Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES ENVIRONNEMENTS MATHÉMATIQUES ET LES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS DANS L'HISTOIRE

Slim MRABET*

Résumé - Le théorème de Thalès a résisté à tous les changements d'axiomatiques dans l'histoire des mathématiques et a profité de la diversité des formes avec lesquelles il peut être formulé pour évoluer dans des environnements mathématiques divers. L'analyse de certains traités de chercheurs qui ont marqué l'histoire montre les conditions d'apparition de ce théorème et l'évolution de certaines démonstrations qui lui sont associées, à des époques différentes de l'histoire des mathématiques et de son enseignement. Nous montrons comment certains chercheurs ont été confrontés à des obstacles epistémologiques, et soulevons la question de l'incommensurabilité qui a souvent été rencontré.

Mots-clefs : Théorème de Thalès, démonstration, commensurable, obstacle, triangles semblables

Abstract – Thales theorem has resisted to all changes of axiomatics in mathematics history. It took advantage of the diversity of forms with which it can be made, to evolve in different mathematical environments. The analysis of some treaties of researchers that have marked the history shows the conditions of appearance of this theorem and the evolution of its demonstrations, at different times of mathematics history and its teaching. We show how some researchers have been facing to epistemological obstacles, and raise the question of the incommensurabilite which has often been met.

Keywords: Thales theorem, demonstration, commensurable, obstacle, similar triangles

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous choisissons d'étudier le théorème de Thalès pour des raisons multiples. Citons essentiellement que ce thème a résisté à tous les changements d'axiomatiques dans l'histoire des mathématiques, et que chez plusieurs chercheurs, depuis les Eléments d'Euclide, son évolution a été confrontée à des obstacles épistémologiques. En didactique, plusieurs recherches ont montré que c'est un moment redoutable d'enseignement, aussi bien pour les élèves que pour les enseignants.

L'intérêt de l'étude épistémologique que nous menons dans ce travail provient du fait que les choix d'enseignement effectués peuvent contribuer au dépassement, ou au contraire, au renforcement, de difficultés d'ordre épistémologique. Nous pensons également que la genèse historique d'une connaissance pourrait contribuer à une interprétation mieux fondée des difficultés remarquées chez les élèves. Selon Arsac (1987), il est important d'étudier la genèse historique d'une démonstration vu qu'on est amené à la reproduire en classe. Même si dans

* Université de Gafsa - Tunisie- mrabet_slim@yahoo.fr

Mrabet S. (2015) Les environnements mathématiques et les démonstrations du théorème de Thalès dans l'histoire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 411-423.

l'enseignement actuel il n'est pas toujours possible d'expliciter les moyens de la rigueur, il semble que dans le cas du théorème de Thalès, on ne peut pas cacher un point important : celui de la difficulté des rapports incommensurables.

L'étude des conditions d'apparition du théorème de Thalès et des différentes démonstrations qui lui sont associées nous fournit des éléments de réflexion sur la place du numérique dans le géométrique. Dans ce travail, nous commencerons par pointer dans l'histoire sur des évolutions dans la vision de la géométrie et dans la démonstration. Nous analyserons ensuite quelques démonstrations du théorème de Thalès proposées à des époques différentes de l'histoire des mathématiques et de son enseignement.

Nous choisirons d'analyser, pour le thème qui nous intéresse, quelques traités d'auteurs qui ont marqué l'histoire et qui ont eu une influence à une période donnée, sur l'enseignement des mathématiques. Nous commencerons par préciser, brièvement, les orientations générales et les caractéristiques de la géométrie chez chaque auteur, puis, nous nous focaliserons sur le théorème de Thalès, préciserons les concepts qui ont contribué à son élaboration, et sa démonstration en l'inscrivant dans un cadre plus large, celui de l'axiomatique de la géométrie qui caractérise cet auteur.

Il s'agit des traités d'Euclide, d'Arnaul, de Legendre, et d'Hadamard. Nous nous référerons également à un exemple de démonstration du théorème de Thalès extrait d'un manuel scolaire, et qui caractérise une axiomatique particulière de la géométrie.

II. LES ELEMENTS D'EUCLIDE (VERS 300 ANS A.V J.C)

Notons d'abord que dans l'étude des démonstrations du théorème de Thalès, notre but n'est pas de juger de la possibilité de les enseigner de la même manière. Il est clair que souvent, elles ont un niveau d'abstraction qui dépasse celui des élèves. Le but est surtout d'étudier l'évolution de la niche écologique dans laquelle le théorème de Thalès vit et de découvrir les obstacles épistémologiques qui ont accompagné et qui ont expliqué cette évolution.

1. *La géométrie chez Euclide*

Les *Eléments* d'Euclide constituent un moment important de l'évolution de la géométrie. Dès l'Antiquité, ils étaient considérés comme un moyen de rompre avec l'appréhension perceptive dominante à ce moment. Caractérisé par une axiomatique qui se veut rigoureuse, par sa rigueur et par son enchaînement logique, le traité d'Euclide prend appui sur le monde sensible, et utilise des raisonnements logiques tout en ayant souvent recours à des procédés empiriques. La géométrie d'Euclide s'est basée sur la théorie des proportions d'Eudoxe pour faire face à la crise provoquée par les irrationnels apparue en lien avec le théorème de Pythagore, ce qui a permis d'éliminer le recours aux nombres autres que les entiers. Dans le traité d'Euclide, un des objectifs essentiels est d'établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l'espace) et des proportions.

Pour traiter les situations relatives aux triangles et plus généralement aux polygones et à différentes courbes et surfaces, Euclide utilise les cas d'égalité et la similitude des triangles. Le théorème de Thalès, traduit par Peyrard sous le nom de « proposition des lignes proportionnelles », nous semble un point essentiel de la géométrie d'Euclide puisqu'il permet de repérer des points forts sur lesquels se fonde cette géométrie. Nous citons essentiellement deux de ces points :

- la méthode des aires qui consiste à faire des découpages et des recompositions dans le but de comparer des aires. Ce procédé, rendu opérationnel par les cas d'égalités des triangles, est fréquemment utilisé chez Euclide et d'une façon générale chez les géomètres grecs.

- la théorie des proportions élaborée pour résoudre le problème de l'égalité de deux rapports incommensurables. Elle est développée par Eudoxe et exposée au livre V des Eléments. Dans la théorie d'Eudoxe-Euclide, le rapport de deux grandeurs n'est possible que si ces grandeurs sont de même nature. Le cas du rapport de deux grandeurs incommensurables est exclu et il n'est pas défini comme un nombre. Cette conception persiste longtemps jusqu'au XIX^{e} siècle et trouve une solution par la construction des nombres réels.

2. Le théorème de Thalès chez Euclide

Le traité d'Euclide nous a fourni le premier énoncé dans l'histoire du théorème des lignes proportionnelles. La proposition 2 du Livre VI relative à cet énoncé traite du cas d'un triangle et d'une droite parallèle à l'un de ses côtés. La proposition 2 du L VI stipule que:

> Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Sa démonstration est basée sur une proposition précédente (proposition 1 Livre VI) qu'à la suite de Perrin (2006), nous appelons ***le lemme des proportions*** et sur un découpage et une reconstruction de figures.

Indépendamment du théorème de Thalès, la méthode des aires utilisée par Euclide présente au moins deux avantages :

- elle permet de contourner le problème des rapports incommensurables.

- elle interprète l'égalité des surfaces en termes de superposition et légitime la méthode empirique basée sur le découpage et la reconstruction de figures.

Dans le traité d'Euclide, les cas d'égalité de triangles forment un point fort de la méthode des aires puisqu'ils légitiment le procédé empirique.

Dans la démonstration de la proposition 2 du L VI, nous pouvons repérer cinq lemmes mobilisés dont quatre sont préparés dès le Livre I. Nous les exposons dans ce qui suit en utilisant les appellations proposées par Perrin (2006) :

1- Le lemme du trapèze (proposition 37 L I) qui stipule que :

> « Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux ».

2- Le lemme des proportions (proposition 1 L VI) qui stipule que :

> « Les triangles (et les parallélogrammes) qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ».

Ces deux lemmes reposent sur un même autre lemme : celui du **demi-parallélogramme** (proposition 34 L I) :

> « Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en deux parties égales ».

Pour démontrer le lemme du trapèze, Euclide se sert également d'un nouveau lemme que nous appelons celui du **double triangle** (proposition 41 L I) **:**

> « Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle », alors que la preuve de la proposition I du L VI (le lemme des proportions) est fondée sur la proposition 38 L I que nous appelons : le lemme des triangles à bases égales, et qui est conséquence du lemme de trapèze.

« Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux ».

Outre le fait que la démonstration d'Euclide permet de contourner le problème des irrationnels, nous pensons que'elle est à la fois simple et très visuelle, et qu'elle pourrait bien être enseignée à un élève de fin du collège ou du début du lycée.

3. La démonstration d'Euclide

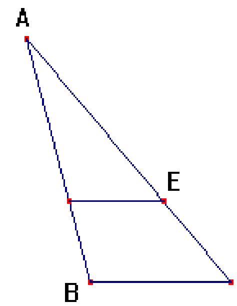

Figure1-La démonstration d'Euclide

Soit le triangle ABΓ et une droite ΔE // BΓ; je dis que l'on a: BΔ: ΔA = ΓE: EA

Joignons les droites BE et ΓΔ

Les triangles BΔE et ΓΔE sont égaux, car ils ont la même base, ΔE et sont situés entre les mêmes parallèles ΔE et BΓ (I.38)

AΔE étant un autre triangle quelconque, nous avons:

(BΔE): (AΔE) = (ΓΔE): (AΔE) (V.7)

car les grandeurs égales à une même troisième ont même rapport

Mais (BΔE): (AΔE) = BΔ: ΔA (VI.1)

Car ces triangles ont la même hauteur, la perpendiculaire à AB issue du point E; ils sont donc dans le rapport de leurs bases.

Pour la même raison, nous avons: (ΓΔE): (AΔE) = ΓE: EA

d'où BΔ: ΔA = ΓE: EA (V.11)

Chez Euclide, le théorème de Thalès a un rôle de transition assurant le lien entre les triangles équiangles et les triangles semblables définis comme étant des triangles équiangles dont les côtés sont deux à deux proportionnels. Le théorème de Thalès permet à Euclide de simplifier cette dernière définition et de montrer que la condition « équiangle » est suffisante pour dire que deux triangles sont semblables. Il permet également d'établir la propriété réciproque des triangles semblables :

« Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entre eux » (proposition 5, L VI)

Le traité d'Euclide a marqué une grande partie de l'histoire des mathématiques et il est source d'inspiration pour de nombreux auteurs. Ceci n'a pas empêché certains de ses successeurs de le critiquer et de proposer d'autres conceptions de la géométrie et d'autres démonstrations du théorème qui nous intéresse.

III. LES ELEMENTS D'ARNAULD (1667)

1. La géométrie chez Arnauld

Au XVII^{e} siècle, le traité d'Euclide ne semble pas satisfaire certains mathématiciens. A cette époque s'est développée une arithmétique qui a renouvelé la notion de grandeur et qui a établi le lien entre les opérations sur les nombres et celles sur les grandeurs, ce qui a permis à Arnauld de fonder une théorie des proportions au début de son ouvrage.

A l'époque d'Arnauld sont apparus les nombres sourds comme étant le rapport de deux grandeurs incommensurables sans qu'ils n'aient un statut théorique bien défini. Arnauld se place du côté de la pratique de la mesure et pour lui, à une grandeur est associé un nombre comme étant le nombre de fois que cette grandeur contient l'unité ou une partie de l'unité avec éventuellement un résidu. De la même façon il définit le rapport de deux grandeurs homogènes en prenant comme unité une partie aliquote du premier. Par ailleurs, le traité d'Euclide a été objet de critiques d'Arnauld et Nicole. Un des points sur lesquels portent ces critiques porte sur le respect du vrai ordre de la nature. Dans l'axiome 32 du Livre V (annexes), Arnauld mentionne clairement que le vrai ordre de la nature impose l'antériorité des lignes par rapport aux triangles. Dans la démonstration du théorème de Thalès, Arnauld rejette le détour par les aires que fait Euclide et pose l'antériorité des lignes par rapport aux surfaces. Sa démonstration s'appuie sur le résultat qui stipule que sur toute sécante, des parallèles équidistantes déterminent des segments égaux. Dans la résolution des problèmes, il renonce aux triangles, chers à Euclide, comme moyen de traiter les situations qui relèvent du théorème de Thalès. Pour lui, l'inégalité triangulaire remplace les cas d'égalité par superposition et la notion d'angle occupe une place centrale.

2. Le chemin pour le théorème de Thalès

Dans le traité d'Arnaud, au début du Livre X consacré aux lignes proportionnelles, un ensemble de lemmes permet de préparer le terrain pour les énoncés liés au théorème de Thalès. Le premier lemme introduit la notion d'espace parallèle comme étant un espace compris d'une part entre deux parallèles et indéfini de l'autre, alors que le lemme 4 définit l'inclinaison d'une ligne dans un espace parallèle comme étant l'angle aigu qu'elle fait sur l'une et l'autre parallèle, ces deux angles sont toujours égaux.

Dans le lemme 6 du même Livre, Arnauld définit les angles semblables. C'est en fait une manière de considérer des triangles mais des triangles dont deux côtés sont infinis : les angles semblables sont des angles qui, lorsque étant égaux, c'est-à-dire superposables, les angles sur la base de l'un[1] sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun. Cette notion remplace le recours que fait Euclide aux triangles. Arnauld se distingue d'Euclide en considérant que les lignes sont infinies et sort du cadre des figures fermées dans lesquelles Euclide s'est enfermé. La proposition fondamentale qui suit les lemmes traite d'un cas de proportionnalité des côtés de deux triangles ayant un angle aigu égal, dans une formulation propre à Arnauld, se servant d'espace parallèle et d'inclinaison de lignes.

Le premier théorème du Livre X correspond à la proportionnalité des côtés des triangles équiangles, toujours en faisant appel à l'inclinaison de lignes. Par rapport à Euclide, les rôles se sont renversés : les triangles équiangles chez Arnauld, introduits à partir d'angles semblables, précèdent tout énoncé du théorème de Thalès dans un triangle, alors que pour Euclide, ces triangles sont revisités après la proposition VI. 2.

[1] Pour Arnauld, la base d'un angle correspond à une sécante aux côtés de l'angle.

3. *Les énoncés du théorème de Thalès*

La première forme ressemblant aux énoncés récents du théorème de Thalès apparaît dans un premier corollaire du premier théorème du Livre X. Cet énoncé se sert de plusieurs parallèles coupées par des sécantes.

Premier corollaire

14. Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième etc., comme chaque autre toute est à la même partie, première, ou deuxième, ou troisième etc.

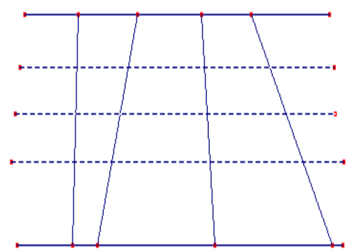

Figure 2- *Enoncé d'Arnauld*

Les angles paraissent chez Arnauld aussi importants que les triangles chez Euclide :

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouve diverses sortes de proportions de grand usage.

Sa démonstration n'est qu'une application des deux premiers théorèmes (résultats 13 et 18) et du 9ème lemme comme conséquence des angles alternes internes introduits au résultat 57 du Livre VIII. (voir annexes)

IV. LES ELEMENTS DE LEGENDRE (1794)

1. *La géométrie chez Legendre*

L'ouvrage de Legendre marque un retour à Euclide et se propose de démontrer certaines propriétés admises par ce dernier, comme le 5e postulat, en commençant par montrer que « Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits ». A partir de ce résultat, Legendre démontre l'égalité des angles alternes-internes et correspondants définis par deux droites parallèles coupées par une sécante. Il joint la rigueur euclidienne à sa théorie sur les mesures. Nous retrouvons la méthode des aires d'Euclide dans la proposition 1 du livre III intitulée : *les proportions des figures*, à laquelle sont ajoutées des propriétés d'algèbre après avoir défini au début du même livre, les notions de figures équivalentes, de figures semblables et d'angles homologues.

Notons que le traité de Legendre a été utilisé pour l'enseignement avec des modifications au fil des rééditions. Nous avons consulté une 14ème réédition de ce traité réécrite par Blanchet, et avons trouvé que Legendre se limite alors au cas d'un triangle, et l'abandon de la méthode des aires l'a amené à distinguer deux cas suivant que les longueurs sont commensurables ou incommensurables. Ainsi, la proposition XVI du livre III indique que :

« Toute parallèle DE à l'un des côtés BC d'un triangle ABC, divise les autres côtés AB, AC, en parties proportionnelles »

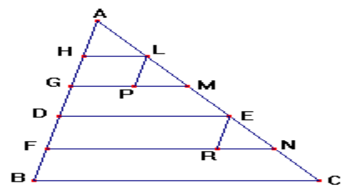

Figure 3- Enoncé de Legendre

Le cas des segments commensurables :

L'auteur traite un exemple générique : il divise les segments AD et DB suivant la commune mesure. Les parallèles menées de H, G, D et F déterminent sur le segment AC des segments égaux. Pour démontrer ce résultat, il montre l'égalité des triangles (par exemple LPM et ERN) en se basant sur les angles correspondants et alternes internes, puis il déduit que AE et EC sont divisés dans le même rapport que AD et DB.

Le cas des segments incommensurables n'est pas effectivement démontré, mais l'auteur précise qu'il suffit d'encadrer les rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$ par deux nombres consécutifs de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc.., avec un raisonnement qu'il a utilisé dans un chapitre antérieur, et il déduit que les rapports sont égaux.

Le sens réciproque du théorème, toujours relatif au triangle, apparaît à la proposition suivante

La démonstration se sert du sens direct et du raisonnement par l'absurde :

Proposition XIV

Théorème

Réciproquement, si les côtés AB, AC d'un triangle ABC sont coupés proportionnellement par la ligne DE, en sorte qu'on ait $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

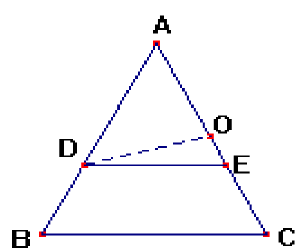

Figure 4- La réciproque chez Legendre

Je dis que la ligne DE sera parallèle à la base BC. Car si DE n'est pas parallèle à BC, supposons que DO en soit une ; alors suivant le théorème précédent on aura : $\frac{AD}{DB} = \frac{AO}{OC}$

Donc on aura : $\frac{AO}{OC} = \frac{AE}{EC}$, proportion impossible puisque, d'une part, AE est plus grand que AO, et que, de l'autre, EC est plus petit que OC; donc la parallèle à BC, menée par le point D, ne peut différer de DE.

2. Les applications du théorème de Thalès

Le théorème de Thalès réduit au triangle permet de traiter les propriétés des bissectrices d'un angle dans un triangle et du lieu géométrique des points dont les distances à deux points B et C sont dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. Viennent ensuite les cas de similitude des triangles qui profitent des définitions des triangles équiangles et des triangles semblables, puis les applications aux polygones semblables en les décomposant en des triangles semblables. Comme nous l'avons remarqué chez Euclide, la cohésion Thalès-triangles semblables est nette. Dès leur apparition, les triangles semblables chez Legendre se substituent au théorème de Thalès et trouvent un terrain riche d'applications. Nous citons en particulier les applications aux rapports de périmètres et d'aires de polygones semblables et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Dans des problèmes relatifs au livre III, l'obsolescence interne du théorème de Thalès est également assurée par des problèmes de type : diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles à des lignes données, trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Dans les livres suivants du traité, les triangles semblables sont utilisés dans des problèmes de calcul d'aires relatifs à des polygones réguliers. Le théorème de Thalès ne sera revisité que dans l'étude de la géométrie dans l'espace, dans les sections d'une pyramide.

V. LE TRAITE D'HADAMARD (1899)

1. La géométrie chez Hadamard

Le traité de Hadamard est destiné à l'enseignement de la géométrie. Au début de son ouvrage, Hadamard signale qu'il compte se démarquer d'Euclide en insistant sur les aspects pratiques et intuitifs de l'enseignement de la géométrie. Chez lui, la géométrie est considérée comme plus simple, plus accessible du point de vue du raisonnement et plus concrète que les théories abstraites de l'arithmétique et de l'algèbre. Une importance particulière est accordée à l'étude des figures et des relations qu'elles ont entre elles ce qui explique la fréquence élevée des problèmes de construction géométrique qui occupent, en particulier, un chapitre entier (chapitre VI) du Livre III. Par ailleurs, la comparaison des figures et l'étude de leurs correspondances sont bien mises en avant en suivant deux méthodes :

- la méthode classique chère à Euclide qui consiste à appliquer le principe de superposition. Pour cela, apparaît dès l'introduction la définition de deux figures égales comme étant deux figures superposables.

- la méthode « moderne » qui fait appel aux transformations du plan. Ainsi, symétrie orthogonale, rotation et translations sont introduites dès le premier Livre et cohabitent avec les objets traditionnels de la géométrie. Ceci a permis de traiter de nouveaux types de problèmes tels que la recherche des lieux de points.

2. Un chemin pour Thalès

Dans les deux premiers livres, sont traités des propriétés classiques de géométrie que nous avons trouvées dans les traités précédents. Pour ce qui nous intéresse, nous citons les cas d'égalité des triangles, les propriétés des angles alternes internes et des angles correspondants, et l'étude des parallélogrammes.

En faisant la comparaison avec les autres traités analysés, notamment celui d'Euclide, nous pouvons dire que l'abandon de la méthode des aires a réduit le nombre des ingrédients utiles pour préparer le terrain à l'arrivée du théorème de Thalès.

3. Les énoncés du théorème de Thalès

Le premier énoncé du théorème de Thalès qui suit le rappel des proportions et de leurs propriétés au Livre III se sert de la notion de projection (Théorème fondamental, 113, annexes). Le cas général de cet énoncé est préparé par un cas particulier où les segments sur la droite de départ sont égaux. La démonstration de ce cas particulier est identique à celle qu'on a trouvée chez Legendre (14ème réédition), alors que la démonstration du cas général consiste à montrer que les rapports de distances sont égaux à 1/n près quel que soit n. Par rapport à la méthode classique par les aires, la démonstration d'Hadamard présente un nouveau point de vue: celui de la continuité et du passage à la limite pour montrer que les rapports de distances sont égaux s'ils sont égaux à 1/n près quel que soit n. Notons que dans la démonstration d'Hadamard, un cas particulier générique est traité et les positions de quelques points (I' et II') ne sont pas démontrées mais simplement lues sur la figure (annexes).

A l'instar de la majorité des démonstrations précédentes, celle d'Hadamard pose la difficulté du passage du cas des segments commensurables au cas des segments incommensurables. Hadamard traite d'un cas particulier (n = 5) et laisse implicites les encadrements des rapports et la propriété de la densité de **Q** dans **R**.

4. Les applications du théorème de Thalès

Les applications immédiates du théorème de Thalès traitent des propriétés des bissectrices internes et externes d'un angle ce qui a permis d'établir le théorème relatif à la recherche du lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné. Au chapitre suivant relatif aux similitudes des triangles, un premier théorème permet la transition entre le travail sur les lignes proportionnelles et celui sur les triangles semblables :

> « Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle forme avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier »

Les cas de similitude des triangles qui suivent se substituent au théorème qui nous occupe et à l'instar des traités précédents, dorénavant ils vont être un outil puissant dans la résolution de toutes les situations de Thalès.

VI. LE THEOREME DE THALES DANS L'ALGEBRE LINEAIRE

Nous nous servons d'un manuel scolaire tunisien, celui de Troisième année secondaire de 1977 : le théorème de Thalès apparaît juste après la définition de la projection d'une droite sur une droite parallèlement à une droite. Il est énoncé comme suit (p.161) :

> **THEOREME 35 (de THALES)**
>
> Soit A, B, C trois points alignés avec $A \neq B$. Soit p une projection sur une droite parallèlement à une droite. En notant A' le point p(A), B' le point p(B) et C' le point p(C), on a : $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ (avec $\alpha \in IR$)

Une démonstration du théorème de Thalès est proposée par la suite : nous considérons p : la projection sur D_1 parallèlement à Δ.

Deux cas sont distingués suivant que (AB) est parallèle à Δ ou non. Dans le premier cas, le résultat est évident. Dans le deuxième cas, voici la démonstration :

On a vu que la projection de (AB) sur D_1 parallèlement à Δ est bijective donc $A' \neq B'$ et $(A'B') = D_1$. C' étant sur D_1, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$. En utilisant le théorème de CHASLES, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'})$ avec $\overrightarrow{AC} \in$ dir (AB), $\overrightarrow{A'A} \in$ dir (Δ) et $\overrightarrow{CC'} \in$ dir (Δ) donc $(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'}) \in$ dir (Δ). Cette démonstration a été faite dans un exercice obligatoire après le théorème 21.

De même $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})$ avec $\overrightarrow{AB} \in$ dir (AB) évidemment, et $(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'}) \in$ dir (Δ). Comme $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$ on a : $\overrightarrow{A'C'} = \lambda[\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})]$ donc $\overrightarrow{A'C'} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{AB}}_{\in dir(AB)} + \underbrace{\lambda(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})}_{\in dir\Delta}$. On a obtenu ci-dessus $\overrightarrow{A'C'} = \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\in dir(AB)} + \underbrace{(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'})}_{\in dir(\Delta)}$.

Puisque dir $(AB) \neq$ dir (Δ), le théorème 32 affirme en particulier $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$

On a par hypothèse $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$. Le théorème 28 affirme : $\lambda = \alpha$

Conclusion : $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ c.q.f.d

VII. CONCLUSION

A partir de notre analyse, nous pouvons dire que durant des siècles, le théorème de Thalès garde toujours une grande place dans l'organisation mathématique de la géométrie. Dans la majorité des ouvrages que nous avons consultés, le problème de l'incommensurabilité a été rencontré. Les démonstrations du théorème de Thalès sont souvent faites dans le cas des segments commensurables, et le passage aux segments incommensurables est admis. La problématique de l'incommensurabilité fait obstacle à l'enseignement d'une démonstration du théorème de Thalès, puisque les techniques utilisées dans les démonstrations citées ne sont pas au niveau d'un élève de fin de collège ou du début du lycée, et puisque au moment où cet enseignement devient possible (en terminale), d'autres outils se substituent au théorème de Thalès, les similitudes notamment. Nous pensons avec Abdeljaouad (2002) que l'un des intérêts de la démonstration du théorème de Thalès pour un enseignant est de concevoir la droite réelle sans « trous ». Ce travail a également tenté de montrer que le théorème de Thalès a résisté aux changements d'axiomatiques dans l'histoire, et a profité des différentes formes avec lesquelles il peut être formulé, pour évoluer dans des environnements mathématiques différents. Il serait utile de traiter ce sujet lors d'une formation d'enseignants.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) *Une démonstration du théorème de Thalès*. Miftah al-Hissab, n°100, Tunis.

Arnauld A. (1667) *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris : Charles Savreux.

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration : essai épistémologique didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8(3). Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau G. (1995) Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université, in "Autour de Thalès". *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p. 87-12.

Euclide (1993) *Les œuvres d'Euclide*. Traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage argumenté d'une importante introduction par M. Jean Itard. Paris : Librairie Scientifique et Technologique Albert Blanchard.

Hadamard J. (1928) *Leçons de géométrie élémentaire*. Paris : 10è édition.

Legendre A.D. (1794) *Eléments de géométrie*. Paris : Firmin Didot.

Mrabet S. (2004) *Quelles conceptions ont les enseignants tunisiens du collège et du lycée sur le théorème de Thalès ?* Mémoire de DEA. Université de Tunis.

Mrabet S. (2010). *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien: conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*. Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).

Perrin D (2006) *Autour de Thalès*. Conférence à l'université Paris 7.

MANUEL SCOLAIRE

Manuel Tunisien (1977), Mathématique 3, 3e de l'enseignement secondaire, Centre National Pédagogique.

ANNEXES

Le traité d'Arnauld

Livre V

32. [….] Ce qui doit faire regretter le scrupule qu'on pourrait avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses et employer les triangles pour employer les propriétés des lignes, c'est-à-dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à al véritable méthode [….].

Livre VIII

57. La même ligne coupant obliquement plusieurs parallèles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est-à-dire qu'elle fait sur toutes, les angles égaux.

Lemme 9

Lorsqu'une ligne est coupée par plusieurs lignes toutes parallèles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les parallèles qui les renferment.

13. Premier théorème

Si deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le sont autant chacune que chacune de deux autres le sont dans un autre espace, les également inclinées sont en même raison

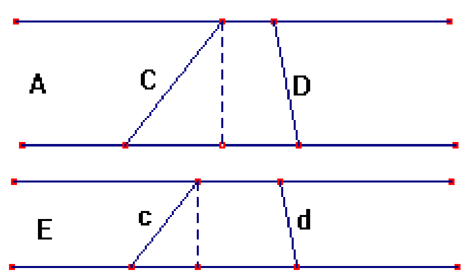

Figure 5- *Le premier théorème chez Arnauld*

Second théorème

18. Lorsque deux angles sont semblables (c'est-à-dire selon le sixième lemme, lorsqu'étant égaux, les angles sur la bases de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun), ces côtés sont proportionnels aux côtés, et la base à la base et la hauteur à la hauteur.

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouve diverses sortes de proportions de grand usage

Démonstration

En traçant du sommet une parallèle aux deux bases, il se trouve trois espaces parallèles. D'après le 9ème lemme, T étant incliné dans W que P dans A et q dans E ; et de même, t étant autant incliné dans w que p dans A et g dans E, d'après le 1er théorème, on a : T.P :: t.p ; Tq :: t.g ; P.q :: p.g et alternado T.t :: P.p ; T.t :: q.g ; P.p ::q.g. Par Le 2ème théorème, chaque toute et sa première partie sont en même raison que la dernière base et la première T.P :: B.b ; t.p ::B.b et alternado T.B ::P.b ; t.B ::p.b Ainsi T.P ::P.p::B.b.

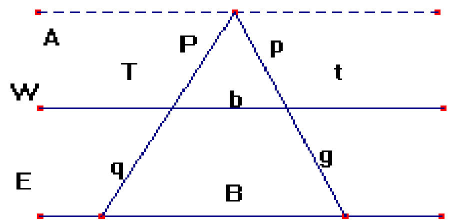

Figure 6- *Second théorème chez Arnauld*

Hadamard

113 Théorème fondamental

…..

2ème cas : les points A, B, C, D sont quelconques.Nous allons démontrer que les valeurs à 1/n près des deux rapports $\frac{CD}{AB}$ et $\frac{C'D'}{A'B'}$ sont égales, quel que soit n.

Soit, par exemple, $n=5$: divisons AB en cinq parties égales aux points 1, 2, 3, 4 et supposons que la cinquième partie de AB soit contenue deux fois mais non trois dans CD : soient I, II, III les extrémités de trois segments égaux au cinquième de AB et portés successivement sur la droite CB à partir du point C ; de sorte que les points I et II sont entre C et D (le dernier pouvant toutefois coïncider avec C), le point III au-delà du point D. par tous ces points 1, 2, 3, 4, I, II, III, menons des parallèles à la direction commune des droites AA', BB', CC', DD', jusqu'à rencontre en 1', 2', 3', 4', I', II', III', avec la droite A'B'C'D'. Nous avons ainsi divisé A'B' en cinq parties égales et porté trois fois l'une de ces parties à partir du point C' dans la direction C'D' (1°). Les points I', II' étant dans l'intervalle C'D' et le point III' au-delà du point D' (d'après la remarque faite tout d'abord) et théorème est démontré.

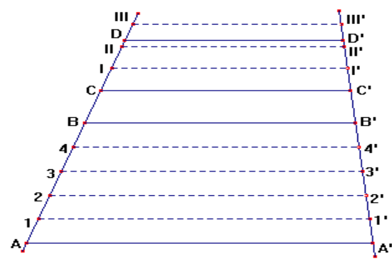

***Figure 7**- Enoncé de*