (du carré). Quelle est sa surface ? Sa surface est 1/3 gin$_2$ 15 še

Tableau 1*- CBS 11318, Traduction de Proust*

La première étape de la procédure permettant de calculer l'aire d'un carré consiste en effet selon Proust (Op. cité, pp.190-197) à traduire la longueur du côté en « nombres flottants » à

[165] JCS 36,251 (s.d.). Dans CDLI. Repéré le 09 septembre 2014 à : http://www.cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254478

l'aide d'un dictionnaire appelé « table métrologique » (Proust 2005). Celle-ci donne pour une grandeur mesurée son équivalent en nombre flottant. Ici, 1 kuš$_3$ → 5 (la flèche ne figure pas dans le texte historique d'origine). Le 5 obtenu est flottant : c'est un élément sur lequel il est possible de calculer sans connaître l'ordre de grandeur. Il est exprimé dans un système numérique similaire à notre notation des heures-minutes, le SPVN (notation sexagésimale positionnelle). Mais en SPVN, bien que chaque position soit soixante fois supérieure à la précédente, on ne sait pas quelle puissance de 60 possède la toute première position donc il est impossible de connaître l'ordre de grandeur du nombre. Les longueurs comme 1 kuš$_3$, par contre (et les mesures en général), sont exprimées dans un système numérique qui n'est pas « flottant », comme c'est le cas dans notre système numérique.

Pour calculer l'aire du carré, le nombre flottant 5 ainsi obtenu grâce à la table métrologique est multiplié par lui-même. Il faut alors « convertir le résultat (ici 25) en surface » à l'aide de la table métrologique des surfaces[166], qui possède pour chaque mesure d'aire (à gauche) un équivalent en nombre flottant (à droite). Ici 25 est donc converti en « 1/3 gin$_2$ 15 še ». Ainsi le choix est fait de ne pas calculer sur des grandeurs (comme 1 kuš$_3$) mais sur des nombres flottants (comme 5). La gestion des espaces de mesure entrant en jeu dans le calcul de l'aire du carré paraît ainsi être faite par une séparation nette, la conversion (ou « traduction ») permettant de passer de l'un à l'autre. De même cette conversion permettra pour le cas de la règle de trois, de faire communiquer les différentes sortes de grandeurs en jeu. Cette conversion est nettement moins visible dans le système français actuel du fait de l'homogénéité des facteurs entre unités de mesure, ainsi que de l'utilisation des mêmes notations pour les nombres à calculer et les grandeurs.

2. *Le texte chinois*

Ce texte apporte une autre réponse sur le thème de l'aire du rectangle, quant au traitement des unités de mesure. En effet si la longueur d'un rectangle est en unité de mesure LI, le résultat du calcul d'aire sera en « LI du produit ». Selon une hypothèse suggérée par Chemla, il s'agit peut-être d'une transformation géométrique du rectangle en une « bande rectangulaire unité ». Si le rectangle est de 3 LI de longueur et 2 LI de largeur comme le propose l'un des exemples du texte, alors la bande rectangulaire unité serait de 6 LI du produit de longueur et de 1 LI de largeur (figure 2)

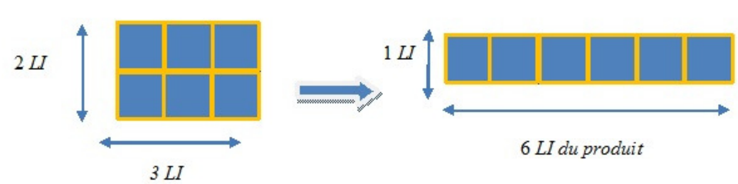


Figure 2*- Transformation en bande rectangulaire*

[166] Pour expliquer le « nombre flottant », nous pouvons faire l'analogie avec les résultats intermédiaires de la multiplication posée (avant addition) de nombres décimaux actuellement utilisée en France. En effet ces derniers servent à calculer, à être les arguments d'un algorithme de multiplication ou d'inversion, sans se soucier provisoirement de la position de l'unité. La « conversion » depuis le nombre flottant se fait de manière implicite, probablement au moment où la virgule est positionnée après l'addition, puisqu'ainsi est rétabli l'ordre de grandeur.

Ensuite, la procédure précise qu'il faut convertir les LI du produit obtenus en unités de mesure MU si le nombre de LI est suffisant. Le MU est par ailleurs une unité qui n'est jamais une unité de longueur, il n'y a donc pas de MU du produit. Peut-être est-ce le moment où l'on quitte l'interprétation géométrique de l'unité de mesure pour une unité de mesure de statut différent. Cette relation entre les LI du produit et les MU nous a donné à réfléchir sur l'articulation entre « unité de mesure géométrique » et « unité de mesure arithmétique ».

3. *Le texte sanskrit*

Enfin, un troisième texte sur ce thème, issu du commentaire de Bhāskara (629) sur l'*Āryabhaṭīya* d'Āryabhaṭa est frappant par son absence d'unités de mesure. Dans le commentaire, il s'agit d'un algorithme pour élever des « quantités » (nombres avec partie entière et partie fractionnaire) au carré, avec des exemples numériques sans unité de mesure. En revanche, l'introduction de Bhāskara au traité de l'*Āryabhaṭīya*, nous indique qu'arithmétique et géométrie sont deux facettes d'un même monde. L'algorithme est directement présenté après une discussion géométrique sur la définition du carré ce qui laisse entrevoir un possible lien conceptuel entre les deux parties du texte, cristallisé notamment par le double sens du mot sanskrit « *phala* », signifiant à la fois « l'aire » et « le résultat » (après élévation au carré). D'autre part le commentateur Bhāskara annonce qu'ici l'algorithme est réalisé sur des « quantités », nombres auxquels il est facile d'apposer une unité de mesure, sans qu'il soit besoin de faire une étape de « conversion » si l'on souhaite appliquer cet algorithme à un exemple géométrique. L'ordre de grandeur n'est jamais perdu contrairement à l'exemple cunéiforme.

4. *Un bilan préalable au passage à l'enseignement*

Dans le texte en chinois, le changement de dimension paraît être géré par le passage à une surface intermédiaire qui fait un lien clair entre la multiplication issue de la mesure des côtés de rectangle et l'unité de surface. Cette solution nous semble apporter un pont intéressant entre « l'activité découverte » et la formule. Cela nous a conduits à nous intéresser au statut de l'unité de mesure cm^2 à chaque étape du manuel scolaire : comment le lien est-il fait entre unité de mesure représentée géométriquement et unité de mesure servant dans l'analyse dimensionnelle ? La question de la distinction entre : nombre à calculer (par exemple, des résultats intermédiaires), grandeur mesurée, quantité, est peut-être plus délicate dans un système comme le nôtre (et celui de Bhāskara) que dans un système cunéiforme où nombres flottants et grandeurs mesurées sont séparés et où les conversions entre les éléments sont apparentes. Cela nous a conduits à regarder précisément l'étape « d'apposition » de l'unité de mesure dans l'introduction de la formule des manuels scolaires. D'autre part, si le texte sanskrit est effectivement lu comme étant géométrique et arithmétique à la fois, le vocabulaire porte un double sens. Que veulent dire réellement les mots qu'emploient les auteurs de manuels? Sont-ils géométriques, arithmétiques, ou les deux ? Le vocabulaire est-il, comme dans les textes anciens, l'ultime trace de phases non explicitées ? Quelles sont les conséquences pour l'élève de ces implicites langagiers ?

III. ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES A LA LUMIERE DE CES TEXTES

Ainsi, la diversité proposée par ces trois exemples anciens nous semble illustrer différentes réponses à un même problème mathématique (de Hosson & Chorlay à paraître). Nous avons fait l'hypothèse que cette diversité est intéressante pour l'analyse de contenus. Il s'agissait de comprendre quelle réponse les manuels proposaient, dans cette situation didactique donnée, sur le même plan que les textes anciens. Pour permettre ce dialogue avec le passé, il fallait s'attacher à une grille d'analyse textuelle commune des éléments explicitement présents à l'écrit. Nous sommes conscients que du manuel aux pratiques, il y a un fossé plus ou moins grand selon l'enseignant.

Nous nous centrons ici sur cinq manuels scolaires déjà étudiés parmi treize, ils introduisent l'aire du rectangle en CM2. Le passage de l'activité « découverte » du manuel (justifiant pour l'élève la procédure de calcul d'aire) à l'institutionnalisation (se traduisant généralement par une formule de type « L × l », avec ou sans application à un exemple) a été au cœur de notre intérêt. Nous tenterons ici de donner les grandes lignes des résultats de cette analyse.

1. *Une première analyse globale*

La première impression qui se dégage est celle de l'homogénéité. L'activité découverte de cette séquence consiste généralement à compter des carrés-unités d'un centimètre de côté à l'intérieur de surfaces parfois originales, puis de rectangles et de carrés.

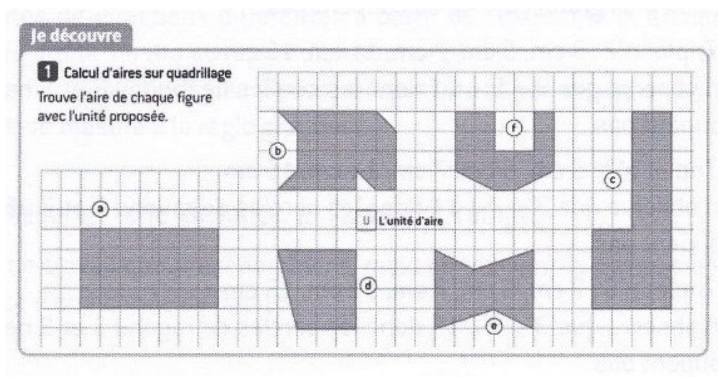


Figure 3 *– Compte de carreaux dans l'activité découverte (La clé des maths[167])*

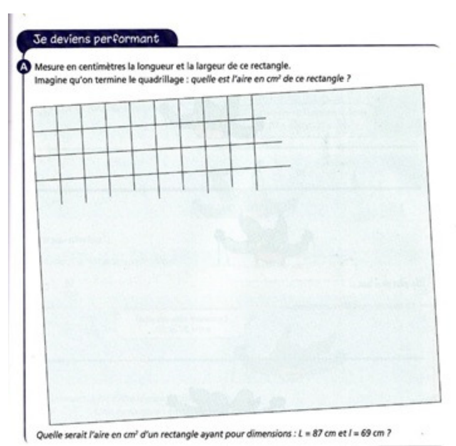


Figure 4 *– Compte de carreaux dans l'activité découverte (J'apprends les maths[168])*

Tous les manuels analysés présentent l'utilisation d'une telle grille pour introduire la formule de l'aire du rectangle ou du carré (exemple figure 3). L'activité découverte amène l'élève

[167] *La clé des maths*, Séquence 39 sur 72 en période 3 sur 5, p.94.
[168] *J'apprends les maths*, séquence 47 sur 119 en période 2 sur 4, p.75.

(plus ou moins explicitement selon les cas) à réaliser qu'il est plus rapide de multiplier le nombre de carreaux de la longueur par le nombre de carreaux de la largeur que de compter les carreaux un à un. Il faut ensuite passer directement à la mesure des côtés à la règle, qui amène la formule. Cette dernière étape de mesure n'est en fait explicitement liée au compte de carreaux sur une ligne que dans 1/5 du manuel, *J'apprends les maths* (figure 4).

La formule « L×l » est alors introduite dans un encadré, dans 4/5 manuels, avec parfois un exemple précis d'application.

2. *Analyser à la lumière des textes anciens*

Pour dépasser ce sentiment premier d'homogénéité et en nous fondant sur la diversité des réponses présentes dans les sources anciennes, nous avons décidé de regarder les différents éléments, listés dans le tableau 2. Celui-ci explicite d'une part le lien entre le choix des critères et les textes anciens, d'autre part le lien entre ces critères et la méthodologie d'étude textuelle provenant de l'histoire (pouvant rejoindre l'analyse de contenus didactique). Il précise enfin si le critère a pu être appliqué à l'analyse des textes anciens eux-mêmes pour faciliter le dialogue.

Critère ou question adressé(e) aux manuels	Inspiré par le texte…	Méthodologie provenant de l'Histoire	Critère similaire appliqué aux textes anciens
Détail de l'algorithme associé à l'activité découverte et de l'algorithme associé à la formule (et son application à un exemple)	cunéiforme notamment (du fait de la différence explicite avec notre méthode et de l'explicitation des éléments sur lesquels on opère à chaque étape de l'algorithme dans ce texte)	Oui : attention portée aux procédures	OUI
Sur quel type d'élément est faite l'opération à chaque étape de l'algorithme ? (ex : mesure d'un côté exprimée par un nombre et une unité de mesure, nombre seul issu d'une mesure, nombre issu d'un compte de carreaux, élément implicite pouvant représenter les deux, etc.)	cunéiforme (du fait des nombres flottants pour les calculs/non flottants pour les mesures)	Oui : les éléments sur lesquels on opère sont des indices importants lorsqu'il faut naviguer dans des systèmes de mathématiques différents sans pouvoir interroger l'auteur	OUI
Type d'unité de mesure utilisé à chaque étape de l'algorithme (ex : carreau géométrique ou unité de mesure sur laquelle il est possible d'opérer une multiplication)	chinois (unité de mesure « LI du produit » qui fait référence à une transformation géométrique liée à la longueur d'un rectangle « bande », servant de transition)	Oui : -Attention portée aux traces écrites -Hypothèse de la « bande unité »	OUI

Gestion des étalons de mesure de dimensions 1 et 2 : -> a conduit premièrement : à la mise en évidence de trois phases (plus ou moins implicites selon les manuels) 1) compte de carreaux-unité un à un (activité découverte) 2) multiplication « nb de carreaux sur une ligne » × « nb de carreaux sur une colonne » (activité découverte) 3) mesure du côté pour connaître le nombre de carreaux (très souvent implicite) ->a conduit deuxièmement : à réaliser que chaque formule semble selon le manuel faire référence à une des trois phases selon la façon dont elle est exprimée	en cunéiforme (explicitation d'une proposition de transition entre mesures de longueur et mesures de surface par ce texte) en chinois (transition par les « li du produit »)	Oui pour le « deuxièmement » : attention particulière aux indices textuels mathématiques	OUI
Gestion/explicitation de « l'apposition » du terme « cm^2 » au moment de l'application de la formule à un exemple	comparaison du texte en cunéiforme par contraste avec le texte en sanskrit (utilisant des nombres sans unités de mesure auxquels il est facile d'apposer une unité de mesure après le calcul)		NON
Étude du vocabulaire à chaque étape (ex : traces de vocabulaire géométrique au moment de l'application de la formule), ce qui est réellement écrit, ce qui est sous-entendu	en sanskrit (traces du lien avec la géométrie dans une procédure arithmétique)	Attention particulière aux indices textuels pour chercher des indices de la pensée de l'auteur / du fonctionnement du système mathématique	OUI

Tableau 2 *– Grille d'analyse venant des textes anciens*

3. *Analyse en terme d'algorithme*

La décomposition en termes d'algorithmes a permis de mieux repérer les phases possibles (détaillées plus loin) dans la transition de l'activité découverte vers la formule, et de remarquer le degré d'explicitation des éléments sur lesquels l'algorithme opère à chaque étape. Nous y reviendrons. Par souci de synthèse nous ne donnerons pas ici les décompositions pour chaque manuel mais seulement une « moyenne ».

Algorithme associé à l'activité découverte	Algorithme associé à la formule lors de l'institutionnalisation	Algorithme associé à la tablette cunéiforme
Choisir un étalon (le carreau cm^2) -> *fait par le manuel* L'étape de choix de l'étalon est plus ou moins implicite selon les manuels, mais les séquences précédentes travaillent généralement sur le choix d'une unité géométrique « u » et l'expression de l'aire en fonction de l'unité « u » choisie.	Le choix de l'étalon est effacé (il faudrait s'en souvenir)	Le choix de l'étalon est effacé dans la tablette[169]
Compter le nombre de carreaux sur une ligne (ex : 3)	Mesurer un côté en centimètres : ex : 3 ou 3 cm selon les manuels (correspond implicitement à donner le nombre de carreaux d'1 cm^2 sur une ligne).	L'énoncé donne « le côté » du carré, 1 $kuš_3$
La transformation du résultat du compte de carreaux en nombre à calculer est inexistante	La transformation de la mesure du côté en élément (nombre de carreaux ? valeur issue d'une mesure ? nombre à calculer ?) est inexistante ou effacée par le système numérique	Le côté du carré est transformé en nombre flottant à l'aide d'une table métrologique : 5.
Multiplication du nombre de carreaux sur une ligne par lui-même *3 × 3 = 9*	Multiplier l'élément par lui-même (il n'est pas précisé s'il s'agit du nombre de carreaux, d'une valeur issue de la mesure, d'une mesure, d'un nombre à calculer, etc.) *« 3 × 3 = 9 », ou : « 3 cm ×3 cm = 9* cm^2 *»* *ou : « 3 × 3 = 9* cm^2 *»*	Multiplier le nombre flottant par lui-même 5 5 25
Le nombre de carreaux donné est le nombre de cm^2 La transformation du résultat de la multiplication en mesure d'aire se fait par l'apposition du terme cm^2 après l'égalité ou dans la phrase réponse. Ici cette apposition prend un sens géométrique : il y a par exemple 9 carreaux (resp. 9 « u »), les carreaux « sont [170]» des cm^2 (resp. des « u ») donc il y a 9 cm^2 (resp. « 9 u »)	La transformation du résultat de la multiplication en mesure d'aire se fait par l'apposition seule du terme cm^2 après l'égalité ou dans la phrase réponse. Elle ne peut prendre un sens géométrique facilement s'il n'est pas fait de lien entre la mesure du côté en centimètres (dimension 1) et le carreau cm^2 (dimension 2).	Convertir le résultat en « surface » 1/3 gin_2 15 še

***Tableau 3**- Algorithmes associés*

4. Analyse en terme de phases de la progression

Si l'on considère trois phases :

1) compte de carreaux un à un,

2) multiplication du nombre de carreaux sur une ligne par le nombre de carreaux sur une colonne pour trouver le nombre total de carreaux,

3) mesure des côtés pour trouver le nombre de carreaux sur une ligne et une colonne,

---

[169] Nous présenterons ultérieurement des textes cunéiformes plus anciens où la surface est décomposée selon des étalons standards.

[170] L'étalon de dimension 2 « u » étant une portion de surface décomposant la surface à mesurer, « u » prend un double statut de surface et d'unité de mesure d'aire, son statut est donc ambigu et par extension celui du cm^2 aussi.

le rapport qui unit les phases 2 et 3 est explicite dans 1/5 manuels seulement. La gestion des espaces de mesure est donc le plus souvent implicite et pourrait créer un conflit d'interprétation entre la formule de type « cm × cm » qui fait intervenir la dimension 1 et l'activité découverte utilisant des carreaux de dimension 2.

Manuel	Phase 1	Phase 2	Phase 1 ou 2	Phase 3
Pour comprendre les maths	Non, pas explicitement	Non, pas explicitement	Non, pas explicitement mais réalise peut-être la phase 1 (ou 2), étant donné la présence d'une grille	Non (même dans le livre du maître)
Vivre les maths	Oui (livre du maître)	Oui (livre du maître)		Non, pas explicitement
La clé des maths			Oui : le livre du maître évoque le « dénombrement ».	Non, pas explicitement
EuroMaths			Oui : le livre du maître évoque le « dénombrement ».	Non, il est demandé de prévoir l'aire d'un carré sans utiliser de quadrillage pour faire le lien entre l'aire du carré et la dimension du côté, ce qui pourrait correspondre à la phase 3. Un cm^2 valant quatre carreaux, il faut explicitement chercher l'étalon choisi, ce qui conduit peut-être à favoriser la phase 3.
J'apprends les maths	Non, la phase 1 n'est pas évoquée (mais ce manuel, comme d'autres, utilise la vision grille pour la multiplication depuis l'introduction de cette notion).	Non, car la phase 2 est rendue impossible intentionnellement pour conduire à la phase 3.		Oui : effacement de la grille qui impose la mesure du côté *pour* connaître le nombre de carreaux.

Tableau 4 *– Explicitation des phases selon les manuels*

A chaque étape les éléments sur lesquels l'algorithme de la formule opère la multiplication sont implicites. Cet implicite peut être géré plus ou moins positivement si les phases 2 et 3 sont (ou non) articulées explicitement dans le manuel. Il semble que les formules portent une trace de l'activité découverte (comptage de carreaux) ou de la mesure à la règle (ou les deux), ou bien d'une conversion de nombre à calculer en grandeur mesurée (ce pourrait être le cas d'une notation semi-séparative « $5 \times 4 = 20$ cm^2 »), sans que ce choix soit expliqué dans le manuel ou le livre du maître et sans que le lien entre formule et activité découverte soit toujours possible du fait de la non explicitation de la phase 3.

5. Représentation de l'unité de mesure et apposition du terme cm²

Dans tous les manuels, une introduction « géométrique » du cm^2, de type : « 1 cm^2 est l'aire d'un carré de 1 cm de côté » est donnée dans l'activité découverte. Mais dans la formule, il semble que son statut change. La formule notée « 5 cm × 4 cm = 20 cm^2 » par exemple, pourrait donner l'impression de multiplier des unités de mesure « cm » comme dans la notation : « cm × cm = cm^2 ». Or la possibilité factice de « multiplier » des « notations d'unités de mesure », liée à l'homogénéité de l'équation, est utile notamment en physique (Chevallard & Bosch 2001) pour vérifier des écritures de résultats mettant en jeu un grand nombre d'unités de mesure. Mais elle est sans réalité multiplicative géométrique (ou indirectement) et n'est pas introduite explicitement. L'unité de mesure passe donc dans cet exemple d'un statut quasi-géométrique (un carreau) à un statut « arithmétique » (un élément sur lequel on peut opérer), sans que ce soit explicité. Cette double conception n'est pas introduite comme telle dans le livre du maître. D'autres présentations (formules de type séparative : « A = 38 × 29 = 1102, 1102 cm^2 » ou semi-séparative : « A = 38 × 29 = 1102 cm^2 ») ne semblent pas non plus rendre limpide le lien à l'activité découverte. Elle n'explicite pas sur quoi opère l'élève, qui finira, faute de phase 3, par lier 38 à la mesure du côté, qu'il doit faire à chaque utilisation de la formule. Sans rejeter les trois types de notations, il est toutefois notable qu'elles ne soient nulle part explicitées, d'une part, et qu'elles donnent lieu à un conflit possible avec l'activité qui doit justement donner sens à la formule, d'autre part.

C'est l'unité de mesure qui semble porter la trace d'une transition entre étalons de dimension 2 et 1 qui parfois est à la charge seule de l'élève. La justification de l'apposition de l'unité cm^2 dans l'application de la formule est faite dans 2/5 manuels par un argument d'homogénéité du type : « si l'unité est en cm, le résultat sera en cm^2 ». L'un des deux spécifie même qu'il faut utiliser « la même unité » qu'au départ, bon exemple de l'ambiguïté régnante. Les autres manuels ne donnent pas de raison. Pour l'élève, est-il possible de créer une représentation géométrique erronée pour correspondre mieux à la formule ?

IV. CONCLUSION ET AUTRES QUESTIONS

Pour cette introduction d'une formule algébrique, il semble donc que les difficultés soient cumulées : représenter un nombre quelconque par une lettre, faire le lien entre la formule, le compte de carreaux de dimension 2 et la mesure à la règle d'étalons de dimension 1, utiliser une unité de mesure qui a une réalité « géométrique » et « arithmétique », opérer sur des éléments qui ne sont pas spécifiés clairement (nombre, grandeurs, carreaux ?). Le risque de conflit de représentation entre l'activité et la formule pouvant mener à une difficulté à donner du sens à cette dernière apparaît. Ces résultats nous semblent rejoindre et compléter les précédents travaux sur ce thème, en mettant particulièrement en avant l'importance d'un travail épistémologique de fond sur la métrologie en géométrie. Il nous semble que les parties distinguées par M-J. Perrin (1990) que sont les pôles géométrie (les surfaces comme parties du plan), grandeur (l'aire comme concept indépendant de la surface et de sa mesure), numérique (les mesures d'aires) sont maintenant travaillés en partie selon les manuels, l'influence des travaux didactiques se faisant sentir peu à peu. Nous remarquons notamment souvent des activités sur la distinction aire/périmètre, des découpages-recollement, l'utilisation d'un étalon quelconque « u » précédant l'étalon cm^2. En revanche, la présente analyse nous paraît mettre en valeur l'appartenance de l'unité de mesure à plusieurs pôles, sans explicitation. Celle-ci peut avoir une surface, une aire, une mesure d'aire et servir de mesure d'aire en étant une surface. Elle appartient aussi à un pôle « arithmétique » puisqu'elle paraît « multipliable » (cm × cm) ou produit d'une multiplication (cm × cm = cm^2). Les pôles qui ont pu faire l'objet de distinction au préalable nous semblent souvent mélangés du point de vue de la métrologie et au moment de l'institutionnalisation (formule) lorsque le lien entre les phases 2 et 3 n'est pas explicite.

La grille d'analyse issue du travail avec les sources anciennes a permis, grâce à la diversité mathématique et le traitement des grandeurs mesurées qu'ils apportent, de mettre en valeur l'importance et la possibilité d'un travail centré sur la métrologie dans les manuels. Le multiple statut des unités de mesure et l'introduction de la métrologie en géométrie comme en algèbre nous paraît être un aspect essentiel ignoré des livres du maître. Pourtant, il est au cœur de nombreuses applications de la géométrie et du lien entre mathématiques et physique. Les textes anciens, du fait de la place accordée au système métrologique et de la représentation de l'unité de mesure, proposent des solutions intéressantes qui nous semblent pouvoir servir à une réflexion de fond, en didactique comme en formation des enseignants.

D'autre part, la prise de conscience des implicites, permise par les textes anciens justifie l'hypothèse qu'utiliser ceux-ci avec les élèves pour revenir en profondeur sur les notions et les mettre en position « d'analyse de contenus » peut être intéressant. En ce sens, nous nous rapprochons de l'effet de réorientation souligné par Jahnke, Acarvi, Barbin, Bekken, Furinghetti., El Idrissi, da Silva et Weeks (2000). L'utilisation de la tablette cunéiforme nous a paru pouvoir apporter de nouvelles questions ou une meilleure compréhension de la situation et de sa part d'implicite.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281-308.

Bernard A., Brechenmacher F., Husson, M. (2014) Points cardinaux pour la conception de formations universitaires pluridisciplinaires en épistémologie et histoire des sciences pour les enseignants du secondaire, ou comment s'appuyer sur des dilemmes. SHS Web of Conferences, 13, 05004. http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20141305004

Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In Ouvrier-Buffet C., Perrin-Glorian M.J. (Eds.) *Approches plurielles en didactique des mathématiques* (pp. 211-222). Paris : LDAR, Université Paris Diderot.

Chambris C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM* 69, 5-31.

Chemla K., Guo S. (2004) *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

Chevallard Y., Bosch M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, (55), 5-32.

Chorlay R., de Hosson C. (à paraître) History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research In Lagrange J-B., Kuzniak A. (Eds) Actes du colloque La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michèle Artigue, 31 mai - 2 juin 2012, Université Paris Diderot, Paris.

Décamp N., de Hosson C. (2012) Implementing Eratosthenes' discovery in the classroom: some educational cares, *Science and Education* 21 (6), 911-920.

de Hosson C. (2011) *L'histoire des sciences : un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement de la physique*. HDR, Université Paris-Diderot.

de Hosson C., Schneeberger P. (2011) Orientations récentes du dialogue entre recherche en didactique et histoire des sciences, *Recherche en Didactique des Sciences et des Technologies* 3, 9-20.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1985) Aires de surfaces planes (2ème partie). *Petit X* 8, 5–30.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20(4), 387–424.

Dorier J.-L. (2006) *Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, perspectives théoriques sur leurs interactions*, Cahiers Leibniz, 12.

Guedj M., Laube S., Savaton P. (2007) Vers une didactique de l'histoire des sciences. Éléments de problématiques et de méthodologie pour une didactique de l'épistémologie et de l'histoire des sciences et des techniques (EHST). In Marquet P., Hedjerassi N., Jarlegan A., Pacurar E., Remoussenard P. (Eds.) *Actes du colloque AREF*, Strasbourg.
http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Muriel_GUEDJ_285.pdf

Jahnke N.-H., Acarvi A., Barbin E., Bekken O., Furinghetti F., El Idrissi A., da Silva C.-M.-S., Weeks C.(2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel J., van Maanen J. (Eds.) *History in MathematicsEducation: The ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer.

Jankvist U.-T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 235–261.

Keller A. (2006) Expounding the Mathematical Seed, A Translation of Bhāskara I on the Mathematical Chapter of the *Āryabhaṭīya* (2 vol.)."Science Networks", *Historical Studies* (30), Basel: Birkhäuser

Munier V., Passelaigue D. (2012) Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma* (38), 106–147.

Perrin-Glorian M.-J. (1990) L'aire et la mesure. *Petit X* (24), 5–36.

Perrin-Glorian M.-J. (2002) Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.299–315). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions

Proust C. (2005) Le calcul sexagésimal en Mésopotamie.
Repéré à http://culturemath.ens.fr/content/le-calcul-sexagesimal-en-mesopotamie-2461

Proust C. (2007) Tablettes mathématiques de Nippur. *Varia Anatolica (XVIII)*. Istanbul: IFEA, De Boccard.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: Editions L'Harmattan.

Rogalski J. (1985) *Acquisition de la bidimensionnalité*. Thèse d'Etat.

SAW ERC Hypothèses. (s.d.) Mathematical Sciences in the Ancient World. Repéré à http://sawerc.hypotheses.org/

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* (10/2.3), 133-170.

MANUELS SCOLAIRES

Blanc J.-P., Bramand P., Debû P., Gély J., Lafont E., Peynichou D., Vargas A., (2010) *Pour comprendre les mathématiques CM2. Programmes 2008*, Paris : Hachette

Brissiaud R., Clerc P., Lelièvre F., Ouzoulias A., (éd. 2013) *J'apprends les maths CM2. Programmes 2008*, Paris : Retz (Présente édition: 2010)

Champeyrache G., Evanno C., (2011) *La clé des maths CM2. Programmes 2008*, Paris : Belin

Corrieu L., Jardy Jacq., Jardy Jack., Rouy L., (2009) Vivre les maths CM2. Programmes 2008, Paris : Nathan

Peltier M.-L., Briand J., Ngono B., Vergnes D., (2009) *EuroMaths CM2. Programmes 2008*, Paris : Hatie

UNE MODÉLISATION D'UNE ÉCLIPSE TOTALE DE SOLEIL

Eric LAGUERRE*

Résumé – Nous étudions un processus de modélisation du phénomène d'éclipse totale de soleil. Nous prenons appui sur la Didactique des Domaines d'Expérience. Nous élaborons et mettons en œuvre une situation d'apprentissage liée à la trigonométrie. L'objectif est d'aborder avec des élèves une forme de modélisation par le biais de l'articulation qui peut s'établir entre le monde physique et les concepts mathématiques inhérents. L'objectif second est de tenter de comprendre comment une perspective dynamique liée à la modélisation au sein de la DDE peut aboutir à une planification d'activités enseignantes cohérentes.

Mots-clefs : éclipse, modélisation, domaine d'expérience, trigonométrie

Abstract – We study a process of modeling of the total sun eclipse phenomenon. We carry out the study in the framework of the Domains of Experience Didactics. We implement a learning situation involving trigonometry. The objective is to approach a shape of modeling with students using the articulation which could become established between the real world and the inherent mathematical concepts. The second objective is to try to understand how a dynamic prospect connected to the modeling within the DED can lead to planning coherent teaching activities.

Keywords: eclipse, modeling, domains of experience, trigonometry

I. INTRODUCTION

Dans cette recherche, nous nous intéressons à la modélisation d'une éclipse totale de soleil avec pour visée de mettre en relation ce phénomène avec des mathématiques enseignées au collège en France. Pour cela, nous illustrons notre approche en prenant appui sur une situation d'enseignement qui est construite dans le double but que les élèves comprennent le phénomène d'éclipse au moins partiellement et que soit introduite la notion de tangente en classe de troisième (neuvième année de scolarité). Dans un premier temps, nous définissons la modélisation du réel en prenant appui sur la Didactique des Domaines d'Expérience (DDE dans la suite ; Boero, Consogno, Guala & Gazzolo 2009). Dans un second temps, nous élaborons un domaine d'expérience en nous fondant sur les relations qui peuvent éventuellement être établies au sein d'une étude des éclipses totales de soleil entre le macro-espace, le méso-espace et le micro-espace. Nous pouvons signaler que d'autres chercheurs ont adopté une problématique d'étude similaire en prenant appui sur un autre cadre théorique que le nôtre (Matheron & Noirfalise 2010).

* Université Toulouse Jean Jaurès – France – eric.laguerre@univ-tlse2.fr

Laguerre E. (2015) Une modélisation d'une éclipse totale de soleil. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 468-477.

II. CADRE THEORIQUE

1. La didactique des domaines d'expérience

Nous fondons notre travail sur la Didactique des Domaines d'Expérience (Boero & al. 2009).

Qu'est-ce qu'un domaine d'expérience ?

Un domaine d'expérience (Dapueto & Parenti 1999) est relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- la composante interne de l'élève qui est caractérisée par ses savoirs, ses pratiques et ses schèmes relatifs au domaine visé, avec leur part de subjectivité et de références culturelles parfois liées aux émotions ; cette composante permet à l'élève de faire un repérage des données qu'il juge pertinentes du monde réel, un choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel si cela est nécessaire ce qui aboutit à une représentation du monde réel ;
- la composante interne de l'enseignant qui, elle aussi, est caractérisée par ses savoirs relatifs au domaine visé, ses pratiques, ses représentations, avec leur part de subjectivité, de références culturelles et bien sûr ses objectifs d'enseignement ;
- et la composante externe qui est liée, par exemple, aux contraintes provenant de la réalité même (comme le fait, dans le cadre des éclipses totales de soleil, que la lune et la terre ont des mouvements réguliers et qu'il est parfois impossible de procéder à certaines mesures de longueurs dans le macro-espace), aux moyens matériels (les instruments avec leurs fonctionnements), aux représentations symboliques (les schémas et les signes par exemple), aux règles et usages sociaux, etc.

L'objectif est de prendre appui sur les représentations des élèves et de les faire évoluer à partir de la composante de l'enseignant et de la composante externe. Le but est alors de repérer chez les élèves ce qu'ils savent déjà et ce qu'ils ne savent pas encore et de réfléchir aux conditions culturelles et didactiques de l'acquisition de savoirs. La conception des mathématiques dans un DE dépasse l'unique maîtrise des symboles, des règles et des procédures et sous-tend des compétences de raisonnement et de modélisation (Boero & Douek 2008).

Dans ce cadre, un modèle est construit à partir d'artefacts matériels et d'artefacts liés aux mathématiques ainsi qu'aux registres symboliques. Ces différents artefacts servent de médiateurs sémiotiques (Bartolini Bussi & Mariotti 2008).

Dans notre recherche, nous travaillons sur la modélisation d'un problème physique posé initialement dans le monde réel. A ce sujet, l'idée que nous prenons en considération est le fait qu'un modèle apparaissant à un certain niveau de la modélisation du réel constitue une nouvelle réalité, ce qui correspond à la prise en compte de l'existence de différentes interprétations de la réalité. Nous nous plaçons dans le cas d'expériences ou de faits réels directement observables.

Que pouvons-nous entendre par modélisation du réel dans le cadre de la DDE ?

2. La modélisation du réel

Les modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur…) et des artefacts tels que les triangles rectangles, les angles etc., au sein des modèles mathématiques. Mais un modèle peut lui-même être employé comme artefact dans le but de construire d'autres modèles. A partir d'une situation tirée de la réalité, un déplacement s'effectue de modèle à modèle pour créer une nouvelle interprétation de la réalité initiale ou une nouvelle réalité. Ainsi la réalité peut se présenter sous une forme modélisée ou sous une réalité fruit elle-même de la construction de plusieurs modèles.

Mais avec Tiberghien et Vince (2000), nous pouvons considérer que certains modèles de la réalité physique sont difficiles à construire par les élèves eux-mêmes.

> Ces liens entre objets du monde des sensations perceptives et objets conceptuels de la physique, pour évident qu'ils puissent paraître au physicien, sont à construire pour l'élève. Les analyses du savoir de la physique et les difficultés des élèves déjà connues nous conduisent à considérer que ces liens ne sont évidents ni à construire ni à utiliser pour décrire et/ou prédire. (Tiberghien & Vince 2000, p.340)

Le fait de rendre les phénomènes liés au son visibles aux élèves par une modélisation physique que ces derniers élaboreraient est une chose difficile à mettre en place. C'est la raison pour laquelle les auteurs conçoivent un logiciel qui favorise une telle activité chez les élèves en simulant des phénomènes sonores simples. Ces simulations représentent une forme de modélisation proposée directement par les expérimentateurs. Nous faisons nôtre cette idée qui consiste à penser, en sciences expérimentales, qu'il est parfois nécessaire d'imposer à un moment ou à un autre un modèle d'un phénomène qui ne représente qu'une étape dans le processus de modélisation de ce dernier.

III. PROBLEMATIQUE

L'objectif est que les élèves, d'une part, parviennent à une interprétation approfondie du phénomène que nous aurons retenu et, d'autre part, qu'ils aient accès à l'étude d'un nouveau concept mathématique. Plus précisément, notre travail consiste à proposer aux élèves une modélisation d'une éclipse totale de soleil. En premier lieu, le but de la mise en œuvre de la situation est de favoriser chez eux la compréhension du phénomène qui peut être mis en rapport avec la notion de diamètre apparent (Martinez 1987) qui correspond à l'angle sous lequel est vu un objet (figure 1). Nous pouvons dire d'ores et déjà qu'étant lié à un objet comme la lune par exemple, le diamètre apparent est fonction de la distance D entre l'objet et l'observateur, de la taille de l'objet, ici le diamètre d de la lune, et de sa forme.

***Figure 1** - Le diamètre apparent de la lune est 2θ.*

Nous avons alors la relation : $tan\theta = \frac{d}{2D}$.

Aussi, en second lieu, après avoir mis en évidence l'égalité de certains rapports de mesures de longueurs, le but est de faire accéder les élèves à la définition de la tangente dans un triangle rectangle.

Du point de vue pratique, nous nous interrogeons, tant du côté des élèves que du côté de l'expérimentateur, au sujet des phases de modélisation des éclipses totales de soleil que nous proposons :

Quelle est, *a priori*, la composante externe de la situation de modélisation proposée par l'expérimentateur ?

Quels sont les tâches et les objectifs précis alloués aux élèves quant à notre approche de la modélisation ? Quelle organisation est prévue ?

En nous appuyant sur la mise en œuvre de la situation, quelles descriptions précises pouvons-nous faire des phases de modélisation du phénomène des éclipses de soleil au sein de la DDE ?

Nous chercherons en particulier à savoir comment le contexte interne des élèves au sujet des éclipses totales de soleil évolue après la mise en place de la modélisation. En d'autres termes, comment la représentation des éclipses totales de soleil a-t-elle évolué chez les élèves après la modélisation du phénomène qui se conclut par l'introduction de la tangente ?

IV. METHODOLOGIE

Nous analysons la composante interne des élèves ainsi que d'autres contraintes éducatives et nous planifions une situation d'enseignement. Pour cela, nous commençons par faire apparaître les contraintes liées aux connaissances initiales des élèves et aux programmes nationaux ainsi que leurs effets sur l'élaboration de la situation et sur les choix didactiques liés au développement de la modélisation en classe au regard de la perspective théorique choisie. Plus précisément, nous fondons notre réflexion sur une analyse culturelle en travaillant sur les programmes de Physique du collège et sur l'exploitation d'informations que les élèves de troisième, avec lesquels nous travaillons, ont récoltées sur le sujet. Cela nous permet de répondre à la question suivante : quelle est la composante interne a priori des élèves au sujet des éclipses de soleil ? Nous poursuivons par une analyse des contenus physiques et mathématiques relatifs aux éclipses totales de soleil avec pour objectif de répondre à la question suivante : quels sont les concepts de la physique et des mathématiques qui peuvent être approchés par le Domaine d'Expérience des éclipses totales de soleil ? Nous manquons de place dans ce texte pour exposer nos résultats à ce sujet (voir Laguerre 2014).

Dans la partie théorique, nous nous sommes interrogés sur la construction en classe de modèles de phénomènes physiques et plus précisément sur la part de cette construction qui peut relever uniquement de la responsabilité de l'enseignant, en complément de celle qui est également assumée par les élèves. Dans notre situation, parce que les élèves n'ont pas une prise directe sur le phénomène étudié lié au macro-espace, par choix, ce dernier est directement modélisé dans le méso-espace par l'expérimentateur. Nous considérons qu'une éclipse totale de soleil se produit lorsque le diamètre apparent de la lune est supérieur ou égal à celui du soleil. L'une des méthodes comparatives pour déterminer le diamètre apparent d'un objet consiste à comparer la taille de l'objet à estimer au champ d'un instrument donné comme des jumelles, une lunette ou un télescope. Nous avons décidé d'employer un objet plus simple : la lorgnette. Quinze d'entre-elles sont construites à partir de boîtes parallélépipédiques toutes de dimensions différentes. Chacune est percée d'un trou de visée et d'une fente. Les élèves ont à viser une mire constituée d'une bande de papier de 1m50 à l'aide de lorgnettes (figure 2). Cette visée va consister à faire coïncider les extrémités de la mire avec celles de la fente afin que la longueur de cette dernière se superpose le plus exactement possible avec celle de la mire.

Figure 2 *–Lorgnette*

Les élèves ont alors à modéliser le phénomène du méso-espace dans le micro-espace dans le but de le comprendre dans le méso-espace puis dans le macro-espace et d'accéder au sens de la tangente dans un triangle rectangle.

V. ILLUSTRATION DE LA MODELISATION D'UNE ECLIPSE DE SOLEIL

1. Séance du modèle du méso-espace

Dans le cadre de travaux préalables dont nous ne pouvons rendre compte dans les limites du présent texte, les élèves ont bien pris conscience du mouvement des astres (Laguerre 2014). Ils ont noté que pour qu'il y ait une éclipse de soleil, il fallait que la terre, la lune et le soleil soient alignés sans bien sûr être conscients qu'une question de distances était à prendre en compte. La transposition du phénomène dans le méso-espace est totalement prise en charge par l'expérimentateur grâce à la situation de visée de la mire avec les lorgnettes. Il s'agit de transposer ce phénomène de l'espace à trois dimensions lié à l'alignement des astres que les élèves ont mis en avant à un phénomène plan (trou de visée, mire et fente de la lorgnette).

Analyse a priori

Décrivons la composante externe initiale, en particulier le matériel dont dispose les élèves et les actions qu'ils mènent avec ce dernier. Quinze binômes sont constitués. Chaque binôme vise successivement à l'aide de sa lorgnette une mire fixée sur un tableau en faisant coïncider les extrémités et le milieu de la mire avec les extrémités et le milieu de la fente de la lorgnette. Afin de faciliter cette visée, le milieu et les extrémités de la mire sont représentés par trois traits et le milieu de la fente d'une lorgnette est matérialisé par un morceau de ficelle. La longueur de la lorgnette et la longueur de sa fente ont des effets sur le positionnement des élèves qui assure la coïncidence fente-mire. Les binômes matérialisent ce lieu de la visée avec un carton identificateur.

Passons alors à la composante interne élève. Au sujet de la visée, un travail préalable sur l'alignement a été entrepris mais nous ne pouvons pas le développer ici. Les élèves ont pris conscience qu'il est nécessaire de faire coïncider les extrémités de la fente et de la mire et que pour cela, ils doivent se déplacer perpendiculairement au plan de la mire.

Intéressons-nous à la composante interne enseignant. Les lorgnettes sont fabriquées de telle façon qu'à la fin de la séance apparaissent trois lieux de visées représentés par trois rassemblements distincts de cartons dans la cour. L'objectif est que les élèves fassent ce constat. Pour cela, nous avons à prendre en compte d'éventuels écarts de visées. La taille des cartons identificateurs et le fait qu'ils sont rassemblés dans un rayon de 50 cm permettent qu'ils se superposent au moins partiellement. Les élèves doivent mesurer la distance approximative séparant un lieu de visée de la mire.

Analyse a posteriori

Nous allons mettre en évidence l'évolution de la composante interne élève. Dans la cour, après que tous les binômes ont procédé à la visée en ayant marqué l'emplacement de cette dernière, certains élèves remarquent rapidement que les cartons identificateurs sont regroupés en trois lieux (figure 3). D'autres rajoutent que des lorgnettes différentes peuvent avoir le même lieu de visée. Ils ont procédé à la mesure de la distance de visée pour chaque tas.

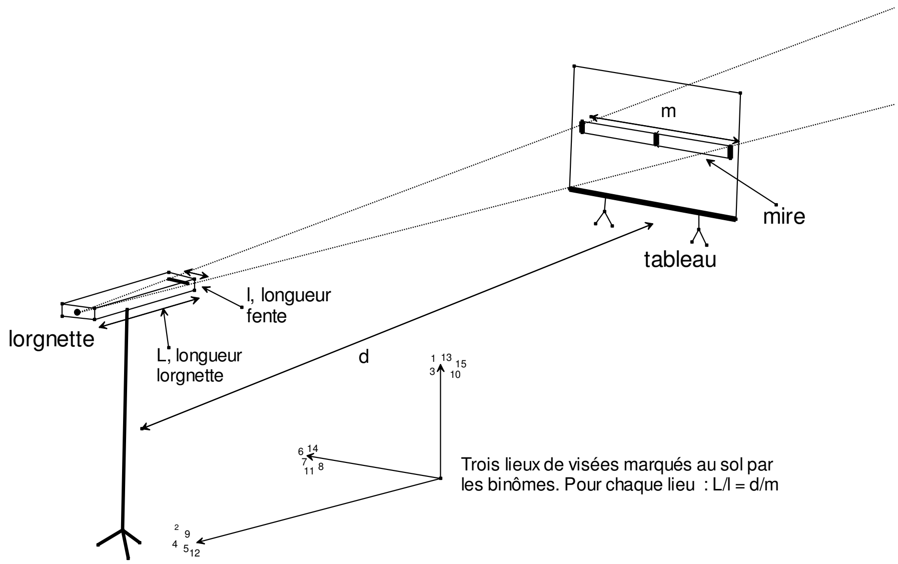


Figure 3 *–Représentation des lieux de visée*

2. *Séance de la représentation plane à l'échelle*

Analyse a priori

Pour ce qui est de la composante interne élève, une analyse des contenus mathématiques en jeu dans la modélisation des lorgnettes que nous ne détaillons pas, permet de dire que les élèves ont travaillé sur les représentations planes à l'échelle. Ces connaissances font partie de leur culture constituée par un travail en particulier en cours de technologie. Une analyse des contenus physiques liés à la situation de visée dans le micro-espace met en évidence que les élèves doivent transposer les contraintes du méso-espace (être bien « en face » et faire coïncider les extrémités de la mire avec celle de la fente de la lorgnette) au micro-espace (aligner trou de visée, milieu de la fente et milieu de la mire).

Composante externe : ces phases doivent permettre aux apprenants, en premier lieu, d'imaginer une façon de représenter la lorgnette ainsi que les longueurs qui sont retenues pour la modélisation. Modéliser des lorgnettes utilisées dans l'espace à trois dimensions par un dessin plan constitue une modélisation qui est loin d'être évidente. Une autre difficulté est liée au fait que des trajets lumineux immatériels doivent être tracés afin de matérialiser la visée dans le micro-espace.

Une fois les lorgnettes représentées à l'échelle sur papier calque, chaque binôme procède à une visée de la mire dans le micro-espace. La mire est représentée par un segment qui n'est bien sûr pas à la même échelle que les lorgnettes.

En ce qui concerne la composante interne enseignant, c'est-à-dire ici l'objectif principal de la représentation à l'échelle, le but pour les apprenants est d'aboutir à la création d'un artefact matériel grâce à une représentation plane et à l'échelle des lorgnettes par des rectangles en papier calque sur lesquels sont indiqués la « fente » et le trou de visée. Cette représentation doit permettre, d'une part, la matérialisation d'une visée du micro-espace et, d'autre part, d'aboutir à une première procédure d'anticipation d'une visée du méso-espace dans le micro-espace. Les élèves, après argumentation, doivent se mettre d'accord sur le fait qu'une représentation plane suffit et sur les longueurs qui sont retenues. Ensuite ils procèdent à une visée dans le micro-espace pour obtenir une première anticipation d'une visée du méso-espace.

Analyse a posteriori

Constatant collectivement que dans le méso-espace, la situation n'était pas facile à étudier, après avoir eux-mêmes proposé de la représenter par un schéma à l'échelle, les élèves discutent, sans disposer de support matériel, pour se mettre d'accord sur le type de représentation qu'ils doivent produire. Quelques élèves sont tentés de schématiser la visée dans l'espace à trois dimensions. Dans ce cas, ils représentent même parfois l'élève qui vise. D'autres produisent des schémas hybrides relevant à la fois du plan et de l'espace. Mais pour deux binômes, la représentation rectangulaire plane est proposée rapidement. Après exposé des schémas obtenus et après échanges entre élèves, les binômes se rangent du côté de la représentation plane. C'est la composante interne des élèves en général qui évolue par le fait qu'il faille parfois négliger certaines choses pour mieux appréhender des objets. Il leur reste à trouver les longueurs que nous allons retenir pour aboutir au modèle.

S'en suit un autre travail en binôme pour la mise au point définitive de la représentation des lorgnettes à l'échelle. Cette échelle est imposée à l'ensemble des groupes et tient compte du centrage de la « fente » et du trou de visée. Sont consignées au tableau de la classe et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette (tableau 1). Les élèves disposent de feuilles de calque de format A4. Chaque binôme reproduit sa lorgnette en cinq exemplaires afin que chaque binôme d'un même groupe de cinq lorgnettes équivalentes possède les calques de chacune.

Du point de vue de la composante interne enseignant, nous pouvons dire que nous modélisons une chose visible dans le monde palpable. En effet, des rectangles de même type percés d'un point de visée et « fendus » d'un segment représentant les lorgnettes dans le plan peuvent aussi apparaître dans la situation.

Chaque binôme reçoit l'ensemble des calques des lorgnettes de sa catégorie (A, B ou C).

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Largeur fente	2,75	6,1	1,55	5,2	6,4	2,55	4	3,5
Longueur	27,5	18,3	15,5	15,7	19,2	16	25	22
Largeur	19	11,5	13	9,5	7,5	13	9	14,5
Catégorie	B	C	B	C	C	A	A	A

N°	9	10	11	12	13	14	15
Largeur fente	7,7	1,8	3	4,2	2,5	1	1,3
Longueur	23	18	19	12,7	25	12,5	13
Largeur	8,5	12,5	12	9,5	9,5	13	9
Catégorie	C	B	A	C	B	A	B

***Tableau 1** - Dimensions des lorgnettes avec répartition par catégorie.*

Après avoir modélisé une lorgnette et son champ de visée, l'action de visée d'une mire est elle-même modélisée grâce à cet artefact matériel. Les élèves de chaque groupe procèdent aussi à une visée dans le micro-espace avec l'un de leur calque. Ils ont globalement assimilé le fait que pour qu'une mire soit perçue correctement dans le micro-espace, il faut que deux points soient vérifiés. Les milieux de la mire, de la fente et le trou de visée doivent être alignés perpendiculairement à la mire. Cette dernière doit entrer dans le champ de visée de la lorgnette.

Du point de vue de la composante externe, nous dirons que c'est un premier exemple qui illustre le fait que la modélisation constitue une interface entre deux interprétations de la réalité en rapport avec deux artefacts distincts liés à un même phénomène. Ce rôle de médiation sémiotique est en effet apparent grâce au lien établi entre, d'une part, le fait qu'il faut, pour viser correctement dans la cour, être de face et que les extrémités et les milieux des deux objets doivent coïncider (approche outil) et, d'autre part, l'idée que dans le modèle plan, les extrémités et les milieux en question se situent respectivement sur les côtés et la bissectrice de l'angle de visée (approche objet).

3. *Séance de l'équivalence des lorgnettes*

Analyse a priori

Centrons-nous autour de la composante externe. Les groupes d'élèves sont conservés afin de percevoir les champs de visées identiques par superposition de cinq lorgnettes équivalentes. Dans un second temps, sont également consignées au tableau et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette. Sont inscrites aussi celle de la mire ainsi que les distances dans le méso-espace des trois lieux de visée à la mire.

Pour ce qui est de la composante interne élève, l'analyse des contenus mathématiques permet de dire que les élèves doivent avoir travaillé sur l'égalité des angles et sur l'égalité de fractions. Cela a été fait en classe de sixième pour les angles et dans les classes de sixième à troisième pour les fractions.

Enfin, en ce qui concerne la composante interne enseignant, la représentation de la situation de visée doit permettre la mise en évidence de l'équivalence des lorgnettes à partir de la superposition de leur calque. Le fait que les lorgnettes qui appartiennent à la même catégorie de visée ont leurs rapports fente/longueur lorgnette égaux doit aussi émerger. Les contraintes de la composante externe incitent à particulariser les lorgnettes d'une des trois catégories (C) : elles sont telles que nous pouvons supposer que le rapport peut être facilement identifié (largeur fente/longueur lorgnette = 1/10). Dans le prolongement de ce que les élèves ont vu en classe de quatrième en trigonométrie la définition de la tangente complète le tout.

Analyse a posteriori

Pour ce qui est de la composante interne, les élèves d'un groupe obtiennent une bonne équivalence de leurs lorgnettes. Pour cela, ils tracent le champ visuel d'une lorgnette de leur tas et se rendent compte, par superposition, que les autres lorgnettes ont le « même angle ». Nous pouvons conclure que seul ce groupe a obtenu une bonne équivalence des cinq lorgnettes, mais que tous les autres, à part un, mettent en évidence cette équivalence pour au moins trois lorgnettes. La précision des schémas sur papier calque ainsi que sur la feuille blanche est avancée par certains élèves pour expliquer les erreurs apparentes. Une analyse de la composante interne enseignant nous donne alors ce qui suit. Le modèle des lorgnettes en papier calque constitue une nouvelle réalité qui fait émerger un nouveau constat. Dans la salle de classe, après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque, les élèves constatent d'eux-mêmes par superposition des calques la coïncidence de cinq angles.

Une nouvelle interprétation peut être faite. Dans la salle de classe, après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque, les élèves constatent que l'équivalence des lorgnettes correspond au fait qu'elles ont le même angle de visée (première interprétation mathématique). Il s'agit d'un deuxième exemple qui permet de stipuler que la modélisation est une interface entre un événement lié au modèle (même angle de visée) et un autre en rapport avec la situation initiale.

C'est par des allers et retours entre différents méta-niveaux d'interprétation de la réalité, dont les divers modèles sont une des composantes, que la modélisation se met en place et s'élabore étape par étape.

Par la suite, un nouvel événement dans le modèle lié à l'événement initial apparaît. Dans la salle de classe, après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents et après plusieurs échanges, des élèves finissent par dire qu'en divisant la longueur de la fente d'une lorgnette par la longueur de la lorgnette on trouve à peu près la même chose pour des lorgnettes équivalentes. Une fois cette étape franchie, nous poursuivons la modélisation de la situation et des événements initiaux par la définition d'un nouvel objet : la tangente d'un angle.

VI. CONCLUSION

La situation d'enseignement que nous avons mise en place a pour objectif d'aborder avec des élèves une méthode de modélisation d'un phénomène du réel et de légitimer l'introduction d'une nouvelle notion mathématique telle que la tangente. Nous nous appuyons sur les composantes internes élève/enseignant et sur la composante externe de la DDE. Nous pouvons dire que la modélisation s'établit par un certain nombre d'allers et retours entre différents niveaux d'interprétation de la réalité. Nous avons illustré ces dires à l'aide d'une situation de construction d'une modélisation d'une éclipse totale de soleil. Un autre objectif était de mettre en évidence la manière dont cette situation a pu favoriser chez des élèves la compréhension du phénomène et l'accès à la signification de la tangente.

Au début de la situation, les élèves devaient savoir qu'il y a une éclipse totale de soleil lorsque les trois astres terre, lune et soleil sont alignés, ce qui a été confirmé tant par leurs productions initiales que par les programmes de physique. Aucune condition sur les distances entre les objets célestes n'est apparue dans les écrits des élèves ni n'est exigée dans les textes officiels. Tout notre travail a consisté à faire émerger cette condition. Le choix de transposer le phénomène dans le micro-espace grâce aux lorgnettes s'est produit au vu des programmes et des connaissances initiales des élèves.

L'une des difficultés qui peuvent être rencontrées est que les élèves n'aient aucune fréquentation directe de certains phénomènes, ce qui ne leur permettrait pas d'amorcer seuls une première étape de la modélisation. C'est justement le cas en ce qui concerne les éclipses totales de soleil. Même si ce phénomène fait partie des programmes de collège et de la culture des élèves de ces âges, il s'agit d'un exemple où les représentations préexistantes chez eux sont peu nombreuses. C'est la raison pour laquelle l'expérimentateur a largement pris part à la mise en place du processus de modélisation grâce à la mise en œuvre de la situation des lorgnettes.

D'une manière un peu plus générale au sein de notre situation, en ce qui concerne des choix didactiques à long terme, nous suivons les travaux de Tiberghien. Nous émettons l'hypothèse qu'une des conditions pour aborder avec des élèves d'une façon cohérente la modélisation de phénomènes tirés de la réalité semble être parfois de leur proposer un premier modèle qu'ils ne peuvent pas construire. Par contre, la représentation plane et à l'échelle des lorgnettes est un modèle relevant du micro-espace qui a été construit par les élèves. Deux autres choix didactiques à long terme semblent déterminants en ce qui concerne la mise en œuvre de la modélisation en classe. D'une part, il faudrait s'assurer que le modèle du phénomène choisi est bien pertinent. D'autre part, au vu du temps qu'il faut consacrer à la mise en place d'une telle situation de modélisation, un choix judicieux de la notion mathématique à travailler à un niveau scolaire donné devrait être fait.

REFERENCES

Bartolini Bussi M-G., Mariotti M-A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education 2nd edition* (pp. 746–783). New York : Routledge.

Boero P., Consogno V., Guala G., Gazzolo T. (2009) Research for innovation : a teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades I-V and some related basic research results. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 29(1), 59-96.

Boero P., Douek N. (2008) La didactique des domaines d'expérience. *Carrefours de l'éducation* 26, 99-114.

Dapueto C., Parenti L. (1999) Contributions and obstacles of contexts in the developpement of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 39, 1-21.

Laguerre E. (2014) Une modélisation d'une éclipse solaire totale. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 34(2/3), 133-165.

Martinez P. (1987) *Astronomie, le guide de l'observateur (Tome 1).* Toulouse : Société d'Astronomie Populaire.

Matheron Y., Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Tiberghien A., Vince J. (2000) Simuler pour modéliser. *Sciences et techniques éducatives* 7(2), 333-366.

L'ORDRE DE GRANDEUR NANO, UNE DIFFICULTÉ DIDACTIQUE INTERDISCIPLINAIRE ET UN ENJEU CITOYEN

Marie-Hélène LÉCUREUX-TÊTU*

Résumé –. Nous étudions ici un dispositif d'enseignement sur les nanotechnologies, mis en place dans un collège français de façon interdisciplinaire, dont l'objectif est de permettre la compréhension de l'ordre de grandeur nanométrique. Les nanotechnologies sont porteuses de questionnements sociaux et éthiques ; pour pouvoir répondre à ces questionnements, les citoyens doivent appréhender l'ordre de grandeur nanométrique et ce qui s'y joue. L'analyse du dispositif met en évidence les difficultés d'articulation entre les disciplines et plus particulièrement la difficulté à enseigner la notion d'ordre de grandeur.

Mots-clefs : interdisciplinarité, ordre de grandeur, nanotechnologies, TAD

Abstract– We study a teaching device on nanotechnologies set up in a French college in an interdisciplinary way. The aim of this device is to allow the understanding of the nanometric order of magnitude. Nanotechnologies are carriers of social and ethical issues; to answer these questions the citizens must understand the order of nanometer size and what plays it. The analysis highlights the difficulties of articulation between disciplines and especially the difficulty to teach the notion of order of magnitude.

Keywords: interdisciplinarity, order of magnitude, nanotechnology, ATD

I. INTRODUCTION

Dans le cadre de la promotion de la culture scientifique et technique en France, les professeurs des disciplines scientifiques ont la possibilité d'organiser des dispositifs d'enseignement permettant de rencontrer des chercheurs.

Nous nous intéressons à un dispositif de ce type, construit autour de la recherche sur les nanotechnologies, et aux questionnements éthiques associés. Ce dispositif a été mis en place dans quelques collèges français (classes de 3^{e}, élèves de 14-15 ans, 4^{e} année de collège). Nous analysons plus particulièrement la version initiale de ce dispositif, dans les années scolaires 2009-2010 à 2012-2013. La construction en a été pensée de façon interdisciplinaire. Notre analyse concerne plusieurs parties de ce dispositif :

1. Des séances d'enseignement autour de la question « qu'est-ce que les nanotechnologies ? », avec les professeures de mathématiques, physique-chimie, technologie. Nous appellerons ces séances les « séances de sciences » par abus de langage. Ces séances ont précédé la visite d'un laboratoire de recherche sur les nanotechnologies, le laboratoire d'analyse et

* Espé de l'académie de Toulouse, Université Toulouse Jean Jaurès – France – marie-helene.lecureux@univ-tlse2.fr

Lécureux-Têtu Marie-Hélène (2015) L'ordre de grandeur nano, une difficulté didactique et un enjeu pour le citoyen. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 478-489.

d'architecture des systèmes (LAAS). Des chercheurs du LAAS interviennent dans la dernière séance de sciences, et ont encadré la visite. Nous ne savons pas comment cette visite s'est déroulée, et en particulier comment les professeures des classes sont intervenus, si ce n'est en accompagnant les élèves.

2. Une partie débat en éducation civique, juridique et sociale (ECJS), menée par le professeur d'histoire-géographie. Une chercheure en sciences de l'éducation s'est engagée dans ce projet. Elle a travaillé plus particulièrement avec le professeur d'ECJS pour la mise en place du débat. Ce travail est réalisé en lien avec des chercheurs de l'équipe QSV (Questions Socialement Vives) de l'ENFA à Toulouse. Ces chercheurs ont publié à partir de l'analyse des débats, selon le point de vue QSV, on pourra consulter par exemple Brossais et Panissal (2013). Des études sur les relations aux sciences et le genre sont prévues, nous avons fait attention à garder les marqueurs de genre dans cette communication. Nos travaux apportent le regard plus spécifique de la didactique des mathématiques.

Par ailleurs, les élèves ont étudié en anglais du vocabulaire scientifique. En français, ils ont étudié un roman de science-fiction. Nous n'avons pas de trace du contenu de cette partie du dispositif.

Les résultats que nous présentons ici s'appuient sur l'analyse des séances de sciences, les enregistrements étudiés datant de l'année 2009-2010. Cette analyse a été réalisée à partir du cadre théorique fourni par la théorie anthropologique du didactique (TAD). Le débat en ECJS n'a pas été enregistré cette année-là, mais les années suivantes. Nous avons analysé deux débats : celui de l'année 2010-2011 et celui de 2012-2013. Cette analyse a été réalisée dans le cadre d'un mémoire de master recherche en didactique ; nous ne présentons ici qu'une petite partie des résultats.

Dans un premier temps, cette communication décrira les questionnements sociaux et/ou éthiques spécifiques aux nanotechnologies. Cette partie faisant appel à de nombreux sites internet, on trouvera après les références la liste des sites ressources. Nous mentionnerons dans cette partie certains points débattus par les élèves en ECJS, sans développer – faute de place – les contenus des débats. Dans un deuxième temps, nous décrirons certains résultats de l'analyse des séances de sciences. Enfin, nous nous attacherons plus particulièrement à l'enseignement de l'ordre de grandeur.

II. LES NANOTECHNOLOGIES, UN ENJEU CITOYEN

1. *Le nanomètre*

Intéressons-nous au préfixe *nano*. Ce préfixe est défini légalement en France et dans les 56 pays membres du bureau international des poids et mesures (BIPM) depuis la 11^{e} conférence générale des poids et mesures en 1960 : une nano unité correspond à 10^{-9} unité. Depuis cette conférence, d'autres préfixes ont été rajoutés en 1964, 1975, et en 1991, aussi bien pour des grands nombres que pour des petits nombres, ce qui met en évidence une évolution des besoins dans l'écriture des nombres.

Le nanomètre est l'ordre de grandeur de la dimension de certains atomes. Travailler à cette échelle donne de nouvelles propriétés. Ainsi les effets quantiques commencent à être perceptibles.

Certaines propriétés des matériaux sont liées à la surface, et non au volume. C'est le cas de la réaction chimique entre deux éléments, qui se fait par le contact, et donc par la surface. Considérons un cube de côté c : la masse est proportionnelle au volume, donc à c^3, et la surface est proportionnelle à c^2. Si on considère que le nombre de réactions chimiques est proportionnel à la surface, on obtient un rapport : nombre de réactions sur masse proportionnel à $1/c$. Un cube de l'ordre du nanomètre permet donc 1000 fois plus de réactions chimiques rapportées à la masse qu'un cube de l'ordre du micromètre.

En biologie, la dimension des cellules est de l'ordre de grandeur du micromètre. Les nanomatériaux présentent des dimensions bien inférieures et vont pouvoir interférer avec les cellules d'un organisme. Ainsi le nano-argent est utilisé pour ses propriétés antibactériennes.

Actuellement, l'homme est capable de fabriquer des objets dont au moins une dimension est de l'ordre du nanomètre, c'est ce qu'on appelle les nanotechnologies. Du point de vue savant, les nanotechnologies se positionnent d'emblée comme un objet pluridisciplinaire avec des recoupements entre informatique, biotechnologie, etc.

Les questionnements sociaux et éthiques liés aux nanotechnologies sont nombreux, et de différents types, nous présentons certains questionnements fondamentaux, en les reliant à ce qui a été travaillé par les élèves dans le cadre de l'éducation civique, juridique et sociale.

2. *Informatique et liberté*

Dans la visite du LAAS effectuée par les classes, les chercheurs montrent des expériences sur des objets connectés. Rappelons qu'en 2009 ce type d'objets n'était pas encore commercialisé. Au cours du débat de 2013, les élèves s'interrogeront sur la liberté de l'homme dans un monde très automatisé. Ils se questionneront aussi sur la sécurité informatique. Mais bien d'autres utilisations des nanotechnologies en informatique concernent le citoyen.

Les nanotechnologies ont permis une telle miniaturisation qu'on trouve maintenant des puces électroniques suffisamment petites pour les glisser sous la peau. Ce type de puce sert à marquer les animaux domestiques, ce qui permet d'identifier l'animal, de retrouver ses données médicales, en particulier les vaccinations. L'identification électronique est obligatoire pour ramener sur le territoire de l'Union Européenne un chat, un chien ou un furet.

De l'animal à l'homme, il n'y a aucune difficulté technique. Il est envisagé le marquage de malades difficiles aux USA, l'implantation de puces nanométriques utilisées comme badges pour entrer dans des locaux de la justice mexicaine, et utilisées sur des enfants au Mexique pour lutter contre les kidnappings.

La miniaturisation permet aussi un étiquetage qualifié d'« intelligent ». Ce système, appelé RFID, est composé d'une part d'une radio-étiquette, qui contient un émetteur et des circuits logiques (la puce électronique), et d'autre part d'un lecteur. La radio-étiquette n'a pas besoin d'énergie, celle-ci est apportée par le lecteur au moment de la lecture. Ce système est utilisé actuellement dans l'industrie : pour la gestion des stocks, les cartons d'objets fabriqués peuvent être ainsi marqués et suivis, le respect de la chaîne du froid peut être contrôlé. On imagine aussi des systèmes comme une machine à laver équipée d'un lecteur, et choisissant elle-même son programme en fonction des étiquettes du linge.

Les états européens disposent chacun d'une Commission Nationale de l'Informatique et des Libertés (CNIL). La CNIL française donne, dans une fiche pratique, les informations suivantes :

> La communication du 30 octobre de M. Philippe Lemoine, commissaire de la CNIL, sur le sujet de la radio-identification identifie 4 pièges qui concourent à minorer le risque que présente cette technologie en matière de protection des données personnelles et de la vie privée : l'insignifiance [apparente] des données, la priorité donnée aux objets [en apparence toujours vis-à-vis des personnes], la logique de mondialisation [normalisation technologique basée sur un concept américain de « privacy » sans prise en

> compte des principes européens de protection de la vie privée] et enfin le risque de « non vigilance » individuelle [présence et activation invisibles].
>
> Les technologies de radio-identification peuvent être utiles pour des finalités légitimes bien définies, mais, parce que le maillage dense de milliers d'objets qui entoureront une personne pourra ainsi être analysé, de façon permanente (le potentiel de rayonnement d'un RFID est illimité dans le temps car aucune batterie n'est nécessaire), permettant potentiellement le «profilage » des individus, elles font peser sur les individus un risque particulier.

Ce texte est à mettre en regard avec le débat 2013. Les élèves ont débattu de l'espionnage rendu possible par la miniaturisation des caméras ; l'insignifiance apparente des données se retrouve dans ce qu'ils expriment. Signalons que la CNIL fournit des documents pour les enseignants de collège. Il nous semble qu'il y a ici un travail conséquent à faire pour la formation du citoyen.

3. *Les risques sanitaires et environnementaux*

Nous nous appuyons ici sur de la documentation issue du site VeilleNanos. Ce site dépend de l'association de veille et d'information civique sur les enjeux des nanosciences et des nanotechnologies (AVICENN), dont l'objectif est de proposer une information transversale et indépendante sur les enjeux sociétaux soulevés par les nanotechnologies.

La fiche de ce site sur les portes d'entrées des nanomatériaux dans le corps humain indique qu'on distingue trois voies d'exposition potentielle aux nanomatériaux.

La première voie est celle de l'inhalation, qui concerne particulièrement les personnes qui travaillent dans les nanomatériaux.

La deuxième voie est celle du contact cutané par le biais des cosmétiques, comme le dioxyde de titane dans les crèmes solaires, mais aussi par les vêtements. Un exemple est donné par le nano-argent qui est utilisé pour ses propriétés antibactériennes dans la fabrication des chaussettes. La barrière cutanée est plus facile à franchir à l'échelle nanométrique qu'à l'échelle micrométrique.

La troisième voie est celle de l'ingestion. Certains additifs alimentaires contiennent des nanoparticules, comme les additifs E550, E551 (dioxyde de silice), utilisés pour les propriétés antiagglomérantes ou l'additif E 171 (dioxyde de titane) utilisé pour donner un aspect plus blanc et allonger la durée de conservation de certains bonbons. Les nanomatériaux sont utilisés dans les emballages alimentaires pour améliorer la conservation, la transparence, mais aussi l'écoulement des sauces. La question de la migration de nanoparticules dans l'aliment emballé n'est pas résolue.

La France est le premier pays à se doter d'un répertoire des nanomatériaux, R-Nano. Il s'agit du décret n° 2012-232 du 17 février 2012 ; son entrée en vigueur devait avoir lieu en 2013, elle a été effective en mai 2014. En voici un extrait :

> Art. R. 523-13. – Chaque fabricant, importateur et distributeur d'une substance à l'état nanoparticulaire, en l'état ou contenue dans un mélange sans y être liée, ou de matériaux destinés à rejeter cette substance dans des conditions normales ou raisonnablement prévisibles d'utilisation effectuent la déclaration exigée à l'article L. 523-1 dès lors qu'il produit, importe ou distribue au moins 100 grammes par an de cette substance.

On retrouve ces préoccupations dans les débats réalisés en ECJS. La question de l'impact environnemental des objets issus des nanotechnologies est une question qui prendra une place importante dans le débat de 2013.

4. *L'hybridation avec le vivant.*

On rencontre l'imitation du vivant en médecine dans la vectorisation des médicaments. Il est possible d'imiter les flagelles de bactéries pour que le médicament puisse être transporté jusqu'à la cellule malade.

Un premier questionnement a été soulevé dans la science-fiction, en imaginant la prolifération de nano robots. La gelée grise est une idée apparue dans un roman, *Engines of Creation, the Coming Era of Nanotechnology* publié en 1986 par Eric Drexler et traduit en français en 2005. Il s'agit de nano machines capables de fabriquer elles-mêmes des nano machines. Leur nombre pourrait croître de façon exponentielle, et finir par tout dévorer pour se reproduire. La gelée grise est la masse formée par ces nano machines. Un autre auteur, Michel Crichton, dans *La Proie,* utilise le concept de gelée verte. Cette fois-ci, il s'agit de nano robots fabriqués à partir de l'hybridation d'organismes vivants et de matériaux non organiques qui se répliquent de façon non contrôlée.

Les élèves ont rencontré la notion de gelée grise dans l'étude d'un roman en français. Ils l'évoqueront dans le débat de 2011.

Loin de la fiction, un rapport du Sénat (Lorrain & Raoul 2004, disponible en ligne) signale des risques éthiques liés à l'emploi détourné des nanotechnologies, non pour soigner, mais pour augmenter les performances humaines. On trouvera des exemples au chapitre trois de ce rapport, en voici un extrait :

> o Une équipe californienne travaille sur une prothèse électronique destinée à remplacer un hippocampe défaillant chez certains malades amnésiques. Lorsqu'on sait que l'hippocampe est une partie du cerveau indispensable à la mémorisation, on peut imaginer que certains pensent déjà à l'implantation d'une puce donnant accès à une mémoire illimitée. Ces électrodes, qui agissent si bien sur certaines zones du cerveau, peuvent aussi, demain, stimuler d'autres zones, sièges de plaisir. Et laisser croire à de proches paradis bioniques artificiels […]
>
> o Enfin, l'action d'électrodes sur des zones précises du cerveau permettrait de camoufler parfaitement le dopage sportif, puisque la surproduction de molécules endogènes, telles que les endorphines ne serait due qu'à une stimulation cérébrale.

On peut penser aussi à des applications d'ordre militaire, en augmentant différentes aptitudes des soldats. Ici, l'ordre de grandeur nanométrique permet d'agir sur les aspects biologiques du corps humain, plus particulièrement sur le cerveau. Ce point ne sera pas évoqué dans les débats. Néanmoins, il nous semblait important de le mentionner, dans la mesure où cette notion d'homme augmenté commence à faire débat dans la presse.[171]

III. LES SEANCES DE SCIENCES

1. *Le déroulement des séances de sciences*

Les deux premières séances ont été codirigées par les professeures de mathématiques et physique-chimie. La dernière séance, d'une durée double, a été codirigée par les professeures de physique-chimie et technologie.

Dans la première séance, les élèves ont eu à apporter « quelque chose de petit », la consigne est donnée dans ces termes par les professeures. Les élèves vont commencer par mesurer ce qu'ils ont apporté, ce qui permettra d'établir un tableau donnant des objets et les dimensions correspondantes. Ensuite, ils regarderont un dessin animé sur les nanotechnologies. Ce film (Martin Cerclier & Vieu 2009) est destiné à des collégiens et

[171] On trouvera des exemples dans des journaux comme Paris-Match, Les Échos, etc.

lycéens de 10-16 ans, il a été écrit par des chercheurs participant au dispositif. Un retour sera fait ensuite sur les objets mesurés.

Dans la seconde séance, il s’agit de représenter certains des objets apportés par les élèves sur un axe gradué. Après avoir constaté que le choix d’une échelle permettant de tout placer est rendu impossible par l’étendue des différentes mesures, les professeures amènent les élèves à placer les objets dans un tableau appelé « tableau de conversion » - même s’il ne servira pas à cet usage-. Nous reproduisons ci-dessous un tableau du même type.

dam	*m*	*dm*	*cm*	*mm*			*μm*			*nm*

Figure 1*- Tableau dit de conversion*

Cette séance se termine par un exercice sur un énoncé extrait du film : il est demandé aux élèves de calculer la dimension d’un atome de carbone sachant que le rapport de taille entre la Terre et une balle de tennis est le même que le rapport entre la balle de tennis et l’atome de carbone. La dimension concernée est le rayon, ce qui n’est pas précisé dans le film.

Dans la troisième séance, un des chercheurs du LAAS est présent. Les élèves devront d’abord évaluer la longueur d’un élément sur des images issues d’un microscope, les différentes images pouvant être issues de différents types de microscopes. Ainsi dans l’image en figure 2, les élèves ont eu à évaluer la longueur de ce qui est représenté par le trait rouge sur l’image, l’échelle étant en blanc sur celle-ci (en bas de l’image, la qualité de celle-ci ne permet pas une meilleure représentation).

Figure 2*- Une des images manipulées*

Ensuite, les élèves auront à reconnaître ce qui est représenté, en s’appuyant sur l’ordre de grandeur de ce qu’ils ont évalué. Pour finir, le chercheur présente son travail de recherche aux élèves.

Nous avons analysé des praxéologies mises en place dans la classe. Certaines montrent des difficultés d’articulation entre les disciplines visibles au niveau de la technique, c’est celles que nous présentons dans cette partie.

2. *La mesure des objets apportés*

Lors de la première séance de sciences, les élèves ont eu à mesurer les objets de petite taille qu’ils ont apportés. Plusieurs problèmes concrets se sont manifestés.

Premier problème : un élève a apporté un filament de tabac. Est-ce la longueur ou le diamètre qu'il faut considérer ? Cette première difficulté a été résolue directement par les professeures, la consigne est donnée que, lorsqu'il y a plusieurs dimensions possibles pour un objet, on s'intéresse à la plus petite. Il ne sera jamais explicité que la seule grandeur considérée est la longueur.

Second problème : la technique de mesure. Les élèves disposent uniquement de double-décimètres gradués. Cet instrument n'est pas commode pour mesurer avec une précision inférieure au millimètre. De plus, il n'est pas adapté pour la mesure d'objets de forme sphérique comme la perle de cartouche d'encre apportée par un élève. Or il existe un outil de mesure adapté, qui est disponible – en principe – dans les collèges français : il s'agit du pied à coulisse. Celui-ci est mentionné dans le programme de technologie de la classe de 6^{e} (élèves de 11-12 ans, 1^{e} année de collège).

Par ailleurs, les comptes rendus montrent qu'il a pu être utilisé une technique d'estimation « à vue d'œil », comme le montre l'extrait du compte rendu :

> Bon, la taille du grain de sel, alors il l'avait estimé à zéro virgule zéro, zéro, un millimètre, je crois qu'il a vu un peu petit, on va dire zéro virgule un.

Nous voyons apparaître une première difficulté d'articulation entre les disciplines : les professeures de mathématiques et sciences physique et chimique n'ont pas questionné la technique de mesurage et n'ont pas utilisé la richesse apportée par l'enseignement de technologie.

En effet, le type de tâches « mesurer un objet » n'a pas été travaillé comme cela pourrait l'être en cours de technologie. La technique décrite très schématiquement par la liste d'actions suivante « placer l'objet dans un pied à coulisse et lire la mesure sur la graduation du pied à coulisse » est pratiquée dans cette discipline. La technologie (au sens de la TAD) associée à cette technique comporte l'existence du pied à coulisse. Il s'agit ici d'un élément de technologie pratique $\square^{p}$ comme ont pu le présenter Castela et Romo-Vásquez (2011, p. 82) dans leurs travaux sur l'enseignement de la transformée de Laplace en automatique et en mathématiques.

Nous avons pu remarquer aussi que la professeure de physique-chimie n'utilise pas pleinement le contenu du programme de sa discipline : l'incertitude de mesure est en effet au programme de 4^{e} (élèves de 13-14 ans, 3^{e} année de collège), la classe devait donc l'avoir travaillé auparavant. Cette activité de mesurage semble un prétexte pour travailler la suite, et n'a pas de raison d'être visible. L'explication de ce manque de relation avec l'enseignement de la technologie réside peut-être dans le rôle assigné à l'activité de mesurage, qui sert plutôt à introduire ce qui va suivre, et ne semble pas être un enjeu véritable de l'étude menée.

3. Les différentes techniques de calcul de la proportionnalité

Dans les deux dernières séances, la classe a été amenée à faire des calculs liés à des changements d'échelle.

La première fois, la professeure de mathématiques est présente, et va guider l'étude. Lors de la deuxième séance, un problème de calcul de proportionnalité a été donné aux élèves : il s'agit de déterminer la taille d'un atome de carbone, sachant que le rapport de taille entre une balle de tennis et l'atome de carbone est le même qu'entre la taille de la Terre et d'une balle de tennis. La vidéo permet de voir que la trace écrite au tableau n'est pas celle du produit en croix, mais semble s'appuyer sur un calcul de coefficient de proportionnalité.

La seconde fois, la classe retrouve le calcul d'échelle, à partir des images issues de divers microscopes. Les élèves doivent calculer la longueur réelle d'un élément apparaissant sur une image, en le mesurant, et en connaissant l'échelle. Les professeures de sciences physiques et chimiques, et de technologie imposent le produit en croix, ce qui pose problème à certains élèves, comme Laure :

Laure : Pour le produit en croix ça fait en même temps, j'ai un petit peu pareil.

Professeure de physique : J'ai pas compris Laure.

Professeure de technologie : Elle veut économiser l'écriture du produit en croix.

Actuellement, le produit en croix est une technique très répandue hors du champ de l'enseignement des mathématiques. Roditi (2014) dans ses différents travaux sur l'enseignement du calcul de doses médicamenteuses dans la formation aux soins infirmiers a montré le poids de cette technique et les croyances des formateurs à ce sujet. Nous retrouvons ici ce poids du produit en croix.

IV. LA NOTION D'ORDRE DE GRANDEUR

1. *L'ordre de grandeur en mathématiques et en sciences physiques*

Vignes et Bronner (2005) ont mis en évidence les difficultés d'articulation entre physique et mathématiques dans les anciens programmes pour l'enseignement des « mesures et ordres de grandeur » en classe de 2nde (élèves de 15-16 ans).

La notion d'ordre de grandeur était alors présente conjointement dans les deux programmes de physiques et de mathématiques. Apparaissaient alors dans les classes des définitions différentes. En mathématiques, l'ordre de grandeur d'un réel x écrit sous la notation scientifique $x = a \times 10^n$ s'obtenait en arrondissant a à l'entier le plus proche (entier à un seul chiffre). En physique, l'ordre de grandeur de x était défini comme la puissance de 10 la plus proche de x. Ainsi 394 avait pour ordre de grandeur 400 en mathématiques, et 100 en physique.

Actuellement, en physique-chimie, la notion d'ordre de grandeur n'est évoquée que dans le préambule du programme. Elle n'est plus définie, mais les recherches sur internet montrent une relative unanimité sur la définition utilisée par les professeures de sciences physiques et chimiques, correspondant à l'ancien programme de 2nde. Une étude serait à mener sur l'utilisation de l'ordre de grandeur en physique, alors que cette notion n'apparait plus dans le corps du programme.

La notion d'ordre de grandeur apparait dans les programmes de mathématiques actuels au collège, programmes disponibles sur le site du ministère (MEN 2008). Ainsi les ordres de grandeur sont placés dans le domaine « nombres et calculs ». Voici une définition rapportée par une étudiante, réalisant un stage d'observation dans une classe de 6^e (élèves de 11-12 ans, 1^e année de collège) :

> Calculer un ordre de grandeur d'une somme, c'est trouver mentalement un nombre "proche" de cette somme.

Dans ce programme, l'ordre de grandeur apparait aussi dans le bandeau de présentation du domaine « grandeurs et mesures » pour la classe de 6^e (élèves de 11-12 ans, 1^e année de collège) :

> Il est important que les élèves disposent de références concrètes pour certaines grandeurs et soient capables d'estimer une mesure (ordre de grandeur).

On observe ici un autre concept : l'association d'une référence et d'une dimension. Quand on évoque l'ordre de grandeur, c'est souvent de cela qu'il est question. Un extrait du compte rendu de la deuxième séance de sciences montre bien cette association en action :

Professeure de mathématiques : Quel ordre de grandeur pour la cellule ?

Élève : zéro virgule… d'autres élèves interviennent

Élève : Ah bon ? Un millimètre ?

Professeure de mathématiques : Micromètre.

Élève : Ah bon ! Je me disais aussi.

L'élève a bien en tête une association entre une longueur et un objet de référence. Le micromètre convient, ce n'est pas le cas du millimètre. La question de la professeure de mathématiques a pour objectif de vérifier cette association. L'analyse des séances montre que l'un des grands objectifs des séances de sciences a été de créer cette construction d'une association entre des objets, très petits, qui vont servir de référence et l'ordre de grandeur.

2. *Un apport des sciences de la vie pour l'ordre de grandeur : l'échelle de taille*

Les professeurs de sciences de la vie et de la terre (SVT) sont confrontés à la difficulté de faire saisir aux élèves des dimensions hors de l'échelle humaine. Dans l'extrait du compte rendu ci-dessus, nous avons noté qu'un élève a bien en tête l'ordre de grandeur de la cellule. La notion de cellule est au programme des SVT dès le début du collège (classe de 6^{e}, élèves de 11-12 ans, 1^{e} année de collège).

Pour aider à la compréhension des différentes dimensions, il est usuel dans cette discipline d'utiliser un graphique appelé échelle de taille, ou échelle des dimensions. Nous donnons ci-après une échelle des dimensions (figure 3), qui a été utilisée dans un document à propos des nanotechnologies. Cette illustration est extraite d'une page qui fournit du rapport du Sénat que nous avons cité précédemment (Lorrain & Raoul 2004). Cette image est placée dans l'introduction, pour illustrer la taille nano.

Les échelles de dimension sont construites à partir d'un axe gradué. À chaque graduation est associée une puissance de 10 – on obtient donc, en fait, une échelle logarithmique. Sur cet axe, sont positionnées des images représentant des objets de référence. Ainsi, on peut voir sur la figure 3, à gauche, une fourmi, un cheveu, un globule rouge et à droite, un circuit intégré et un nanotube de carbone.

Lors de la troisième séance de sciences, le mur est orné d'une frise, reproduisant le décor du laboratoire dans le dessin animé. Cette frise (figure 4) est du même type que l'échelle des dimensions : il s'agit d'associer une référence, donnée sous forme illustrée à un ordre de grandeur de longueur.

Dans cette troisième séance de sciences, les élèves ont à manipuler des images issues de différents microscopes. Ils auront ensuite à placer ces images sur la frise, en correspondance avec l'ordre de grandeur.

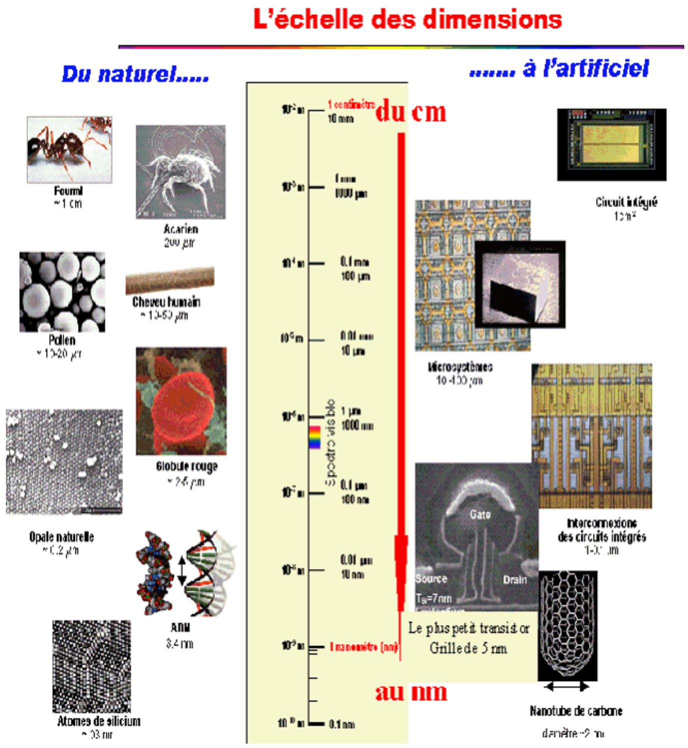


Figure 3- Un exemple d’échelle des dimensions

Figure 4- Frise décorant la salle de classe

Un point est intéressant à noter : on passe de l’insecte au cheveu en divisant par 10, du cheveu (100 µm) à la bactérie (1 µm) en divisant par 100. De la bactérie au virus, on divise à nouveau par 10, et du virus à la molécule, on divise par 100. Les rapports ne sont pas conservés. L’échelle n’est pas vraiment logarithmique. Il semble plus important de faire le lien entre objet et ordre de grandeur que de respecter les rapports des longueurs. On trouve parfois sur des documents de vulgarisation scientifique l’utilisation de rapports de longueurs pour essayer de donner une idée de l’ordre de grandeur de tel ou tel objet présenté. En comparant avec la frise présentée ici, nous pouvons nous demander si cette utilisation de rapports de longueurs est pertinente.

V. CONCLUSION

Le dispositif mis en place a eu, dans ses objectifs, la rencontre avec l'ordre de grandeur nanométrique. Nous avons vu que cet ordre de grandeur est un point essentiel pour comprendre les enjeux des nanotechnologies. Pour que la société puisse débattre sur les nanotechnologies, et prendre démocratiquement des décisions sur leur usage, il est indispensable que le citoyen puisse comprendre ce qui se joue à l'ordre de grandeur nanométrique. Or l'analyse didactique du dispositif montre que la notion d'ordre de grandeur est difficile à appréhender.

Les professeures qui sont intervenues dans les séances analysées ont modifié leur façon d'enseigner les nanotechnologies. Cette nouvelle forme permet-elle de mieux appréhender la notion de nano ? L'aspect théorique reste à approfondir : comment se jouent les liens entre les disciplines ? Quel est l'effet de la présence des chercheurs, comment se joue la transposition didactique dans ce cadre ?

REFERENCES

Brossais E., Panissal N. (2013) Nouvelles formes d'interaction science-société au collège : le cas de l'éducation citoyenne aux nanotechnologies. *Les dossiers des sciences de l'éducation. Les sciences et crises contemporaines*, 29, 81-108

Castela C., Romo Vázquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Martin Cerclier C., Vieu C. (2009) DVD, A precious envelope for budding scientists. Film d'animation, *Heladon*, Toulouse.

Panissal N. (2014) *Apprentissage des savoirs socio-éthiques à travers le débat sur une Question Socialement Vive : l'exemple de l'éducation citoyenne aux nanotechnologies.* Mémoire de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches, tome 1, Université de Toulouse, 270 pages.

Roditi E. (2014) Le calcul de doses médicamenteuses. Pratiques professionnelles et choix de formation en soins infirmiers. *Recherches en didactique des mathématiques* 34(2/3), 103-132.

Vignes M., Bronner A. (2005) *Ruptures et continuités : mesures, nombres et ordres de grandeur en seconde.* Actes du 5e colloque international Recherche(s) et Formation «Former des enseignants-professionnels, savoirs et compétences», Nantes.

SITES CONSULTÉS

CNIL, fiche pratique non datée http://www.cnil.fr/documentation/fiches-pratiques/fiche/article/la-radio-identification/ (site consulté le samedi 29 août 2015)

Journal officiel de la République Française, n° 0043 du 19 février 2012, page 2863, http://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000025377246&categorieLien=id

Lorrain J.-L., Raoul D., (2004) Rapport sur « Nanosciences et progrès médical », site du Sénat http://www.senat.fr/rap/r03-293/r03-2932.html, (page consultée le samedi 31 janvier 2015)

MEN (2008) Programmes des enseignements de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège, disponibles sur http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html.

VeilleNanos : *http://veillenanos.fr/wakka.php?wiki=PagePresentation* (site consulté le vendredi 28 août 2015)

L'ENSEIGNEMENT DU LOGARITHME AU COLLÈGE ET AU LYCÉE AU CONGO-BRAZZAVILLE :

LA RELATION MATHÉMATIQUE – CHIMIE EN QUESTION

Fernand MALONGA MOUNGABIO*

Résumé - Nous présentons ici quelques éléments d'un travail didactique portant sur la relation mathématiques - chimie pour ce qui concerne le logarithme au niveau des classes de troisième (collège) et terminale scientifique (lycée). Ces éléments concernent l'analyse des programmes et manuels scolaires de mathématiques (2009) et de chimie (éditions 2002). Dans les programmes de mathématiques de collège, une place est accordée au logarithme (mode d'introduction et de traitement) sans que le lien avec la chimie soit explicitement évoqué. Cette analyse montre que la continuité didactique que l'on est en droit d'attendre au regard du programme et des intentions dudit programme se heurte à de nombreux obstacles.

Mots-clefs : Mathématiques, chimie, enseignement, interdisciplinarité

Abstract - We hereby introduce some concepts of a didactic study that is focused on the relationship between mathematics and chemistry in the use of logarithm, both in grade nine (last grade in middle school) and in scientific grade twelve (last grade in high school). We are concerned with the analysis of curricula/programs as well as mathematics and chemistry textbooks (respectively 2009 & 2002 editions). In the middle school mathematics curriculum/program, the concept of logarithm is studied without explicit explanations about the link to chemistry. This analysis shows that the didactical continuity, which is supposed to establish connections between the two programs, faces many obstacles.

Keywords: Mathematics, chemistry, teaching, interdisciplinarity

I. CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE

La volonté d'une mise en relation forte des disciplines scientifiques dans les programmes scolaires de collège et de lycée au Congo, en particulier entre mathématiques et sciences physique, a conduit à des choix de thèmes devant concrétiser cette connexion interdisciplinaire. Concernant la relation mathématiques – chimie, il s'agit de l'introduction du logarithme dès le collège en mathématiques, ceci est en relation avec le calcul du pH en chimie, au collège et au lycée.

L'enseignement des mathématiques se trouve donc face à un double défi :

- Celui d'un changement radical par rapport aux anciens programmes qui n'introduisaient le logarithme en tant que « fonction » qu'en classe de terminale scientifique (lycée). Actuellement, le logarithme est introduit comme nombre dès le

* Université Marien Ngouabi – Congo (Brazzaville)

Malonga Moungabio F. (2015) L'enseignement du logarithme au Collège et au Lycée au Congo-Brazzaville : la relation mathématique –chimie en question. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 490-503.

collège (classe de 4^{e}-$8^{ième}$ année de scolarité). Son traitement comme « fonction » se fait plus tard au lycée.
- Celui du lien avec l'enseignement de la chimie qui utilise le calcul du pH pour définir si un milieu est acide ou basique. Pourtant, l'enseignement de la chimie dans tout le cycle secondaire n'a pas explicitement à son programme l'application de ces objets mathématiques à l'étude de questions extra-mathématiques. Au collège, le lien avec le logarithme n'est pas immédiatement fait. C'est dans le programme de seconde que le pH est défini à l'aide du logarithme décimal. Il incombe au mathématicien de faire le lien avec la chimie.

Cependant la concrétisation d'un tel projet, tant dans l'élaboration des manuels scolaires que dans les pratiques des enseignants, ne peut se faire sans difficultés et conduit à se poser un certain nombre de questions.

Sur l'articulation entre les disciplines :

- Quelle est la place de l'enseignement des mathématiques dans le cours de chimie, et inversement ?
- Comment la relation mathématiques – chimie est-elle mise en œuvre dans les manuels de chacune des deux disciplines ?

Sur la cohérence interne aux mathématiques :

- Existe-t-il un passage du statut *nombre* au statut *fonction* ? Si oui, comment ce passage est-il pris en charge par les programmes et les manuels ? Les connaissances du Collège réapparaissent-elles au Lycée ?
- Les auteurs des programmes et des manuels de Collège peuvent-ils aisément éviter d'utiliser la notion de fonction ?

Nous nous intéressons ici à la manière dont cette approche interdisciplinaire apparaît (ou non) dans les manuels scolaires de mathématiques et de chimie, considérés comme premiers éléments du curriculum réel, au sens de Perrenoud (1993).

Nous présentons dans la partie suivante notre cadre théorique, constitué essentiellement de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999). Nous présentons ensuite, à partir de quelques exemples, une analyse des manuels montrant la place, mais aussi les limites, de la continuité didactique entre les mathématiques et la chimie.

II. PRAXEOLOGIE OU ORGANISATION MATHEMATIQUE

Dans sa théorie anthropologique du didactique, Chevallard (1999) considère que l'analyse de l'activité humaine conduit à dégager des entités minimales, les praxéologies, qu'il désigne par l'organisation (ou la formule) $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où T représente un type de tâches, τ une technique (manière d'accomplir les tâches du type T), θ une technologie (discours qui justifie et rend intelligible la technique τ) et Θ une théorie, technologie de la technologie θ.

Le bloc $[T/\tau]$ y représente la *praxis* (ce qu'il y a à faire et comment le faire), ou la pratique (si l'on regarde plutôt du côté de T), ou le savoir-faire (si l'on regarde plutôt du côté de τ), tandis que $[\theta/\Theta]$ y figure le *logos* (comment penser le faire et comment penser cette pensée du faire), qu'on nomme encore le savoir (si l'on regarde plutôt du côté de θ) ou la théorie (si l'on regarde plutôt du côté de Θ).

En nous appuyant sur ce cadre théorique (praxéologie), nous précisons notre questionnement :

- Quelle articulation entre le champ de référence (chimie) et le champ de traitement (mathématique) ? Quelle place pour les tâches de transition ?
- Le logarithme est-il simplement un objet des mathématiques et un outil pour la chimie, ou bien la praxéologie se joue-t-elle de façon subtile entre les deux disciplines ?
- Y a-t-il continuité didactique dans les concepts, méthodes et représentations entre les mathématiques et la chimie ?

Avant l'analyse des manuels, nous présentons très succinctement quelques éléments de la relation entre les mathématiques et la chimie dans le savoir savant.

III. LES MATHEMATIQUES ET LA CHIMIE DANS LE SAVOIR SAVANT

L'histoire des mathématiques est caractérisée par des phases d'expansion et des phases de consolidation. Dans les phases d'expansion, les mathématiques élargissent le périmètre de leur science en s'attaquant à des problèmes et en élaborant des concepts d'un type nouveau. Cette expansion est souvent irriguée par une problématique issue des relations avec les autres disciplines scientifiques.

L'histoire montre en effet comment les champs scientifiques que sont aujourd'hui les mathématiques et les sciences physiques et chimiques ont fait évoluer la science en se prêtant à un jeu d'échanges dialectiques. Les mathématiques sont considérées comme un *pourvoyeur d'outils* (ou bien *outil*) nécessaires à la compréhension et donc, au développement des autres sciences.

On peut citer le cas, en chimie, de la modélisation moléculaire qui désigne l'ensemble des méthodes de simulation numérique des propriétés de la matière, fondées sur une description atomistique de cette dernière. Dans cette acception, on englobe aussi bien les calculs quantiques *ab initio*, que les représentations simplifiées de la mécanique moléculaire, en passant par la physique statistique numérique.

La cristallographie est un autre domaine de la chimie qui s'appuie fortement sur les mathématiques. En effet, selon Defranceschi, Gracias, Toulhoat et Vidal (2005),

> ce domaine [la cristallographie] est une illustration naturelle et concrète de la théorie des groupes de permutation. L'existence des phases incommensurables et des quasi-cristaux a fait resurgir quelques aspects fondamentaux, parmi lesquels les notions d'invariance et de symétrie (géométrique), dans des perspectives très proches de l'esprit galoisien d'origine. (Op. cité, p. 69)

L'ordre géométrique le plus simple est celui des cristaux périodiques tridimensionnels où un même motif atomique est répété à l'identique dans trois directions. Les outils mathématiques de l'ordre cristallin sont ainsi un groupe abélien de translations qu'on compose avec des rotations et inversion qui constituent la symétrie d'orientation du cristal. Selon Defranceschi et al. (2005), les avancées les plus récentes dans le domaine de la cristallographie concernent :

> - l'extension aux groupes spatiaux à quatre dimensions utilisées pour décrire les structures magnétiques ;
>
> - l'introduction, dans cette communauté, des termes d'orbite, petit groupe, centralisateur, normalisateur, etc., provenant de la théorie d'action de groupe. (Op. cité, p. 81)

En définitive, comme les exemples précédents en ont donné une première idée, les mathématiques sont présentes dans la chimie et cela n'a cessé de se renforcer. Les théories en sciences chimiques s'imprègnent de plus en plus des connaissances mathématiques. Ceci montre bien que les relations entre les deux disciplines occupent une place privilégiée dans le savoir savant. Qu'en est-il dans le savoir enseigné ?

IV. LE LOGARITHME DANS LES PROGRAMMES ET MANUELS DE MATHEMATIQUES

Depuis plusieurs années, la littérature sur les relations entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire et universitaire se multiplie. Diverses réflexions sont menées aussi bien en mathématiques qu'en physique ; elles sont de nature épistémologique et/ou didactique (Malonga Moungabio, Beaufils & Parzysz 2008, Malonga Moungabio 2009, Malonga Moungabio & Beaufils 2010, Bâ 2007, Rodriguez 2007, Mizony 2006, Rogalski 2006, Malafosse, Lerouge & Dusseau 2001, ...)

Cependant, si les relations entre les mathématiques et la chimie occupent une place privilégiée dans le savoir savant (voir plus haut), il existe très peu d'études sur la relation entre l'enseignement des mathématiques et celui de la chimie.

Dans ce qui suit, nous présentons une analyse praxéologique de la relation entre ces deux disciplines autour de l'enseignement de la notion de logarithme décimal au Congo (Brazzaville).

1. *Les programmes de collège*

Les nouveaux programmes, publiés en 2002 sous l'égide de l'Institut National de Recherche et d'Action Pédagogiques (INRAP), sont structurés en termes d'objectifs généraux « OG » (comportement final de l'élève attendu dans un domaine d'apprentissage) et d'objectifs spécifiques « OS » (niveau de réalisation d'un objectif général). Ces objectifs peuvent être assimilés à la notion de « type de tâches » au sens de Chevallard.

L'objectif général n°1, donné par la tâche « Connaître les nombres », présente les modalités de l'étude du logarithme.

La première rencontre de la notion de logarithme en base dix (couramment logarithme décimal) a lieu dans les programmes de la classe de 4^{e} au Collège (14 ans) : il est étudié comme étant un nouveau nombre à identifier.

> Il s'agit pour l'élève de reconnaître que (…) les logarithmes sont des nombres définis à partir des puissances : on a $a > 0$, $a = 10^n$, alors $\log(a) = n$. (Guide pédagogique[172], p. 36)

La principale tâche de l'élève est de reconnaître que n est le logarithme en base 10 du nombre a.

Cette étude se poursuit en classe de 3^{e} (15 ans) avec pour objectif général, d'effectuer des calculs sur le logarithme en base dix. Le guide pédagogique précise :

> Outre les nombres identifiés en classe antérieure, il est question ici d'insister sur le logarithme en base dix, leur caractéristique et mantisse puis d'aborder les nombres irrationnels. (Guide pédagogique, p. 46)

Ce commentaire laisse entendre que les logarithmes ne sont pas reconnus comme des irrationnels : les seuls irrationnels considérés à ce niveau sont les nombres qui s'écrivent avec le symbole $\sqrt{}$.

Les types de tâches attendus ici se rapportent à une identification du logarithme et à la détermination de la caractéristique et de la mantisse. La technique n'est pas explicitée. On peut supposer qu'elle se rapporte à la manipulation des puissances de 10 : elle est donc censée être disponible et accessible à l'élève.
Les programmes de collège ne mentionnent aucun lien avec la chimie.

[172] Le guide pédagogique est un document (officiel) d'accompagnement des programmes.

2. Les programmes de lycée

La notion de logarithme n'est pas traitée en classe de seconde et première. Elle apparaît dans les programmes de terminale dans la rubrique « Objectif général 3 : Réaliser des activités sur les fonctions et les suites numériques ». Dans ce programme, la fonction logarithme, ainsi que les fonctions exponentielle et puissance, sont traitées comme des fonctions parmi d'autres. Le programme n'indique pas le caractère particulier de ces fonctions.

La fonction logarithme fait l'objet d'une étude globale et locale à l'instar des fonctions numériques étudiées auparavant.

Aucun lien avec l'enseignement de la chimie n'est mentionné dans ce programme.

3. Les manuels de mathématiques du Collège

Pour chaque niveau du Collège, un seul manuel de référence, édité chez Nathan, est indiqué dans les programmes. Cependant le manuel de 4e ne couvre pas tout le programme : le logarithme n'y apparaît pas, il est traité dans le manuel de 3e.

Le logarithme est introduit par une activité de lecture et d'utilisation d'un tableau de 20 valeurs de x et de 10^x sans préciser que les valeurs de 10^x sont des valeurs approchées. Dans la suite, un résumé précise que :

… Pour x strictement positif, $y = \log x$ équivaut donc à écrire $x = 10^y$. (Manuel Nathan 3e, p. 83)

On remarque le changement de position de x et de y dans cette proposition au regard de l'activité mentionnée (qui présentent des valeurs de x et de 10^x). Nous supposons que ce changement de position est à mettre en relation avec la notion de fonction déjà abordée dans les pages précédentes du manuel.

Organisation praxéologique

L'essentiel du travail de l'élève dans ce chapitre est de nature purement calculatoire. Nous avons identifié trois types de tâches que nous appelons (*T*1), (*T*2) et (*T*3).

Type de tâches	*Technique associée*
(*T*1) : calculer le logarithme d'un produit	$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
(T2) : calculer le logarithme d'un quotient	$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$, où a et b sont réels strictement positifs
(*T*3) : calculer le logarithme d'une puissance	$\log(a^n)=n\log(a)$, a est un réel strictement positif

Tableau 1 *- Types de tâches identifiés dans le manuel Nathan 3e*

Pour chaque type de tâches, une technique donnée sous forme de propriété, est proposée par l'auteur du manuel et accessible à l'élève (voir tableau 1). Pour chaque technique, aucune technologie n'est présentée.

De plus, nous avons identifié deux autres types de tâches associés au calcul du logarithme. Il s'agit des types de tâches

(*T*4) : Calculer la caractéristique du logarithme d'un nombre.

(*T*5) : Calculer la mantisse du logarithme d'un nombre.

Les techniques sont disponibles.

Pour la tâche (T4), les auteurs du manuel expliquent que si x est un réel strictement positif, on appelle *caractéristique* du logarithme décimal de x la partie entière de ce logarithme. Elle se détermine en examinant l'écriture décimale de x :

> Si $x \geq 1$, alors la caractéristique de $\log(x)$ est n-1, où n est le nombre de chiffres avant la virgule de x.
>
> Si $0 < x < 1$, elle vaut $-p$, où p est le rang (position) de la première décimale non nul - à partir de la virgule - du premier chiffre non nul.

Par exemple, la caractéristique de log(898,12) est 2, celle de log(3,14) est 0, celle de log(0,0071) est -3.

Pour la tâche (T5), les auteurs expliquent que la *mantisse* du logarithme décimal de x désigne la différence entre le logarithme de ce nombre x et la partie entière de ce logarithme, c'est-à-dire sa partie fractionnaire. La mantisse est le réel $\log(x)$ - c, où c est la caractéristique de $\log(x)$. La mantisse est toujours comprise entre 0 et 1 (et différente de 1).

L'activité sur le calcul de la mantisse et de la caractéristique du logarithme décimal d'un nombre peut être considérée comme un réinvestissement des connaissances sur les puissances et l'écriture scientifique d'un nombre. En effet, l'écriture scientifique d'un nombre x est donnée sous la forme de $x = a \times 10^n$ où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (exclu) et n un entier relatif. Puisque $\log(a \times 10^n) = n + \log(a)$ et que la fonction log est croissante, pour tout réel a compris entre 1 et 10 (exclu), $\log(a)$ est compris entre 0 et 1. L'entier relatif n est donc la partie entière de $\log(x)$ et $\log(a)$ la partie décimale à ajouter à n pour obtenir $\log(x)$. La partie entière de $\log(x)$ est bien la *caractéristique* du log. La partie décimale à rajouter à la partie entière est la *mantisse*.

4. Les manuels de mathématiques du lycée

Les programmes de terminale scientifique (C & D) se réfèrent à quatre manuels. Il s'agit du manuel de la Collection InterAfricain de Mathématiques (CIAM) édité chez EDICEF et de trois autres manuels français : Collection TERRACHER (édité chez HACHETTE), Collection DIMATHEME (édité chez DIDIER), Collection FRACTALE (édité chez BORDAS).

Au lycée le logarithme, qui n'apparaît ni dans les programmes de 2^{e}, ni dans ceux de 1ère, est étudié en classe de terminale scientifique (séries C & D). Pour l'introduction du logarithme, la collection CIAM présente un contenu proche de celui des programmes de terminale congolais. Il étudie le logarithme avant l'exponentielle, contrairement aux trois manuels français cités plus haut. Conformément aux programmes, le logarithme est introduit comme fonction et l'étude commence par le logarithme népérien. Le logarithme de base quelconque est introduit plus tard. On retrouve les trois premières propriétés (techniques) que nous avons identifiées dans le manuel de collège (voir tableau 1).

L'introduction de la fonction logarithme se fait sans nécessairement faire le lien avec les acquis du collège. Le passage du concept de *nombre* au concept de *fonction* et le changement de notation peuvent ainsi donner lieu, chez l'élève, à la conception de deux objets mathématiques différents.

De plus, aucun lien avec l'enseignement de la chimie n'est mentionné.

V. LE LOGARITHME DANS LES PROGRAMMES ET MANUELS DE CHIMIE

1. Les programmes de collège : classe de troisième

Au collège, dans le programme de chimie de la classe de troisième, le pH est étudié dans la partie qui traite l'objectif général 3, à savoir « Caractériser les solutions aqueuses » :

Figure 1 *- Extrait du guide pédagogique des sciences physiques (2010), classe 3^e^, Objectif 3 p. 75*

Il est précisé que l'évaluation portera avant tout sur la détermination pratique du pH et du titre des solutions acides et basiques, l'idée d'évaluation écrite renvoyant à une modalité fréquente dans les disciplines expérimentales : on pourra donner une description du résultat d'une expérience (couleur du papier pH par exemple) et demander d'écrire la valeur du pH.

Nous remarquons que le pH étant mesuré, le logarithme n'a pas à intervenir. Pourtant cet outil mathématique a déjà été abordé en mathématiques au collège dès la classe de 4^{e}.

2. Les programmes de lycée

Classe de seconde

Dans le programme de seconde, le pH est traité dans l'objectif général 3, sous l'intitulé « Caractériser les acides, les bases et les sels ainsi que leurs solutions (17 heures) ».

Objectifs spécifiques	*Contenus notionnels*
3.3. Déterminer le pH d'une solution.	pH = - log [H_3 O^+] mesure de pH Papier pH, pH-mètre pH d'une solution acide pH d'une solution basique

Tableau 2 *- Extrait du programme de seconde (2002), p. 72*

On note un changement de point de vue par rapport à la troisième puisque le pH reçoit une définition formelle, faisant cette fois intervenir le logarithme. La détermination du pH d'une solution aqueuse se fait soit en utilisant le papier pH ou le pH-mètre, soit en appliquant la formule pH = - log $[H_3O^+]$[173]. Aucune indication particulière n'est donnée quant à l'utilisation de cette formule ou du lien avec le cours de mathématiques.

On peut remarquer que le programme de seconde est moins explicite que celui de troisième présenté plus haut. Aucun document officiel, servant de guide pédagogique, n'accompagne ce programme.

Classe de première

La notion de pH n'est pas abordée en première.

Classe de terminale C

Le programme de classes de terminale scientifique a été conçu à l'instar des programmes des niveaux inférieurs : il a été écrit par objectifs et est censé tenir compte de la progression de l'ensemble des autres disciplines scientifiques.

Dans ce programme, le lien avec l'enseignement des mathématiques n'est pas immédiat. Cependant, ce programme se propose de :

> Créer progressivement chez l'élève une attitude scientifique, ce qui lui permettra de développer des aptitudes à :
>
> - la démarche scientifique,
> - la transmission de cette démarche scientifique,
> - la maîtrise des moyens et langues de communication,
> - la maîtrise du langage mathématique (interpréter des graphiques, savoir schématiser)
>
> (Extrait du Programme de sciences physiques 2002, p. 75)

Comme on le voit, la relation de l'enseignement de la chimie avec les mathématiques est à peine évoquée. Il nous apparaît important d'examiner la manière dont le langage mathématique apparaît dans les manuels de chimie qui se réfèrent au programme scolaire.

L'objectif général 3 consiste à « Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases (12 heures) » (voir tableau 3).

Il est attendu que les enseignants conduisent les élèves à dégager l'influence des propriétés électriques de l'eau sur la solubilité des composés ioniques et à décrire l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau. Dans les contenus notionnels, le programme prévoit de définir le pH, sans en proposer une définition.

Relativement à notre étude, nous avons identifié un type de tâches, relatif à l'objectif spécifique (3.4) : « Déterminer le pH des solutions aqueuses ».

Pour ce qui concerne les acides et bases faibles, le programme préconise le calcul de Ka et du pKa. A la suite, il propose une méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide ou une base faible en respectant les étapes suivantes : description des différentes étapes – détermination du coefficient de dissociation – établir la relation entre pH et pKa à savoir :

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pKa} + \log \frac{[Base]}{[Acide]}$$

Le programme ne donne aucune indication sur la manière d'obtenir cette formule.

173 La notation entre crochets représente la concentration, exprimée en moles par litre, ici de l'ion hydronium..

Objectifs spécifiques	*Contenus notionnels*
3.3 Établir l'échelle de pH	Établissement de l'échelle de pH - Définition du pH - pH de l'eau pure - échelle de pH - pH des solutions acides - pH des solutions basiques - Définition du pOH - Relation entre le pH et pOH
3.4 Déterminer le pH de solutions aqueuses.	Détermination du pH des solutions - Cas des acides et des bases faibles ● Ka et pKa des acides faibles, Kb et pKb des bases faibles. ● Méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide faible ou une base faible. * description des différentes étapes * coefficient de dissociation * relation entre pH et pKa ; pH et pKb pH = pKa + log [Base] / [Acide]

Tableau 3 - *Extrait du programme de chimie, classe de terminale C (2002), p. 54*

3. Les manuels de chimie : classe de Terminale

Conformément aux programmes de collège et de lycée de chimie, le lien entre le pH et le logarithme n'apparait que dans les manuels de terminale. Nous analysons le principal manuel conforme au programme de terminale C. Il s'agit du manuel édité à l'INRAP en 2009.

Dans ce manuel (INRAP, 2009), les chapitres sont organisés (comme les programmes scolaires) en objectifs généraux et spécifiques. La notion de pH est étudiée dans l'objectif général n°6 « Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases ». Une définition du pH y est proposée :

> IV – Établissement de l'échelle de pH « pouvoir hydrogène »
>
> 1 – Définition du pH
>
> Le pH d'une solution est une grandeur sans unité, égale à l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions hydronium.
>
> Soit pH = - log $[H_3O+]$ d'où $[H_3O+] = 10^{-pH}$
>
> (Extrait du manuel INRAP 2009, p. 69)

Ka, la constante d'acidité et le pKa sont définis dans le cas des acides et des bases faibles. A partir de l'équation-bilan de la réaction de l'acide AH avec l'eau (figure 2), où AH est un acide et A^- sa base conjuguée, on a à l'état d'équilibre du système : $Ka = \frac{[A^-]\times[H_3\,O^+]}{[AH]}$.

Figure 2 *- Équation bilan*

La définition du pKa est établie par analogie, il en résulte une relation entre pH et pKa :

Par analogie à la définition du pH, nous définissons également le pKa tel que

pKa = -logKa et $Ka = 10^{-pKa}$

Comme $Ka = \frac{[A^-]\times[H_3O^+]}{[AH]}$.

Soit $\log Ka = \log[H_3O^+] + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

D'où $-\log Ka = -\log[H_3O^+] - \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

alors $pKa = pH - \log\frac{[A^-]}{[AH]}$ ou $pH = pKa + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

(Extrait de manuel INRAP 2009, p. 76)

Par analogie, on définit la constante de basicité du couple Acide/base par la relation : $Kb = \frac{[Acide]\times[OH^-]}{[Base]}$.

Ensuite, on établit la relation entre le pKb et le pOH : $pOH = pKb + \log\frac{[Base]}{[Acide]}$.
La relation entre le pH et le pKa (ou entre le pKb et le pOH) est obtenue à partir de la formule de Ka et de l'une des propriétés algébriques du logarithme étudiée en mathématiques, à savoir : $\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$.

Malgré l'emploi des propriétés du logarithme, aucune référence aux programmes des mathématiques n'est faite dans ce manuel pour justifier les calculs.

4. *Rôle des graphiques dans les relations acido-basiques*

L'étude du dosage acido-basique s'appuie sur une représentation graphique des données expérimentales.

Examinons le cas du dosage de l'acide éthanoïque (acide faible) par l'hydroxyde de sodium (base forte), l'allure de la courbe du pH en fonction du volume de la base est la suivante (voir figure 3).

La courbe présente quatre parties :

- la partie AB où le pH augmente rapidement,
- la partie BC où le pH augmente faiblement,
- la partie CD avec un « saut de pH »,
- la partie DF où le pH croît peu et tend vers une valeur limite.

Cette courbe est obtenue à partir des données expérimentales, on remarquera que le tracé est réalisé en lissant la courbe, il faut aussi supposer que le tracé des tangentes est réalisée de manière graphique (la tangente vue comme droite localement confondue avec la courbe). Elle est vue *a priori*, non pas comme la représentation d'une fonction mathématique, mais comme la représentation d'un phénomène chimique : ici, l'évolution du pH en fonction du volume de la base.

Les manuels en vigueur dans les classes de terminale ne proposent pas la recherche d'une telle fonction. Une activité développée autour de cette recherche devrait permettre non seulement de montrer la force des mathématiques pour modéliser certains phénomènes mais de mieux comprendre les différents moments du dosage acide/base en obligeant les élèves à s'interroger sur ce qui du point de vue du chimiste différencie les différents moments du dosage acide/base.

Figure 3 *- Extrait du manuel INRAP (2009) p. 86*

Au cours de nos différents échanges avec les enseignants de chimie au lycée, nous avons constaté que l'expression d'une telle fonction n'est pas connue des enseignants. Cela leur apparaît peu intéressant car ils arrivent à expliquer le phénomène à partir de la théorie chimique, comme le précise un enseignant :

> la courbe (voir figure 3) permet de conclure que l'acide est consommé au fur et à mesure qu'on rajoute la base. La solution devient basique à partir du point d'équivalence.

Or il suffit d'observer la courbe pour constater que cette affirmation est fausse puisque dès qu'il y a autant d'ions hydroxyde que d'ions hydronium en solution, à 25°C, alors le pH est égal à 7. Le professeur semble distinguer trois phases : une première phase où l'acide n'est pas entièrement consommé, ce qui correspond à la portion AE de la courbe ; une deuxième phase où il y a autant d'ions HO^- que d'ions H_3O^+, c'est le point d'équivalence qui correspond sur la courbe au point E ; une troisième phase où l'acide est entièrement consommé, ce qui correspond à la portion ED de la courbe. Or ce modèle est erroné dans le cas cité car il faut tenir compte du fait qu'interviennent une base faible associée à l'acide faible et une base forte versée.

Nous nous sommes alors intéressés à la nature de la fonction mathématique permettant de modéliser ce phénomène chimique.

5. Modélisation mathématique de l'évolution du pH

Nous nous appuyons sur un exemple[174] pour illustrer notre propos. On considère le dosage de l'acide chlorhydrique de concentration C_0 égale à 0,1 mol.L^{-1}, dans un volume V_0 égal à 100 mL, par l'hydroxyde de sodium (soude) de concentration C_b égale à 0,5 mol.L^{-1}.

L'équation du dosage est :

Figure 4 *– Équation du dosage*

Première phase : avant l'équivalence

Le nombre de moles d'ions hydronium (n H_3O^+) contenu initialement dans la solution est égal à $C_0.V_0$ si le volume est exprimé en Litres ; si le volume est exprimé en mL, ce que nous ferons dans la suite, alors c'est un nombre de millimoles que donne cette formule. Numériquement cela fait n H_3O^+ = 0,1×100 soit 10 mmol. Si l'on ajoute un volume V de soude dans la solution d'acide chlorhydrique, le nombre de mmoles d'ions hydroxyde apporté est égal à $C_b.V$. Étant donnée la réaction entre les ions hydronium et les ions hydroxyde pour donner de l'eau, V étant inférieur à Ve (le volume équivalent), on aura un nombre de mmoles d'ions hydronium restant en solution qui sera égal à : $C_0.V_0 - C_bV$. Le volume de la solution étant devenu égal à $V_0 + V$, la concentration des ions hydronium restant en solution sera égale à :

$[H_3O^+] = \frac{C_0.V_0 - C_b.V}{V_0+V}$ d'où l'expression $\mathrm{pH} = -\log(\frac{10-0{,}5.V}{100+V})$

V étant la variable, que nous désignons par *x* exprimé en mL, nous avons donc la fonction :

$f_1(x) = -\log(\frac{10-0{,}5.x}{100+x})$ définie sur [0 ; 20[.

Deuxième phase : l'équivalence

On se ramène alors au calcul du pH d'une solution de chlorure de sodium puisque l'acide fort est exactement neutralisé par une base forte. Dans ce cas, le pH à l'équivalence vaut 7 à 25°C. Il faut avoir versé 20mL de base forte, ce que l'on peut écrire mathématiquement par $f_2(x) = 7$ pour x = 20. On peut aussi écrire $f_2(20) = 7$.

Troisième phase : après l'équivalence

On aura versé depuis le départ un volume supérieur à 20 mL pour accéder à cette portion de courbe. Si l'on appelle V ce volume total de soude versée, en mL, le nombre total de mmoles d'ions hydroxyde apportés est égal à $C_b.V$. Comme l'ion hydroxyde réagit avec l'ion hydronium, la quantité de mmoles d'ions hydroxyde en excès sera égale à : $C_b.V - C_0.V_0$.

La concentration des ions hydroxyde lorsqu'on aura versé un volume V de soude dans la solution d'acide chlorhydrique sera alors égale à :

$[HO^-] = \frac{C_b.V - C_0.V_0}{V_0+V}$

Le pH de la solution sera donné en écrivant : $\mathrm{pH} = 14 + \log([HO^-])$

Dans l'exemple qui est choisi, il faudra écrire que : $\mathrm{pH} = 14 + \log(\frac{0{,}5.V-10}{100+V})$

D'où la fonction : $f_3(x) = 14 + \log(\frac{0{,}5x-10}{100+x})$ définie sur]20 ; +∞[.

On obtient finalement une fonction de raccordement (définie par intervalles).

[174] Ce passage est inspiré du cours mis en ligne par F. Marsal http://marsal.univ-tln.fr/

L’obtention des différentes expressions algébriques de la fonction qui permet de modéliser le phénomène de dosage acido-basique peut conduire à confronter l’expérimentation et certains résultats théoriques. Il serait aussi intéressant de traiter mathématiquement le calcul des coordonnées du point d’équivalence.

Ce travail de recherche d’une expression mathématique permettant de traduire mathématiquement un phénomène chimique est nécessaire et peut être comparé à ce qui se fait en physique lorsqu’on étudie les phénomènes physiques dépendants du temps.

VI. CONCLUSION

Notre étude sur l’enseignement du logarithme en mathématiques a permis de constater deux « statuts » pour le même objet : *nombre* et *fonction*. Nous regrettons le fait que cet enseignement, lacunaire, laisse un vide didactique au niveau du passage du concept de nombre (collège) au concept de *fonction* (au lycée).

Du point de vue de l’articulation mathématiques-chimie, il est clair que l'enseignement du logarithme au Collège est légitimé par l'étude en chimie du phénomène du dosage acido-basique d'une solution aqueuse. Cependant les programmes de chimie ne font pas mention de la nécessité de cet enseignement. Si en classe de 3^e, le pH permet d'évaluer la concentration des ions hydronium présents dans une solution aqueuse, aucune définition ne permet d’en réaliser un calcul impliquant le logarithme et la concentration des ions H_3O^+.

Prenant appui sur l’introduction en seconde d’une définition formelle du pH par le programme de chimie, nous cherchons actuellement à mieux explorer la relation entre les mathématiques et la chimie au lycée et à mettre en place des tâches de transition entre les deux disciplines. Notre souhait est de faire vivre dès le lycée, les interfaces entre les mathématiques et les autres sciences pour assurer une meilleure visibilité des mathématiques et en montrer l’intérêt pour la compréhension des avancées scientifiques et technologiques.

REFERENCES

Bâ C. (2007) *Étude épistémologique et didactique de l’utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique.* Thèse de doctorat (cotutelle). Université Lyon 1 et Université Cheikh Anta Diop – Dakar.

Chevallard Y. (1999) L’analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-265.

Defranceschi M., Gratias D., Toulhoat H., Vidal C. (2005) Mathématiques et sciences chimiques. In Yocooz C. (Ed.) *Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain* (pp. 67-101), *Académie des sciences. Rapport sur la science et la technologie n°20*. Paris : Éditions TEC & DOC.

Malafosse D., Lerouge A., Dusseau J.-M. (2000) Étude en interdisciplinarité des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège: changement de cadre de rationalité. *Didaskalia* 16, 49-60.

Malonga Moungabio F. (2009) Les équations différentielles à l'interface mathématiques - physique : praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminale S. *Recherche en didactique des mathématiques* 29(3), 335-357.

Malonga Moungabio F., Beaufils D. (2010) Modélisation et registres sémiotiques : exemple d'étude de manuels de physique de terminale. *Revue de didactique des sciences et de technologie*, 1(1), 293-316.

Malonga Moungabio F., Beaufils D., Parzysz B. (2008) La méthode d'Euler dans l'enseignement de mathématiques et de physique en terminale S. *Bulletin de l'Union des Physiciens* 907, 1133-1152.

Mizony M. (2006) Relations entre mathématiques et physique, un problème épistémologique. L'héritage de Poincaré : de l'éther à la modélisation. *Repères Irem* 64, 91-111.

Perrenoud P. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (dir.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui* (pp.61-76). Paris : ESF.

Rodriguez R. (2007) *Les équations différentielles comme outils de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématique au lycée : une étude des manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier – Grenoble 1.

Rogalski M. (2006) Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs – Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères IREM* 64, 27-48.

ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE DANS UNE ACADÉMIE DES MINES EN 1795

ENJEUX DIDACTIQUES ET PRATIQUES SOCIALES

Thomas MOREL*

Résumé – Dans cet exposé, plusieurs aspects précis de l'enseignement des mathématiques dans les académies des mines de Freiberg et Schemnitz à la fin du XVIIIe siècle sont étudiés. Nous affirmons que dans ces académies nouvellement créées, un nouveau système d'enseignement des mathématiques se met en place, en rupture avec l'enseignement universitaire classique de l'époque. Il s'en distingue non seulement par ses objectifs et ses méthodes, mais aussi par l'interaction avec les autres disciplines et avec le monde professionnel des régions minières. Pour cela, nous entendons avoir recours à la fois à l'histoire – en se basant sur les archives de ces institutions – et à la didactique des mathématiques.

Mots-clefs : didactique des mathématiques, géométrie, histoire des mathématiques, académie des mines.

Abstract – In that report, several aspects of mathematics teaching at the mining academies of Freiberg and Schemnitz are analyzed. Our hypothesis is that a new system of mathematics teaching, different from the classical teaching in universities, is implemented in these new institutions. The differences are not only related to goals and methods, they also lie in the interactions with other disciplines and the professional environment of the mining states. We use methods both from history (based on the archive of these institutions) and the didactic of mathematics.

Keywords: didactic of mathematics, geometry, history of mathematics, mining academies.

I. INTRODUCTION

Cet exposé porte sur les enseignements de mathématiques dans les écoles des mines et leur évolution dans les décennies qui suivent leur création. Nous avons cherché, dans de précédents travaux, à esquisser les grandes lignes de leur développement dans la seconde moitié du XVIII[e] siècle (Morel 2013, pp. 141-252 ; Morel 2015a). La perspective adoptée était alors clairement celle d'une histoire institutionnelle des sciences et d'une histoire de l'enseignement. Les premières académies, celles de Freiberg (en Saxe) et Schemnitz (en Basse-Hongrie), furent créées dans les années 1760. Si leur importance pour le développement des sciences de l'ingénieur et pour l'essor économique européen n'est plus à démontrer (pour un ouvrage récent réunissant plusieurs contributions sur ce sujet, voir (Konečný & Schleiff 2013)), la forme et le contenu des enseignements des mathématiques sont aujourd'hui encore mal connus. Une difficulté importante est qu'il s'agit d'un

* Université d'Artois (Laboratoire de Mathématiques de Lens) – France – thomas_morel@msn.com

Morel T. (2015) Enseigner la géométrie dans une académie des mines en 1795. Enjeux didactiques et pratiques sociales. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 504-516.

enseignement fortement tourné vers la pratique et profondément adapté à des problématiques locales. Dans la littérature secondaire, il s'efface généralement au profit des sciences minières, qui semblent être l'objet central de ces institutions (Konečný et al. 2013). Or la place des mathématiques dans ces institutions techniques fut tout à fait cruciale[175].

Nous entendons ici défendre la thèse suivante : dans ces académies nouvellement créées, un nouveau modèle d'enseignement des mathématiques se met en place, en rupture avec l'enseignement universitaire classique de l'époque. Il s'en distingue non seulement par ses objectifs et ses méthodes, mais aussi par l'interaction avec les autres disciplines et avec le monde professionnel des régions minières. Pour cela, nous entendons avoir recours à la fois à l'histoire et à la didactique des mathématiques. En croisant les méthodes, nous pourrons tenter de cerner en quoi exactement un nouvel enseignement des mathématiques pratiques se met en place dans le dernier quart du XVIII^e^ siècle à la *Bergakademie* Freiberg – et dans une moindre mesure à la *Bergakademie* Schemnitz. Il s'agit donc d'un travail expérimental, « hybride » en quelque sorte, dans lequel la didactique des mathématiques sera appliquée à des situations d'enseignement ayant eu lieu il y a plus de deux cents ans.

Dans une première partie, après un bref rappel sur l'histoire des académies des mines et le rôle des mathématiques dans les régions minières, je décrirai le nouveau système d'enseignement mis en place à l'Académie des mines de Freiberg. Le second professeur de mathématiques, J.F. Lempe, actif du début des années 1780 à 1801, en est la figure centrale. Je montrerai ensuite que ce nouveau système d'enseignement permet d'intégrer étroitement les étudiants et professeurs aux pratiques d'exploitation minière, qui servent de pratiques sociales de références, au sens de (Martinand 2003). La seconde partie se focalise sur un débat, qui oppose professeurs et techniciens, portant sur la meilleure manière d'enseigner la géométrie souterraine. Il est significatif que ce débat ait eu lieu, aussi bien à Freiberg qu'à Schemnitz, dans le dernier quart du XVIII^e^ siècle. Les deux groupes professionnels s'opposent sur les relations entre théorie et pratiques ; la question précise est de savoir qui doit enseigner la mise en pratique des savoirs géométriques dans les puits de mines.

II. UN NOUVEAU SYSTÈME D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Ni l'utilisation de la géométrie, ni même la transmission organisée de connaissances dans les régions minières d'Europe centrale ne commencent avec la création des académies des mines (Morel 2015b). En 1765, la fondation d'une Académie des mines à Freiberg, dans l'État de Saxe, et l'ouverture d'une chaire de mathématiques à Schemnitz, dans l'Empire Austro-hongrois, marquent néanmoins une étape importante. Jusque-là, les seuls apprentissages proposés étaient d'ordre pratique : il s'agissait de la géométrie souterraine, pour diriger les travaux des mines, et de la docimasie, pour l'essayage des métaux. La formation initiale, l'apprentissage de la géométrie ou de l'arithmétique élémentaire, avait lieu dans la sphère privée ou dans d'autres écoles. La formation proprement dite était délivrée par des géomètres souterrains, c'est-à-dire des fonctionnaires des mines. L'arrivée dans ces régions de professeurs de mathématiques va fondamentalement modifier le système.

1. *J.F. Lempe : un enseignement coordonné et adapté pour l'Académie des mines*

Les premières années sont le théâtre de multiples expérimentations et vont contribuer à faire émerger des idées qui, bien qu'elles semblent aujourd'hui aller de soi, sont alors radicalement

[175] Le didacticien et historien des mathématiques Schubring a très bien illustré le danger, et l'inutilité de chercher à étudier l'enseignement des mathématiques « pour elles-mêmes », en soulignant la nécessité de prendre en compte les interactions (Schubring 2003).

nouvelles. Il en est ainsi de l'idée de cursus, inconnue dans les universités de l'époque : un programme d'enseignement où l'étudiant suit des cours selon un plan organisé et où les savoirs acquis ici sont mis en pratique ailleurs[176]. En 1770, lors de l'introduction d'un tel cursus à Schemnitz, son utilité est soulignée :

> les fruits que l'on a récoltés [avec la création de l'Académie] n'ont encore jamais pu parvenir à maturité, car la théorie n'était pas suffisamment liée avec la pratique, et qu'aucune division des classes et des années d'enseignement n'était prévue. (Décret d'avril 1770, Schmidt 1836, p. 156[177]).

À Freiberg, on trouve dès la création de l'Académie une division en année, mais le problème de l'interaction entre théorie et pratique – c'est-à-dire très concrètement l'utilisation de méthodes mathématiques théoriques pour les sciences des mines – se pose avec la même acuité (Morel 2013, pp. 157-160). Une première raison est qu'il n'y a à cette époque pas de méthode éprouvée pour rendre la théorie utile dans les travaux pratiques, et que cette idée même est encore contestée par certains. Les professeurs de mathématiques, J.F.W. von Charpentier (1738-1805) à Freiberg et le jésuite Nicolaus Poda (1723-1798) à Schemnitz, sont tous deux des universitaires. L'enseignement de la géométrie souterraine reste confié au *Markscheider*, le géomètre de Freiberg en charge du mesurage des mines et de la direction des travaux.

À l'Académie des mines de Freiberg, les choses vont évoluer au début des années 1780 avec l'arrivée d'un nouveau professeur de mathématique. Johann Friedrich Lempe (1757-1801) est un symbole de l'efficacité de l'Académie en tant que nouvelle institution d'enseignement, puisqu'il y a lui-même étudié. Il a appris à la fois la pratique – avec le directeur des mines (*Bergmeister*) Johann Andreas Scheidhauer (1718-1784) – et la théorie avec le professeur de mathématiques Charpentier. Celui-ci certifie lui avoir donné des cours particuliers dans lesquels il « lit avec profit et comprend les textes d'Euler, Käster, Karsten et bien d'autres » (UAF – OBA 242, f. 105r). Lempe étudie ensuite à l'université de Leipzig pour parfaire sa formation théorique, avant de revenir enseigner à Freiberg en 1783. Dans le rapport d'activité de l'Académie de cette année-là, on peut lire :

> Pour accroître l'utilité et l'application des théorèmes théoriques des mathématiques pures que ces jeunes gens [les étudiants] ont appris, et pour les leur rendre plus familiers encore, l'administration supérieure des mines a chargé Mr. Lempe d'entreprendre avec eux des exercices pratiques, et de les laisser travailler par eux-mêmes (UAF – OBA 244, f. 86v).

Plusieurs éléments doivent ici être soulignés. D'une part, on voit à quel point l'administration des mines encadre et encourage l'apprentissage des mathématiques. Les professeurs sont inspectés et encadrés, tandis que leurs propositions sont écoutées et le plus souvent mises en pratique. On est bien loin du système universitaire allemand de l'époque, où chaque professeur est indépendant. L'encadrement des études a pour but principal de rendre les mathématiques utiles pour l'exploitation des mines[178].

D'autre part, la forme du cours est radicalement différente. À l'université, le professeur lit généralement à voix haute un manuel théorique devant une audience parfois très nombreuse ; il arrive plus rarement qu'il procède à des expériences (par exemple en physique), devant des étudiants cantonnés au rôle d'observateur. Il n'y a pas ou peu d'exercices, ni d'examen régulier : comme le montre le dossier de J.F. Lempe durant ses études à l'Université de Leipzig, il se contente de collecter à la fin de chaque semestre des attestations de ses professeurs, qui certifient qu'il a été assidu. À l'Académie des mines, l'organisation est

[176] Ce système, aujourd'hui adopté dans les universités français, est d'ailleurs loin d'être universel, et ne s'applique par exemple toujours pas dans les universités allemandes.
[177] Sauf indications contraires, toutes les traductions sont de moi.
[178] Sur la notion « d'utilité » et celle de « mathématiques pratiques », voir Morel 2015c.

complètement différente. Les professeurs discutent avec l'administration le contenu des programmes, et dans les années 1770, un réseau d'écoles secondaires des mines se met en place (Kaden 2012). Pour s'assurer que les supports de cours sont adaptés, J.F. Lempe abandonne les ouvrages universitaires et publie lui-même ses manuels, son cours d'arithmétique et géométrie élémentaire (Lempe 1781), ses cours de géométrie souterraine (Lempe 1782, 1785 avec Beyer), son *Calcul minier* (Lempe 1787) et sa *Théorie des machines* en deux volumes (Lempe 1795-1797). De plus, ces enseignements sont coordonnés, d'une part car ils sont tous assurés par Lempe, et d'autre part car ils ont été conçus ensemble :

> Comme les mathématiques pures élémentaires forment la base des sciences susmentionnées [mathématiques appliquées] et sont même indispensables dans de nombreuses expériences de physique, leur plan d'enseignement figure ici en premier. Et tous les plans se suivent, tout comme chacune de ces sciences donne un coup de main aux autres (UAF – OBA 12, f. 21v).

Les cours ont ensuite lieu en petit groupe : pour les mathématiques, il y a généralement entre trois et une quinzaine d'étudiants. Cela permet à J.F. Lempe de proposer à chacun des exercices adaptés, comme nous allons le voir. Dans ses rapports annuels, il fait le bilan des progrès de chaque étudiant dans chaque matière.

2. *Un enseignement fortement lié aux pratiques sociales des mathématiques*

Prenons par exemple le rapport qu'il écrit pour l'année 1785 (UAF – OBA[179] 245, ff. 110r-122r et ff. 135r-161r). Il est divisé en deux grandes parties, la première où il présente (plus ou moins succinctement) les travaux effectués par les 16 étudiants, et la seconde où il présente une liste, un recueil de questions. On voit que certains étudiants sont des débutants, ce qui est confirmé par les listes d'inscriptions à l'Académie (Freiberg 1850, pp. 12-13). Deux étudiants se sont inscrits l'année même (1785). Lempe explique :

> Bachmann et Schmidt (de Eisleben) ont résolus des exercices d'arithmétique et de géométrie, la plupart en lien avec les mines, et fourni un travail le plus souvent très satisfaisant pour des débutants (UAF – OBA 245, ff. 120v).

Pour les élèves avancés, Lempe donne des exercices plus complets. À ceux qui ont assimilés les exercices courts et ciblés de (Lempe 1787), il propose des situations pratiques. Voici par exemple l'exercice donné à Schutze jun. qui étudie à ce moment depuis trois ans à l'Académie (voir la figure 1).

> Schutze jun (F 14)., Calcul des coûts d'extraction lors du creusement d'un puits d'extraction.
>
> Un tel puits est généralement long de 1 toise et demie et large de 5/8 toises[180] .
>
> Le calcul peut être mené facilement et néanmoins correctement, comme si la montagne était en train d'être creusée, toise après toise.
>
> Il faut pour cela supposer qu'il est possible de remonter en une équipe[181] 2 soixantaines de baquets, avec une profondeur de 10 toises (ou 3 échelles) si l'on utilise un treuil à une personne, avec une profondeur de 20 toises (ou six échelles) si l'on utilise un treuil à deux personnes, et que pour un lieu d'une toise de longueur, ½ toise de largeur et 1 ¼ toises de hauteur, ce doit être 6 baquets.
>
> À combien se montent à présent les coûts d'extraction pour le creusement du puits, dont la longueur mentionnée est de 6 échelles, en excluant les nécessaires [frais de] cordes et baquets : les sept questions de calcul suivantes doivent être résolues :

---

[179] UAF - OBA signifie "Universitätsarchiv Freiberg - Oberbergamt".

[180] La toise est l'unité de base, mesure environ 1,9 mètres. Elle est divisée en huitièmes, eux-mêmes composés de 10 pouces.

[181] Une équipe dure à cette époque en général huit heures. Plus généralement, on remarque dans ce problème un grand nombre de données « implicites » : la durée d'une équipe, la longueur d'une toise, la valeur de la monnaie. Cela est caractéristique de bien des milieux professionnels. Voir par exemple (Eric Roditi 2014).

1. Le lieu précédemment mentionné d'une toise de longueur, ½ toise de largeur et 1 ¼ toises de hauteur est à considérer comme un parallélépipède ayant ces mesures : déterminer le volume de ce lieu.

2. (le puits est aussi un parallélépipède) calculer le volume de ce puits, d'une longueur de 5/8 de toises et d'une toise et demie de longueur, pour une toise de profondeur ?

3. Indiquer ensuite le volume dudit puits pour sa profondeur totale de 20 toises.

4. Déterminer le nombre de baquets nécessaire pour une toise de ce puits, ainsi que pour les vingt toises.

5. Trouver le montant pour un treuil à une personne, pour lequel deux travailleurs sont nécessaires, chacun gagnant 4g. par équipe.

6. Trouver le montant pour le treuil à deux personnes. Pour celui-ci, trois travailleurs sont nécessaire, et chacun gagne 4g. par équipe.

7. Donner le montant total des coûts d'extraction du puits d'une longueur de 20 toises.

L'aspect le plus intéressant de cet exercice est la prise en compte de données réelles. Ce qu'apprend ici l'étudiant, outre l'arithmétique, ce sont les dimensions usuelles des puits de mines, les noms et le fonctionnement des instruments ou encore le salaire horaire moyen d'un travailleur. On trouve généralement le nom exact du lieu, puisque Lempe ne donne que des situations réelles. Un autre exercice réalisé par le même étudiant, se déroule dans la mine « *Neuglück und 3 Eichen* ». Dans cet exercice, il est demandé à l'étudiant d'étudier si l'installation d'un manège à chevaux pour remplacer un treuil serait rentable. Pour cela, celui-ci doit calculer les coûts de cordes, la location des chevaux et les salaires, puis évaluer les quantités extraites, pour calculer le bénéfice annuel. Il doit ensuite comparer ce bénéfice avec l'investissement réalisé pour déterminer le point d'amortissement.

Enfin, pour les meilleurs étudiants, qui maîtrisent donc l'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie et souvent le calcul infinitésimal, Lempe propose des questions ouvertes (Morel 2013, pp. 166-170). L'étudiant doit lui-même trouver une mine dans la région où le problème est particulièrement important, formuler la problématique, trouver la modélisation et répondre à la question, sous la supervision de J.F. Lempe. Il s'agit de la dernière étape de la formation, qui prépare directement au futur emploi de l'étudiant : comme celui-ci se destine à l'administration moyenne ou supérieure des mines, il sera en permanence confronté à des problèmes de cet ordre.

En schématisant, on pourrait dire que J.F. Lempe propose un enseignement en trois temps : 1. l'étudiant apprend les bases de la géométrie et de l'arithmétique. 2. Il s'entraîne à résoudre des problèmes articulés, inspirés de situations réelles, apprenant par là même des informations relatives à son contexte professionnel. 3. l'étudiant est confronté à une situation typique de son futur métier, sans indication, et doit lui-même aller sur le terrain construire le problème avant de le résoudre. Lempe résume ses intuitions pédagogiques dans l'un de ses rapports :

> Un apprentissage fondamental des mathématiques et de la physique a été mis à profit par ces jeunes, qui ont certes de bonnes dispositions et font preuve d'application, mais qui sans cela ne sont pas préparés par leur éducation ; il faut seulement que l'enseignement soit présenté de manière à ce qu'ils sentent à quel point mathématiques et physique sont utiles dans l'exploitation des mines (UAF - OBA 246, f. 234r-v).

Dans cette première partie, j'ai cherché à montrer qu'une nouvelle forme d'enseignement se met en place à l'Académie des mines de Freiberg. Une plus large place est accordée à la coordination des enseignements, à l'interaction entre le professeur et les étudiants ainsi qu'à l'adaptation du matériau éducatif à des situations réelles, ou du moins plausibles. On peut cependant se demander dans quelle mesure cette volonté de l'administration des mines, mise en application par le professeur J.F. Lempe, avait pour but une véritable utilité de l'enseignement des mathématiques. S'agit-il simplement de sensibiliser les étudiants à leur futur métier, ou bien le but est-il de promouvoir les mathématiques comme outil par excellence pour améliorer l'exploitation ?

Figure 1 *- Exercice de Schutze jun. étudiant à l'Académie des mines de Freiberg en 1785.*

Source : UAF – OBA 245, ff. 142r-v.

3. Une nouvelle conception des rapports entre mathématiques et technique

Je pense qu'il s'agit véritablement de rentre les mathématiques utiles dans les mines ; en d'autre termes, s'assurer que chaque futur fonctionnaire des mines formé à Freiberg, sera capable : 1. d'utiliser ses connaissances géométriques et arithmétiques pour résoudre les problèmes qui se posent, et 2. d'assimiler les nouvelles réformes, méthodes et procédés proposés par l'administration des mines. C'est un problème que l'on retrouvera en détail dans la seconde partie, mais que l'on peut d'ores-et-déjà évoquer ici : une formation solide en mathématiques est nécessaire pour permettre de standardiser les pratiques et d’accélérer la diffusion des innovations.

Après la Guerre de Sept Ans (1756-1763), la Saxe entame un vaste mouvement de réforme nommé *Rétablissement*. Dans de nombreux États européens, les sciences mathématiques, au sens large, sont largement mises à contribution pour moderniser l'exploitation des mines à la fin du XVIII[e] siècle. Cette évolution est bien sûr partielle, critiquée et inégalement couronnée de succès, elle n'est pas moins une tendance de fond, qui – et le fait est suffisamment important pour être souligné –, précède le début de la révolution industrielle en Saxe d'environ un demi-siècle[182]. Il est clair, et je l'ai montré dans ma thèse, que le rôle du professeur de mathématique dépasse largement celui de l'enseignement (Morel 2013, p. 190). Il sert d'expert vis-à-vis de l'administration, et collabore avec les directeurs des machines.

Mais ce sur quoi je voudrais insister aujourd'hui est qu'il fait tout cela en tant que professeur et avec ses étudiants : en d'autres termes, on trouve à l'Académie des mines de Freiberg une conception élargie du rôle de l'enseignant, mais aussi des étudiants. Quand il faut par exemple cartographier la région, et donc résoudre le problème épineux du calcul de la longueur de base servant de support à la triangulation, il s'attaque au problème avec plusieurs de ses étudiants.

Il faut de plus souligner le caractère public des travaux réalisés avec les étudiants. Lempe est en effet éditeur d'un journal, qui est le journal de l'Académie des mines. Si les historiens ont longtemps cru que Lempe était le seul auteur des articles, ce n'est pas le cas. On voit très clairement, si l'on compare les archives de ses cours au journal, qu'il fait publier ses étudiants, ce qui est tout à fait novateur en cette fin de XVIII^e^ siècle. Dans la préface du premier numéro, il écrit :

> J'inclurai ici les travaux qui ont été réalisés, à mon instigation et sous ma supervision, par l'un ou l'autre de mes auditeurs ; bien sûr uniquement les travaux qui ne me sembleront pas indignes d'être publiés ; et ces travaux pourront être un exemple de mes efforts d'enseignement, pour rendre les mathématiques aussi utiles que possible à l'exploitation des mines (Lempe 1785, vol. 1, préface).

Dans le second numéro du magazine, publié en 1786, on trouve par exemple un article intitulé « Calcul des salaires d'extraction lors du creusement d'un puits d'extraction de six échelles [de profondeur] » (Lempe 1786, vol. 2, pp. 106-118). Les données du problème sont exactement les mêmes que celle du problème posé en 1785 à l'étudiant Schulze jun. (évoqué ci-dessus), et l'on retrouve les sept mêmes questions, auquel Lempe ajoute une huitième avant de donner une seconde méthode de calcul.

On voit ainsi que les exercices donnés aux étudiants servent bien l'objectif qui lui a été fixé : en tant que professeur de mathématiques, il doit proposer des méthodes simples et capables de mieux comprendre et d'améliorer la production. Il doit de plus les diffuser largement, ce qu'il fait au moyen de son journal. On pourrait donner d'autres exemples, comme par exemple la question du calcul et de l'optimisation du volume des baquets. On voit ainsi que l'enseignement des mathématiques s'intègre au sein d'un espace social bien particulier et que le professeur cherche à enseigner certaines compétences précises, qui seront directement mises en application dans un futur proche.

[182] Sur la modernisation de l'exploitation minière dans les États allemands et le rôle clé de Friedrich Anton von Heynitz (1725-1802), voir (Weber 1976).

Figure 2 *- « Calcul des salaires d'extraction lors du creusement d'un puits d'extraction de six échelles [de profondeur] », in Magazin für die Bergbaukunde, vol. 2, pp. 106-118.*

III. PROFESSEURS OU GÉOMÈTRES : QUELLE RÉPARTITION DE L'ENSEIGNEMENT ?

Prenons maintenant un exemple précis, afin d'étudier quels bouleversements furent introduits par la création des académies des mines. Comme nous l'avons indiqué en introduction, il existe depuis au moins le XVe siècle des géomètres souterrains (*Markscheider*). Avec la création de l'Académie des mines de Freiberg, la formation initiale des fonctionnaires des mines de Saxe, en arithmétique et en géométrie élémentaire, s'améliore considérablement. Ce nouveau système d'enseignement – qui comprend une véritable institution, un bâtiment, des classes, des professeurs, des manuels et des cours coordonnés – ne remplace pas immédiatement le système de compagnonnage qui lui préexistait.

Concrètement, les élèves suivent un enseignement théorique, puis certains vont étudier le maniement des instruments, la construction des cartes et la résolution de problèmes concrets dans les mines avec un *Markscheider*. Le système de certificats professionnels, en fonctionnement depuis de nombreuses générations, reste en place[183]. Symptomatiquement,

[183] Voir par exemple un certificat daté de 1784 dans UAF – OBA 244, f. 168r.

l'enseignant de géométrie souterraine pratique ne donne pas de rapport détaillé de ses activités ; il ne publie pas de manuel et continue d'utiliser ses manuscrits. Il reste en quelque sorte à l'écart de la nouvelle institution. Avec l'arrivée de J.F. Lempe au poste de professeur de mathématiques, les choses vont changer.

En 1784, et probablement sur demande de l'administration, le *Markscheider* principal de Freiberg, Johann Friedrich Freiesleben, accepte de fournir une liste complète des connaissances théoriques nécessaires à l'apprentissage pratique de la discipline (UAF – OBA 244, ff. 247r-253v). C'est un premier pas important, car la délimitation précise des rapports entre mathématiques théoriques et pratiques est nécessaire pour pouvoir coordonner les enseignements. Or ce partage des tâches n'avait depuis vingt ans jamais eu lieu.

4. La réforme de 1795 : un conflit entre professeurs et praticiens.

Si l'on sent clairement, à la lecture des rapports, que les professeurs de mathématiques – J.F.W. von Charpentier puis J.F. Lempe – voudraient se voir confier l'enseignement de la géométrie souterraine[184], un certain statu quo se maintient jusqu'en 1795. Il est cependant clair que J.F. Lempe commence à enseigner la géométrie souterraine d'un point de vue théorique ; on en trouve la trace non seulement dans son *Magazin*, mais également dans les rapports qu'il adresse à l'administration et dans certains exercices proposés à ses étudiants. En 1781, en 1782 et finalement en 1785, il a publié successivement trois manuels sur le sujet, dans lequel sa compétence n'est plus à démontrer. À chaque fois, il insiste sur la nécessité de traiter cette discipline comme une discipline scientifique, en utilisant plus de méthode analytique et moins de traditions.

On se trouve en fait dans l'une de ces périodes où l'organisation de l'enseignement, en particulier sa structure institutionnelle, ne correspondent plus à la réalité et aux besoins de la discipline à enseigner. Comme l'explique Yves Chevallard :

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d’accomplir toutes les tâches voulues d’une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n’existe pas : comme on l’a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique, qu’on n’examinera ici que très brièvement.
>
> Les praxéologies, en fait, vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des technologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d’archaïsme les techniques établies. (Chevallard 1998, en ligne)

Dans notre situation, la praxéologie correspond à l'ensemble des problèmes que le géomètre doit savoir résoudre. Ils demandent à la fois un savoir-faire dans le maniement des instruments et l'utilisation des cartes, et d'autre part un certain nombre de connaissances mathématiques. La discipline, théorisée et développée d'un point de vue théorique (analytique) par J.A. Scheidhauer puis J.F. Lempe, n'a que peu évolué dans sa réalité pratique. Carl Ernst Richter, de 1765 à 1779, puis Johann Friedrich Freiesleben à sa mort, perpétuent cette approche traditionnelle mathématico-pratique. Celle-ci est adaptée à la bonne marche quotidienne des mines, mais « dans un univers de tâches routinières surgissent à tout instant, ici et là, des tâches problématiques, qu’on ne sait pas – pas encore – accomplir » (Chevallard 1998).

La grande réforme de l'Académie des mines, décidée en 1794 et finalement adoptée en 1797, va être l'occasion de crever l'abcès et de discuter du partage des tâches entre professeurs et géomètres. Le directeur de l'Académie commence par demander à tous les enseignants

[184] Voir par exemple le rapport de Charpentier en 1781 (UAF – OBA 242, ff. 112-113), ou un rapport précédent de 1779 (UAF – OBA 242, f. 106r).

quels sont les problèmes à résoudre dans leurs disciplines respectives. La réponse du *Markscheider* Freiesleben est lapidaire : il explique que « en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie souterraine, aucun défaut ne m'est connu », et ne propose aucune évolution[185]. Charpentier, qui fait à présent partie de la haute administration des mines, est cependant d'un autre avis :

> Pour l'enseignement de la géométrie souterraine, je dois ici répéter par écrit ce que j'ai eu plusieurs fois l'occasion d'exprimer à l'oral : l'enseignement de la géométrie souterraine suppose une connaissance vraiment approfondie des mathématiques pures et en particulier une application habile de théorèmes et d'exercices trigonométriques souvent complexes ; et nos géomètres souterrains pratiques actuels ne la possèdent pas ; ils ne peuvent par conséquent pas présenter à leurs élèves la totalité des théorèmes concernés et des preuves nécessaires, ni les rendre suffisamment compréhensibles. (UAF – OBA 10, 173r. Partiellement cité dans Morel 2013, p. 234)

Pour résumer rapidement le long débat qui s'engage : il est finalement décidé que la géométrie souterraine sera une matière comme les autres. Le programme est redéfini en accord avec l'administration des mines et le professeur de mathématiques. J.F. Lempe crée alors une matière intitulée « *géométrie souterraine théorique* », et le *Markscheider* est cantonné à l'enseignement de l'application des connaissances obtenues dans ce cours. Cela permet de former la totalité des futurs fonctionnaires des mines à l'aspect théorique de la discipline, tandis que seuls ceux qui en ont vraiment besoin apprennent le maniement des instruments. La discipline est donc intégrée au cursus, son contenu est régulièrement discuté, et les examens ont lieu sous la surveillance des autres professeurs (UAF – OBA 77, ff. 39-41).

5. *Quels enjeux pour l'enseignement ? Comparaison avec l'Académie des mines de Schemnitz*

Il est instructif de comparer la situation à l'Académie des mines de Freiberg et à celle de Schemnitz, dans l'Empire Austro-hongrois. Il y a entre les deux pays de multiples différences ; les académies et l'enseignement des mathématiques ne jouent pas le même rôle. Malgré tout, il faut reconnaître au moins deux points communs fondamentaux : dans les deux cas, il existait avant la création de l'Académie une communauté de géomètres souterrains. Et comme à Freiberg, un débat va s'engager entre professeurs et praticiens sur l'enseignement de la discipline.

À la création de l'Académie de Schemnitz, l'enseignement pratique est bien sûr confié, comme le voulait jusque-là la tradition, à un géomètre souterrain. Une raison supplémentaire est que, contrairement à Freiberg, les professeurs de mathématiques vont se succéder à un rythme rapide. En 1772, un nouveau géomètre souterrain est recruté pour la formation pratique : il s'agit de Franz Dembscher, qui a lui même appris la discipline dans la région. L'année suivante, un nouveau professeur de mathématiques arrive, Johann Thaddäus Anton Peithner (1727-1792), un savant important à la cour de Vienne.

Le conflit va une fois de plus concerner la partie « théorique » de l'enseignement de la géométrie souterraine. S'il est clair que le *Markscheider* doit enseigner le maniement des instruments et le professeur de mathématiques la géométrie élémentaire, les méthodes mathématiques spécifiques à la géométrie souterraine sont disputées. Avant l'arrivée du nouveau professeur, Dembscher semble avoir enseigné la théorie et la pratique. Son enseignement

> consistait en ce que je leur [les apprentis] ai montré toutes les manières de décrire les mesures à la surface et donc aussi, par l'exercice, la théorie appliquée des bâtons [de mesure], du quadrant, de la corde d'arpentage (*Astrolab*), du viseur. Mais les jours où le mauvais temps ne permettait pas de travailler à la

[185] UAF – OBA 9, 21, Lettre de J.F. Freiesleben, 07.02.1794.

> surface, j'ai expliqué tout à la fois quelques exercices géométriques et trigonométriques sur la direction et l'inclinaison des filons […] et toute la théorie et l'utilisation des tables de sinus et de logarithme.(Štátny ústredný banský archív v Banskej Štiavnici, Oberkammergrafenamt (dans la suite du texte, ŠÚBA - HKG) Berichte 21.02.1774, f. 3r.)

Le géomètre défend son droit à enseigner la théorie spécifique à la géométrie souterraine, et affirme même, dans un document ultérieur, avoir « aussi rédigé un véritable manuel de géométrie souterraine pour les apprentis locaux, et [qu'il] peut le mettre sous presse » (ŠÚBA – HKG, résolution du 11.03.1774). Il y a donc, ici aussi, un conflit entre le savoir des universitaires savants et celui des praticiens. Dembscher affirme qu'on lui avait fait miroiter le salaire et le titre d'un professeur (ŠÚBA – HKG, compte-rendu du 21.02.1774, f. 1r.). Peithner, savant et professeur, cherche au contraire à se distinguer des praticiens et affirme la supériorité que lui donne la maîtrise de la théorie. Il va jusqu'à rédiger un véritable cours théorique de géométrie souterraine, qui ne sera cependant jamais publié (Leoben, Rara MSK/V/32 35583).

Du professeur Peithner, on possède également les questions posées à l'université de Prague en 1766, où il enseignait auparavant l'utilisation des mathématiques dans les sciences minières[186]. Les questions sont bien différentes de celles que les géomètres souterrains peuvent travailler avec leurs apprentis et relèvent plutôt d'une approche philosophique, souvent proche de la philosophie naturelle, caractéristique des universités allemandes de l'époque. Elles sont essentiellement qualitatives, du type « qu'est ce qu'un point ? une ligne ? un corps ? ». Même lorsqu'il s'attarde spécifiquement sur la géométrie souterraine, c'est pour demander au candidat d'expliquer « quels instruments sont nécessaires pour pratiquer l'art de la mesure souterraine, et leur emploi ». (Národní archiv, Praha - Staré Montanum MM 233, 4/10, partie « *Aus der Cörper Meß-Kunst* »)

À l'inverse, on peut voir comment la géométrie souterraine pratique était enseignée à Schemnitz. En 1777, un décret royal confirme que le *Markscheider* ne doit pas « répéter les principes théoriques algébrico-géométriques et trigonométriques » et se contenter de les appliquer dans des travaux en extérieur (Schmidt 1836, 2(14), p. 153). Une insistance particulière est portée sur le dessin : les étudiants doivent réaliser des mesures et faire des cartes. La même année, un programme d'enseignement est demandé au *Markscheider* Lorenz Siegel ; celui-ci propose un plan détaillé d'enseignement théorique et pratique (la partie théorique est bien sûr refusée par l'administration). L'année suivante, il propose un rapport détaillé sur le déroulement du cours, où l'on voit toutes les conséquences de la division de l'enseignement :

> Applications pratiques
>
> L'arpentage pratique, qui a été enseigné l'année dernière 1777 à Windschacht aux apprentis.
>
> On a tout d'abord expliqué et présenté l'utilisation des instruments nécessaires à l'arpentage, dont on se sert à la surface, et ceux-ci sont : le bâton, la tige de mesure, le cordeau de mesure, la chaînette de mesure, l'astrolabe […] Après la présentation de ceux-ci, nous sommes passés à l'exercice proprement dit à la surface, et avons tenu pour nécessaire de montrer [la résolution] pratique des exercices suivants, dans cet ordre :
>
> 1er exercice : Montrer la fabrication d'une échelle réduite, d'après une ligne arbitrairement choisie, ainsi que son utilisation et son application concrète. (ŠÚBA – HKG Ordinaria du 06.04.1778)

On voit donc que le cours, comme il avait été ordonné, se limite à des manipulations pratiques et à des mesures, en l'absence de toute théorie. De plus, le cours à lieu à Windschacht, une petite ville située à une heure de marche de Schemnitz. Le cours avait ainsi lieu dans la

[186] archiv, Praha - Staré Montanum MM 233, 4/10. Merci à Peter Konecny de m'avoir signalé cette source, et de m'avoir très gentiment fourni sa transcription partielle.

Markscheiderey, le quartier général des géomètres souterrains où étaient conservés les cartes et les instruments. Certains exercices des étudiants sont conservés dans les archives de l'Académie ; le soin porté à la finition des cartes contraste avec la rusticité des méthodes utilisées. Si celles-ci sont acceptables pour de l'arpentage, elles sont tout à fait insuffisantes pour réaliser des plans de mines précis. L'enseignement pratique se fait donc au milieu des praticiens, ce qui est un avantage. La séparation des lieux (Académie/*Markscheiderey*), des statuts (professeur/praticien) et le peu de communications entre les deux mondes va cependant, à terme, peser sur le développement de la géométrie souterraine à Schemnitz.

IV. CONCLUSION

Cette étude des méthodes et du contenu de l'enseignement des mathématiques dans les Académies des mines de Freiberg, et dans une moindre mesure de Schemnitz, montre donc qu'un nouveau modèle d'enseignement des mathématiques s'y met en place. Ce modèle possède plusieurs caractéristiques qui seront ensuite reprises par de nombreuses institutions d'enseignement scientifique et technique : on y trouve un cursus pluriannuel, dans lequel les enseignements sont progressivement coordonnés à la fois à l'intérieur d'une matière (sur plusieurs années) et à l'intérieur d'une classe (entre plusieurs matières).

J.F. Lempe innove et teste de nouvelles méthodes d'enseignement des mathématiques. Outre l'adaptation du contenu aux pratiques sociales de références, il rend l'apprentissage bien plus interactif ; l'introduction systématique d'exercices adaptés pour et discutés avec chaque étudiant est une nouveauté. L'enseignement des mathématiques a de plus lieu dans le contexte des régions minières. Les étudiants sont envoyés dans les mines pour faire des observations, et leurs résultats sont publiés dans un journal scientifique, ce qui montre qu'il s'agit bien là d'un « savoir utile ».

Si l'on se focalise sur un objet d'enseignement particulier, la géométrie souterraine, on s'aperçoit que ces évolutions ne se font pas sans frictions. Elles modifient en effet radicalement des méthodes d'enseignement et des pratiques en vigueur depuis plus de deux siècles. À Freiberg comme à Schemnitz, le conflit porte sur la « géométrie souterraine théorique », c'est-à-dire les méthodes, théorèmes et formules spécifiques à cette discipline. À Freiberg, l'administration va confier ces enseignements aux professeurs de mathématiques pour permettre d'imposer de nouvelles praxéologies ; après une période d'adaptation, la mathématisation de la géométrie souterraine sera un grand succès. Une tentative similaire à lieu à Schemnitz, mais le manque d'implication des professeurs de mathématiques ne va pas permettre d'arriver aux mêmes résultats.

REFERENCES

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In *Actes de l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-12). IREM de Clermont-Ferrand.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

Freiberg (1850) *Die Bergakademie zu Freiberg: Zur Erinnerung an die Feier des hundertsjährigen Geburtstages Werners*. Freiberg : Engelhardt.

Kaden H. (2012) *Das Sächsische Bergschulwesen. Entstehung, Entwicklung, Epilog* (1776-1924). Köln : Böhlau.

Konečný P., Schleiff H. (2013, Eds.) *Staat, Bergbau und Bergakademie: Montanexperten im 18. und frühen 19 Jahrhundert, Vierteljahrschrift für Sozial- und Wirtschaftsgeschichte – Beihefte* n°. 223. Stuttgart : Franz Steiner.

Lempe J.F. (1781) *Erläuterung der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie*. Altenburg : Richter.

Lempe J.F. (1782) *Gründliche Anleitung zur Markscheidekunst*. Leipzig : Crusius.

Lempe J.F. (1785-1799) *Magazin für die Bergbaukunde*, 13 volumes.

Lempe J.F. (1787) *Bergmännisches Rechenbuch*. Freiberg : Barthel.

Lempe J.F. (1795-1797) *Lehrbegriff der Maschinenlehre, mit Rücksicht auf den Bergbau*. Leipzig : Crusius.

Lempe J.F., Beyer A. (1785) *Gründlicher Unterricht vom Bergbau, nach Anleitung der Markscheidekunst*. Altenburg : Richter.

Martinand J.-L. (2003) La question de la référence en didactique du curriculum. *Investigações em Ensino de Ciências* 8(2), 125-130.

Morel T. (2013) *Mathématiques et politiques scientifiques en Saxe (1765-1851) : institutions, acteurs et enseignements*, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux.

Morel T. (2015a) Enseigner les mathématiques dans un domaine technique. Écoles et académies des mines au XVIIIe siècle. In Mathé A-C., Mounier E. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2014* (pp. 253-269). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM,.

Morel T. (2015b) Le microcosme de la géométrie souterraine : échanges et transmissions en mathématiques pratiques. *Philosophia Scientae,* cahier thématique « Échanges mathématiques : études de cas (XVIIIe-XXe siècles), 17-36.

Morel, T. (2015c) Usefulness and practicability of Mathematics: German Mining Academies in the 18th century. *Preprint of the Max-Planck Institute for the History of Science*, *« The Making of Useful Knowledge »*, à paraître.

Schmidt F.A. (1836) *Chronologisch-systematische Sammlung der Berggesetze der Königreiche Ungarn* 2(14).

Schubring G. (2003) Recent Developments in Research on the Institutional History of Mathematics. *Llull* 26(57), 1045–1059.

Weber W. (1976) *Innovationen im Frühindustriellen deutschen Bergbau und Hüttenwesen : Friedrich Anton von Heynitz*. Göttingen : Vandehoeck et Ruprecht.

ÉCRITURES NUMÉRIQUES ET CALCUL EN PLEIN CHAMP

Diana SOLARES*

Résumé – L'étude suivante analyse une activité agricole qui implique l'utilisation de l'écriture et du calcul numérique par des familles immigrantes de travailleurs agricoles. Elle a pour but d'identifier les connaissances mathématiques en jeu dans une activité extrascolaire spécifique afin de rassembler des éléments qui permettront d'analyser les relations entre les connaissances mathématiques extrascolaires et les connaissances enseignées à l'école primaire. De plus, elle présente un ensemble d'outils d'analyse résultant du dialogue entre perspectives théoriques de différents domaines, tout en soulignant l'importance des contributions de la Théorie Anthropologique du Didactique à l'analyse d'activités qui mobilisent des connaissances mathématiques dans des contextes extrascolaires.

Mots-clefs : éducation en mathématiques, travail agricole, Théorie Anthropologique du Didactique.

Abstract – This paper analyzes activities in which numerical writing is mobilized, in a context of agricultural work carried out by labor migrant families. The purpose of the study is to identify mathematical knowledge at play in a specific extracurricular activity in order to analyze possible relationships between knowledge that the children construct outside and inside school. Furthermore, this paper puts to consideration the use of the Anthropological Theory of Didactics and others theoretical perspectives to analyze activities in which mathematical knowledge is mobilized.

Keywords: Mathematics education, agricultural work, Anthropological Theory of Didactics

I. INTRODUCTION

D'après des statistiques officielles de 2011, environ 894 649 enfants et adolescents de 5 à 17 ans travaillaient dans le secteur agricole au Mexique ; il s'agissait de mineurs qui migraient avec leurs familles pour vendre leur force de travail. Des données officielles signalent qu'au moins 434 961 familles mexicaines se trouvaient en mouvement constant entre leurs communautés d'origine et les zones réceptrices du travail agricole.

Ces enfants interrompent constamment l'école primaire, raison pour laquelle il existe dans certaines zones agricoles des instances officielles qui organisent l'éducation primaire pour cette tranche de population. L'échec, l'absentéisme et la désertion caractérisent les parcours scolaires de nombre de ces enfants.

Nous avons constaté (Solares 2012a)[187] que d'une part, compte tenu de leurs activités et du contexte social dans lequel ils évoluent, ces élèves et leurs familles ont acquis une maîtrise de

* Universidad Autónoma de Querétaro – México – violetasolares@gmail.com. Traduction de l'espagnol vers le français par Pascale Beujard. Une version plus étendue de l'analyse de cette activité agricole ainsi que d'autres est présentée en espagnol dans les actes du IVe Congrès International sur la TAD, édition en préparation.

[187] Thèse de doctorat dirigée par David Block.

Solares D. (2015) Ecritures numériques et calcul en plein champ. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 517-526.

la numération orale et une connaissance efficace du calcul mental qui leur permettent de faire face à certaines situations relatives à leur travail. D'autre part, à l'école de nombreux élèves ont de sérieuses difficultés à écrire des nombres et à effectuer des algorithmes correspondant à leur niveau de scolarité. Face à ce constat, nous nous posons les questions suivantes : Quelles sont les connaissances des familles en mathématiques et dans quelles activités spécifiques les utilisent-ils ? Existe-t-il un lien entre les connaissances que les élèves utilisent à l'école et celles qu'ils utilisent en dehors de l'école ? Ce texte propose quelques éléments pour aborder ces questions.

II. OUTILS THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

1. Rapport entre connaissances et situations

Le point de départ méthodologique que nous adoptons est un principe épistémologique : pour identifier des connaissances mathématiques, *il est nécessaire de caractériser les situations* dans lesquelles ces connaissances sont mobilisées. Ce principe se base sur trois sources.

La première comprend plusieurs études latino-américaines visant à analyser les connaissances en mathématiques de populations vulnérables, telles que des adultes non alphabétisés, des communautés indiennes et des travailleurs qui n'ont pas encore atteint la majorité (Ferreiro, Fuenlabrada, Nemirovsky & Block 1987 ; Ávila 1988; Carraher, Carraher, & Schlieman 1995 ; Knijnik 2003). Ces études ont un dénominateur commun : les connaissances et la situation dans laquelle elles se développent sont étroitement liées ; le contexte, la culture ou le type d'activité exercent une forte influence sur le sens des connaissances mathématiques mises en œuvre.

La deuxième source regroupe des théories didactiques qui reconnaissent que les connaissances mathématiques fonctionnent de différentes manières, selon la situation ou l'activité où ces connaissances sont mises en œuvre : la Théories des Situations Didactiques déclare que les connaissances mathématiques peuvent avoir différents sens associés aux situations problématiques où elles interviennent (Brousseau 2000) ; de son côté, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) caractérise les mathématiques comme une activité humaine parmi d'autres réalisées dans la société ; l'activité mathématique a lieu dans différents contextes autres que dans les milieux scolaire et scientifique (Chevallard, Bosch & Gascón 1998). Cette étendue et cette diversité de situations ont une incidence sur les connaissances mathématiques en jeu.

La troisième source est constituée, d'une part, des études qui s'inspirent de la perspective nommée « Cognition dans la pratique », qui explique que les sujets élaborent des manières particulières de problématiser et de résoudre des situations en fonction du rôle social attribué à ces situations, de l'interaction avec d'autres personnes et des contextes spécifiques dans lesquels ces interactions ont lieu (Lave 1991). D'autre part, étant donné que nous analysons des documents contenant des informations numériques, nous nous appuyons sur des études qui, selon la perspective de « Literacy Practices », reconnaissent l'alphabétisation (literacy) comme une pratique sociale, déterminée historiquement, qui ne relève pas uniquement des compétences de lecture et d'écriture, ni des textes écrits mais également des interactions entre les individus à propos de ces textes (Barton & Hamilton 1998).

Telles sont les trois sources qui constituent le cadre méthodologique de cette recherche : pour identifier des connaissances mathématiques déterminées, il est indispensable de caractériser les activités ou situations spécifiques dans lesquelles sont produites ou interviennent ces connaissances. Nous nous centrerons dans ce document sur les apports de la TAD.

2. *Aspects permettant de caractériser des activités et connaissances mathématiques*

En 2008 et 2009, nous avons réalisé des analyses dans un vignoble au nord du Mexique, près de la frontière avec les États-Unis, dans le but d'identifier les activités qui donnaient lieu à certaines connaissances mathématiques ainsi que les caractéristiques de ces connaissances. Une des activités identifiées est la suivante : pendant la récolte, la plupart des familles travaillent à la cueillette du raisin. Le nombre de caisses récoltées par chaque « cueilleur » est noté par les « marqueurs » (« *anotadores* ») qui sont chargés de tenir les comptes des caisses obtenues. On observe différentes manières de tenir ce registre, une des plus courantes étant par regroupements de cinq (figure 1).

Figure 1 *– Registre des caisses par regroupements de cinq*

À la fin de la journée, les marqueurs comptabilisent ces traits pour obtenir le total en utilisant des nombres décimaux, puis ils transcrivent ces données sur différents documents fournis par l'administration. Ces registres numériques sont adressés à divers destinataires, dont le bureau chargé d'émettre les chèques.

La plupart des adultes et des mineurs interviewés ont dit qu'en tant que vendangeurs, ils n'écrivent rien lorsqu'ils réalisent leur travail ; ils « enregistrent » dans leur mémoire le nombre de caisses récoltées.

Parmi tous les documents produits à partir de l'information des marqueurs, le chèque et le justificatif de paiement sont ceux qui arrivent dans les mains des vendangeurs. Le justificatif indique les jours travaillés, le revenu correspondant à chaque jour de travail et la quantité totale à payer. Les vendangeurs sont quelquefois mécontents du paiement qu'ils reçoivent, ils affirment que les marqueurs enregistrent moins de caisses que celles qu'ils ont réellement vendangées et que par conséquent leur paiement s'en ressent.

Il existe donc pour une même activité agricole une diversité d'écritures numériques et de participants. Les intérêts des sujets étant en jeu dans la production et l'utilisation de ces écritures, ceci produit une tension constante qui dégénère quelquefois en conflit. Les vendangeurs n'ont que « leur mémoire » comme recours pour affronter ces conflits (plusieurs adultes interviewés ne sont jamais allés à l'école ou ont un degré de scolarité limité).

Les conditions dans lesquelles se réalise le registre agricole, ainsi que la révision des différentes études citées précédemment nous ont incitées à considérer les aspects suivants pour caractériser aussi bien les activités agricoles que les connaissances mathématiques en jeu lors de ces activités :

En quoi consistent les tâches spécifiques (quels sont les types de tâches) et quels sont leurs objectifs ?

Qui participent à ces tâches et quels sont leurs intérêts ?

Comment ces tâches sont effectuées (quelles sont les techniques) et avec quels outils,

Quels sont les discours concernant les manières de réaliser les tâches (quelle est la technologie) ?

On remarquera que plusieurs aspects ont à voir avec ce que la TAD considère comme *composantes d'une praxéologie.* Ceci s'explique par le fait que nous nous appuyons sur deux principes de la TAD :

- l'activité mathématique a lieu lors de pratiques concrètes réalisées dans des institutions spécifiques ;
- toute activité humaine peut s'analyser en termes de praxéologie puisqu'il est possible d'identifier les « types de tâches » effectuées dans une pratique déterminée, les « techniques » utilisées pour réaliser ces tâches, la « technologie » qui justifie et explique les techniques et la théorie qui justifie à son tour la technologie (Chevallard & al. 1998). Nous cherchons donc à identifier *les types de tâches* effectuées dans des activités agricoles spécifiques, *les techniques* utilisées dans ces tâches et *les discours technologiques* relatifs à ces techniques.

3. *La composante pragmatique de la technologie*

Nous tenons à apporter deux précisions sur l'utilisation que nous faisons de la TAD. Tout d'abord, bien que cette théorie n'aborde pas « les connaissances mathématiques » mais les praxéologies mathématiques existant dans des institutions spécifiques, nous utilisons le terme « connaissance » car nous cherchons à centrer la recherche sur les procédures, les stratégies, les erreurs et difficultés que les sujets expriment pendant leurs activités spécifiques. Deuxièmement, nous n'analysons pas les discours portant sur la technologie (la théorie) puisque nous n'avons pas identifié cette composante dans les discours des travailleurs agricoles. De plus, nous ne connaissons pas d'études qui abordent du point de vue de la TAD des praxéologies mathématiques d'institutions non scolaires. Cependant, des recherches soulignant les éléments « pragmatiques » des discours commencent à se développer. Nous voyons là une possibilité d'analyser des praxéologies mathématiques qui ont lieu dans les champs. C'est ce que nous allons tâcher de justifier maintenant.

Selon la TAD, la technologie d'une technique est « un discours rationnel -le logos- portant sur la technique ». Selon Chevallard (1999), ce discours remplit trois fonctions : justifier rationnellement la technique, l'expliciter ou la rendre intelligible et produire de nouvelles techniques. Quelles justifications et explications relatives à la technique y a-t-il dans les discours des travailleurs agricoles ? Comment aborder l'identification et l'analyse des discours lorsque ceux-ci se passent dans des espaces qui ne sont pas scolaires ?

Dans le cadre de la TAD, Castela (2008) précise qu'aux côtés des savoirs clairement définis par une composante théorique de la technologie, il existe un autre type de savoirs qui peuvent être qualifiés d'« opératoires, pragmatiques, pratiques ». Elle identifie ce type de savoirs comme « composante pratique » de la technologie. Ainsi, aux côtés des trois fonctions que la TAD attribue à la technologie, l'auteure en distingue six autres : décrire, faciliter, motiver, expliquer, valider et évaluer la technique. Ces fonctions ont été précisées par Romo (2009), qui utilise ce « modèle praxéologique élargi » pour analyser les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans un contexte de formation d'ingénieurs. Cette étude souligne la tension existant entre théorie et pratique, surtout dans les cas où des techniques mathématiques sont utilisées dans des contextes non mathématiques (Castela & Romo 2011).

Sur la base des travaux de Castela et Romo, nous centrons notre attention sur les gestes et discours des travailleurs agricoles qui ont pour but de corriger les techniques utilisées par certains travailleurs ou qui prétendent enseigner certaines techniques à ceux qui viennent de s'intégrer aux travaux agricoles, afin de voir si certains de ces discours s'appuient sur des connaissances mathématiques ou s'ils ont une incidence sur ces dernières.

Voici, de manière synthétique, la définition de chacune de ces six fonctions. La manière dont nous interprétons et utilisons certaines fonctions sera traitée plus loin.

- Décrire la technique. Elle est comprise comme « la production d'un discours descriptif des gestes qui composent une technique » (Castela 2011, p.170). Ce discours descriptif est important dans le processus de transmission d'une invention technique au sein d'une communauté de pratiquants.
- Faciliter la mise en œuvre de la technique. Il s'agit de savoirs qui

> permettent aux usagers d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations et d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. (Op cité, p. 170).

- Motiver la technique. Ensemble de savoirs axés sur les objectifs de la pratique :

> ce sont les buts atteints qui justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d'être. Il s'agit d'écrire une histoire de la technique qui situe ses composantes les unes par rapport aux autres : pour quoi (¿para qué?) accomplit-on tel geste à tel moment ? (Ibid., p.171).

- Valider la technique.

> Il s'agit de savoirs qui établissent que la technique et les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés. (Ibid., p.171).

- Expliquer la technique. Elle se réfère à une rationalité dans le sens

> d'une intelligence des causes. Il s'agit de savoirs qui analysent comment il se fait que la technique et ses différents gestes permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés. (Ibid., p.171).

- Évaluer la technique. Ce type de savoirs porte sur

> les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs. (Ibid., p. 172).

III. ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DE L'ENREGISTREMENT DU TRAVAIL AGRICOLE

Les champs qui ont fait l'objet de notre recherche se consacrent à la culture du raisin et des asperges. Les travailleurs sont payés en fonction du nombre de caisses qu'ils récoltent par jour. Pour ce faire, chaque travailleur doit marquer sur chaque caisse le numéro de travailleur que l'administration lui a assigné. De son côté, le marqueur de chaque équipe de travailleurs tient une première liste sur laquelle il note le nom et le numéro de chaque travailleur. Établir la liste des travailleurs et marquer un numéro sur les caisses font partie des *multiples types de tâches* relatives à l'organisation et au contrôle du travail journalier dans les champs. Rappelons-nous que, selon la TAD, un « type de tâches » s'exprime de manière précise par un verbe tel que *diviser* un nombre entier par un autre, *résoudre* un problème mathématique scolaire déterminé.

Les marqueurs réalisent au moins trois types de tâches : faire les listes de travailleurs, noter les caisses de raisin vendangées par chaque travailleur et tenir le compte des caisses de raisin qui sont envoyées à l'entrepôt. Les documents élaborés pour ces types de tâches sont définis par un verbe spécifique : « faire la liste », « noter les caisses »… Les marqueurs utilisent ces expressions pour parler aussi bien du document lui-même que des actions concernant leur élaboration.

Une fois la liste élaborée, les marqueurs élaborent un autre document : ils recopient à partir de la liste le numéro de chaque travailleur (sans le nom) et écrivent, en face de chaque numéro, une marque correspondant à chaque caisse de raisin récoltée par le travailleur. Nous avons d'ailleurs trouvé dans plusieurs champs différentes manières de faire ; la figure 2 en présente quelques-unes (c'est, dans tous les cas, le nombre 10 qui est représenté) :

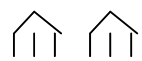
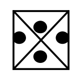
Forme 1	
Forme 2	
Forme 3	

Figure 2 *– Différentes techniques pour comptabiliser*

Quelques marqueurs ont affirmé que certaines formes sont plus utiles que d'autres lorsque la production est importante et qu'il faut enregistrer le nombre de caisses très rapidement (la forme 1 est plus pratique que la 2) ; de même, la forme 3 s'utilise quand il y a peu de place sur le papier car au lieu d'un seul carré pour enregistrer 10 seaux ou 10 caisses, il faudrait deux figures de la forme 2 pour enregistrer cette même quantité.

La superviseure des marqueurs de ce champ nous a expliqué que la première forme est la meilleure. Le système étant facile, ordonné et « visible », les erreurs sont moins probables et s'il y en a, il est plus facile de les repérer. La superviseure souligne ces avantages surtout lorsqu'il y a des réclamations de la part des vendangeurs :

> Ici on utilise ce système, c'est plus facile pour trouver une erreur […] ceux qui mettent en caisse se méfient parfois du marqueur […] , ils se disent que peut-être qu'ils ont oublié de compter des caisses […] je leur explique [aux marqueurs] : […] si quelqu'un arrive, regarde votre travail et voit que c'est ordonné et s'il a une réclamation, alors vous, vous avez la preuve et vous pouvez lui dire : et bien, moi je crois que j'ai bien tout noté, c'est bien ordonné.

L'exemple précédent permet de montrer le caractère pragmatique de ce discours autour de la technique, les rôles qu'il joue en tant que facilitateur de la mise en place de la technique tout en motivant à l'utilisation de cette dernière : quand la superviseure affirme qu'il est plus facile de trouver une erreur en traçant des traits par groupes de cinq, elle souligne le fait que cette technique est « visible », et de cette manière elle essaye d'encourager les marqueurs à n'utiliser que cette manière de faire, puisque cela leur permettra d'avoir un travail plus ordonné et de se défendre face aux réclamations probables des autres travailleurs. Il semblerait que cette technique d'enregistrement soit utilisée essentiellement pour éviter les conflits avec les travailleurs agricoles.

Pour que les marqueurs puissent enregistrer les caisses remplies par chacun des vendangeurs, ces derniers doivent écrire leur numéro de travailleur sur un des côtés de la caisse, comme cela a été dit auparavant. Une fois que plusieurs caisses ont été empilées les unes sur les autres, les marqueurs se mettent à enregistrer les caisses de chaque travailleur.

À différents moments de la journée, des camions arrivent pour emporter les caisses pleines à l'entrepôt. Chaque fois qu'un camion emporte des caisses, le marqueur doit noter sur un

« bon d’envoi » le nombre de caisses que le camion emporte et le type de raisins transportés. Un bon est fait pour chaque voyage, les responsables du camion gardent l’original et les marqueurs, la copie. Ils se serviront ensuite de ces copies pour « faire les comptes », c’est-à-dire pour voir si le total de ce qui a été enregistré sur la liste des vendangeurs coïncide avec le total des bons d’envoi. Les marqueurs se servent normalement d’une calculatrice pour le faire.

Il s’établit alors une chaîne de documents où les données numériques d’un document servent à l’élaboration d’un autre. Ainsi, l’information donnée par chacun de ces documents permettra de vérifier les données lors d’une différence ou d’un conflit entre les différents participants.

Une des façons de prouver que la technique marche, c’est en montrant que les comptes coïncident (« *cuadrar* ») : le total des caisses enregistrées par les vendangeurs doit correspondre au total de caisses enregistrées sur les bons d’envoi (qui sont les caisses transportées à l’entrepôt). Si les nombres coïncident, cela permet au marqueur de montrer à ses supérieurs que son travail a été bien fait et de répondre en l’occurrence aux différends possibles avec les autres travailleurs. Si de fait, selon un travailleur, le nombre de caisses enregistrées est inférieur à celles qu’il a réellement remplies, la différence apparaîtra en comparant ce nombre avec le total de caisses envoyées à l’entrepôt et enregistrées sur les bons d’envoi.

Faire coïncider les quantités est à la fois une technique qui permet de vérifier les comptes et de répondre aux différends.

En ce qui concerne les travailleurs agricoles, leur réclamation peut être reçue jusqu’au moment où ils reçoivent le chèque ainsi que le talon de paiement ou récépissé qui fait état de la quantité gagnée par jour. Quelles sont les techniques utilisées par ces travailleurs pour tenir leurs propres comptes et comment confrontent-ils leurs comptes avec ceux des marqueurs ?

Il y a deux manières de tenir le contrôle de ces quantités : l’une s’appuie sur la mémoire et l’autre sur l’écrit, bien qu’un seul travailleur sur l’ensemble de ceux qui ont été interviewés affirme noter les caisses remises. Ce dernier reconnaît qu’à la différence des registres des marqueurs, les siens n’ont pas de valeur « officielle » au sein de l’exploitation.

Les deux types d’enregistrement identifiés chez les vendangeurs (noter sur papier et enregistrer « dans la mémoire ») partagent une même stratégie : chaque fois qu’un travailleur agricole remet des caisses de raisins, il tâche de le faire toutes les cinq ou 10 caisses, ces nombres étant faciles à contrôler, que ce soit par la mémoire ou par écrit.

IV. CARACTERISATION DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES IMPLIQUEES DANS L’ENREGISTREMENT DU TRAVAIL JOURNALIER

Les activités agricoles décrites mettent en contact les enfants et leurs familles avec des connaissances mathématiques telles que le comptage, des systèmes de représentation de quantités (allant des graphies qui correspondent une par une à des quantités jusqu’aux nombres écrits conventionnels) et différents sens des nombres écrits (comme code, cardinal et ordinal).

Compter et calculer sont deux types de tâches impliquées toutes les deux dans le travail des vendangeurs tout comme dans celui des marqueurs, bien qu’il y ait des différences notables dans la complexité du comptage et du calcul que chacun effectue. Les vendangeurs comptent et enregistrent de cinq en cinq ou de dix en dix, par écrit ou en mémoire. En revanche, les marqueurs doivent compter des quantités beaucoup plus importantes et au moment-même ; même s’ils utilisent des représentations graphiques individuelles, sous des formes basiques de regroupement de cinq éléments, ils doivent cependant au bout du compte quantifier en utilisant des nombres décimaux sur deux registres qui doivent coïncider l'un avec l'autre. Pour cette dernière opération, ils additionnent le plus souvent avec une calculatrice.

La complexité des connaissances mathématiques impliquées dépend donc de la fonction professionnelle et de la hiérarchie des participants. C'est pourquoi, afin de caractériser ces connaissances, il faut considérer le type de tâches, la fonction et hiérarchie des participants, les techniques et instruments employés, ainsi que les discours technologiques relatifs à l'exécution de la tâche.

Il est également important, pour caractériser la complexité des tâches et des connaissances impliquées, de voir si le contrôle des quantités est fait pour soi-même ou pour être interprété par d'autres personnes. C'est un élément implicite à la fonction et à la hiérarchie des participants mais il faut tout de même le signaler car son rôle est important quant à la production de techniques : les marqueurs doivent effectuer la tâche telle que leurs supérieurs le leur demandent et, en même temps, anticiper les différends qui peuvent apparaître avec les travailleurs. Les raisons que les marqueurs invoquent sur la manière dont ils exécutent leurs tâches prouvent qu'ils doivent considérer ces deux aspects.

À leur tour, les ouvriers agricoles ont besoin d'un moyen de contrôle qui doit leur permettre de comparer à la fin de la semaine leurs propres comptes avec ce qu'indique le chèque qu'ils reçoivent. Le fait que leur propre contrôle n'ait pas une fonction ou une validité équivalente au registre des marqueurs (puisqu'il n'est pas requis par d'autres personnes), semble avoir une incidence sur la portée des techniques utilisées : le travailleur agricole tient ses comptes pour lui-même, le registre ne doit pas être clair pour d'autres personnes, il n'y a pas d'obligation quant à la technique à utiliser ni un enseignement explicite le concernant. Les connaissances mathématiques impliquées sont, par conséquent, moins communicables et aussi moins complexes.

V. CONCLUSIONS

La caractérisation de certaines des connaissances mathématiques de la population en question cherche à identifier les rapports, écarts et/ou conflits entre les connaissances mathématiques scolaires et extrascolaires. Pour ce faire, il a fallu rechercher des alternatives théoriques et méthodologiques qui permettent d'analyser les activités agricoles impliquant des connaissances mathématiques.

Sur la base de la TAD et de perspectives théoriques de domaines autres que la didactique, nous avons pu établir les aspects suivants pour caractériser certaines activités spécifiques ainsi que les connaissances mathématiques mobilisées pour les réaliser : Quel est le type de tâches à réaliser et quel est son objectif ? Quels sont les participants et quels sont leurs buts ? Comment résolvent-ils la tâche et avec quels instruments ? (Quelle est la technique ?) Quelles sont les explications et justifications apportées à la technique ? (Quelle est la technologie ?).

À la lumière des données obtenues, nous considérons que ces aspects constituent des instruments qui permettent effectivement d'identifier non seulement des connaissances spécifiques mais aussi les fonctions de ces connaissances, leurs portées et leurs limites. Pour confectionner ces instruments, la TAD a joué un rôle fondamental ; il a fallu expérimenter quelques-unes de ses catégories, mettre en pratique cette théorie en-dehors du domaine scolaire et emprunter à d'autres études qui déploient, à partir de la TAD, un ensemble de possibilités mieux adaptées à notre domaine d'investigation.

En ce qui concerne les connaissances mathématiques identifiées dans le domaine agricole, il s'avère que s'il est vrai que les informations numériques sont riches, les connaissances mathématiques en jeu dépendent néanmoins de la fonction et de la hiérarchie des travailleurs. C'est pourquoi il ne suffit pas de dire que la production et la circulation de nombres écrits sont importantes pour en conclure que les enfants et leurs familles partagent réellement les connaissances mathématiques en jeu.

Un des facteurs qui semble mobiliser les connaissances mathématiques est le conflit : c'est lorsqu'il y a désaccord que la confrontation des données numériques et des calculs a lieu et c'est à ce moment-là que l'écriture numérique revêt toute son importance. Être capable de reconnaître les nombres et les calculs que l'autre a écrit devient fondamental. Mais lire et écrire des nombres et faire des comptes ne se limite pas à une codification de l'écriture ni à l'exécution correcte d'algorithmes, il faut également savoir à quoi sert le document qui contient ces nombres, qui l'écrit et pour quoi faire. Pour faire ces « autres lectures » l'intervention de l'école est fondamentale : c'est elle qui peut assumer la tâche de développer les compétences en calcul des familles et des enfants afin de les aider à se positionner face aux autres avec plus de pouvoir.

Nous pourrions approfondir l'analyse en nous appuyant sur la perspective des registres sémiotiques de R. Duval (1993) : qu'est ce qui changerait dans la connaissance quand nous passons du registre graphique de quantités au registre numérique, de la représentation numérique dans un cahier à la calculatrice ? Ces questions sont assez pertinentes puisqu'il y a des élèves avec des difficultés pour écrire des quantités de trois ou quatre chiffres de manière conventionnelle. L'école peut-elle profiter du registre graphique par regroupements de cinq pour améliorer l'écriture numérique des élèves ? Il faudrait en faire la recherche, mais nous pouvons dire, pour le moment, que nous voulons surtout profiter des hypothèses émises par les élèves sur l'écriture numérique conventionnelle en elle même.

Il est donc important de continuer à s'interroger sur la manière dont l'école pourrait se servir des connaissances identifiées pour stimuler l'apprentissage scolaire, ainsi que sur la manière dont les connaissances scolaires pourraient contribuer à ce que les familles affrontent en situations de travail et de migration. Il convient donc de se demander si certaines connaissances mathématiques sont abordables ou pas hors de l'activité spécifique où elles ont lieu, vu que certaines techniques et technologies ne sont possibles que dans des conditions déterminées (voir le cas de l'obtention du poids d'une caisse de raisin dans Solares 2012b). L'identification de telles conditions doit être un élément à considérer dans l'analyse des liens possibles entre les connaissances mobilisées dans des espaces différents.

REFERENCES

Ávila A. (1988) *Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados.* Tesis de Maestría. Facultad de Filosofía y Letras. México: UNAM.

Barton D., Hamilton M. (1998) *Local literacies. Reading and writing in one community.* Londres: Routledge.

Brousseau G. (2000) "Educación y didáctica de las matemáticas." *Revista Educación Matemática* 12(1), 5 – 38.

Carraher T., Carraher D., Schlieman, A. (1995) *En la vida diez, en la escuela cero.* México: Siglo XXI.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182

Castela C. (2011) Développer le modèle praxéologique pour mieux prendre en compte la dynamique des savoirs. In Bosch M., Gascón J., Ruíz A., Artaud M., Bronne, A., Chevallard Y., Cirade, G., Ladage C., Larguier M. (Eds.) *Un panorama de la TAD. III Congreso Internacional de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. 2010* (pp. 163-185). CRM Documents 10. Centre de Recerca Matemàtica, Bellatera, Barcelona, 2011. http://www.crm.es/Publications/Documents/Documents_10.pdf.

Castela C., Romo A. (2011) Des mathématiques á l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79 – 130.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: SEP.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-265.

Duval R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives de l'IREM de Strasbourg* 5, 37-65.

Ferreiro E., Fuenlabrada I., Nemirovsky M., Block D., Dávila M. (1987) *Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados.* México: DIE-CINVESTAV.

Knijnik G. (2003) Educación de personas adultas y etnomatemáticas. Reflexiones desde la lucha del Movimiento sin Tierra de Brasil. *Decisio* 4(1), 8-12.

Lave J. (1991) *La cognición en la práctica*. Espagne: Paidós.

Romo A. (2009) *La formation mathématique des futurs ingénieurs*. Thèse de doctorat. Université Denis Diderot Paris 7.

Solares D. (2012a) *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes.* Tesis doctoral. México: DIE-CINVESTAV.

Solares D. (2012b) Conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares. Análisis de un caso en el contexto de los niños y niñas jornaleros migrantes. *Revista Educación Matemática* 24(1), 5-33