Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA DIFFICILE GENÈSE DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE: RUPTURES ET OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Slimane HASSAYOUNE[*]– Rahim KOUKI[**]

Résumé : Cet article rapporte les résultats d'une étude portant sur la genèse historique et la nature épistémologique de l'algèbre élémentaire (objet d'enseignement au niveau de la première année secondaire en Tunisie). Nous y décrivons particulièrement l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, syntaxique et sémiotique.

Les principaux points dégagés montrent que la construction des concepts algébriques se réalise en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale ainsi qu'avec la mobilisation des techniques opératoires. Ceci nous ouvre de nouvelles perspectives de recherche orientées vers l'approfondissement des faits établis et leur exploitation dans une perspective d'ingénierie didactique.

Mots-clés : Algèbre élémentaire - épistémologie - histoire des mathématiques - praxéologie algébrique - champ conceptuel - champ sémiotique - champ syntaxique.

Abstract: This article reports the results of a study concerning the historical genesis and epistemological nature of elementary algebra (taught at the beginning of the secondary school in Tunisia). We particularly describe the diachronic evolution of algebraic praxeologies in the three conceptual, syntactic and semiotic fields.

The main points reached show that the construction of algebraic concepts is closely related to their procedural functionality and operative technics.

This may open new prospects for research oriented toward the deepening of established facts and their exploitation in a perspective of engineering didactics.

Keywords: Elementary algebra - epistemology - mathematics history - algebraic praxeology, conceptual field, syntactic field, semiotic field.

I. INTRODUCTION

L'objet de cet article s'inscrit dans la lignée des investigations qui cherchent à fournir des éclairages sur la nature des praxéologies algébriques visées par les programmes scolaires. Pour ce faire, nous envisageons de mener une analyse épistémologique relative à ces praxéologies en explorant particulièrement les principales phases historiques de leur émergence en tant que manifestations d'un savoir savant et de pratiques sociales de référence.

L'algèbre élémentaire telle qu'elle est enseignée au deuxième cycle de l'enseignement de base (12-14 ans) et au début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans) se manifeste à travers deux principaux champs praxéologiques :

[*]Slimane Hassayoune, Université de Tunis – Tunisie – slimhass@gmail.com
[**] Rahim Kouki, Université de Tunis El Manar – Tunisie – rahim.kouki@ipeim.rnu.tn

Hassayoune S., Kouki R. (2015) La difficile genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 386-402.

- Le calcul algébrique : Manipulation d'expressions numériques et littérales (développement, réduction, factorisation, etc.)
- La résolution de situations-problèmes : Analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, contrôle des solutions.

De nombreuses études menées en Tunisie (Kouki 2004; Ben Nejma 2006; Achour 2005) ont montré que l'enseignement/apprentissage de l'algèbre élémentaire pose des problèmes cruciaux notamment aux niveaux :

- des compétences à développer chez les élèves,
- des choix didactiques à adopter dans les activités d'enseignement/apprentissage et
- de la complexité de son système sémiotique.

Nous allons nous intéresser effectivement à ces problématiques en revenant aux sources et en focalisant sur l'aspect épistémologique de l'algèbre élémentaire. Nous délimiterons les contours du domaine de cet objet de savoir en procédant à une analyse historique et épistémologique de son évolution à travers le temps. Ainsi les époques babylonienne, grecque, arabe et occidentale du XVI^{e} seront tour à tour explorées.

II. GENÈSE DE L'ALGÈBRE

Qu'est-ce que l'algèbre ? Quelle est son origine ? Quel est son rapport avec l'arithmétique ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ? La réponse à ces questions doit tenir compte des phénomènes accompagnant l'évolution et le développement des théories mathématiques sous-jacentes ou mises en jeu et des obstacles rencontrés, et de la manière dont ils ont été franchis.

Le mot « algèbre » provient du terme arabe « al-jabr », qui signifie en médecine « réparation ou restauration d'une fracture ». Il a été utilisé, en mathématiques, dans « Al-kitâb al-mukhtasar f'il jabr w'al-muqâbala »[1], un important ouvrage écrit au début du IX^{e} siècle par Mohammad Ibn Mûssa Al-Khwârizmî (780-850). Dans ce traité, l'expression arabe « al-jabr » désigne l'opération qu'on fait subir à l'équation du second degré pour en supprimer les termes négatifs, alors que « al-muqâbala » signifie la réduction de termes de même degré dans une équation quadratique. Par la suite, le domaine de la résolution des problèmes en utilisant les méthodes décrites par Al-Khwârizmî, fut désigné par le terme unique « al-jabr ». À partir du IX^{e} siècle, l'algèbre devient progressivement, l'art de réduire et de résoudre les équations, puis la science des expressions algébriques et enfin l'art de résoudre des problèmes. Cette nouvelle science simplifie et unifie les techniques anciennes de résolution des problèmes posés par la vie quotidienne des gens sédentarisés et vivant en société. Il apparaît donc que les problèmes de la vie courante sont les vraies origines de cet art et des techniques opératoires que celui-ci engendre dans son développement. Par exemple, Al-Khwârizmî indique que l'utilité de l'algèbre réside essentiellement dans la résolution des problèmes d'héritage, de partition, de construction de canaux d'irrigation, etc.

Les Mésopotamiens, les Égyptiens, les Grecs et les Indiens ont résolu des problèmes à l'aide de procédures constituées d'enchainements d'opérations numériques et sous la forme de listes d'instructions appliquées à des cas particuliers.

Dans ces calculs, ils ne font aucune référence à une quelconque inconnue ni, d'ailleurs, à quelque justification théorique que ce soit. Seul Diophante d'Alexandrie (III^{e} siècle) introduit un symbole qu'il appelle « arithme » (quantité indéterminée d'unités) et fait subir à ce signe

[1] Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison.

les opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division, inverse). Il représente, également, par des signes particuliers le carré de l'arithme, son cube, ses puissances quatrième, cinquième et sixième, par d'autres signes.

Après avoir pris connaissance de la traduction arabe du traité d'arithmétique de Diophante, Al-Karâjî (953-1029) utilise les concepts et lexiques algébriques (shay, mâl et kaab) créés par Al-Khwârizmî pour appliquer l'arithmétique aux expressions algébriques et résoudre les problèmes à l'aide de l'algèbre de Diophante. Al-Karâjî et son disciple Al-Samaw'al (1130-1175) introduisent les polynômes sous la forme de tableaux et explicitent les opérations usuelles sur ces tableaux.

Abdeljaouad (2002) précise que, parallèlement aux mathématiciens d'Orient, ceux du Maroc, comme Al-Hassâr (vivant en 1175) et Ibn Al-Yâssamîn (m. 1204) ont imaginé un système condensé pour représenter les équations et les termes standards utilisés en algèbre :

> La multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne, nous confirme dans l'hypothèse d'une origine maghrébine des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme chapitre complémentaire aux traités de hisâb al-ghubâr. (Abdeljaoued 2002, p22)

Ce symbolisme algébrique permet de représenter le nombre connu ('adad) : عـ l'inconnue (shay) : شـ, son carré (mâl) : مـ, son cube (kaab) : كـ, la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) : مـمـ et les termes : égal (ya'dilû) : لـ, soustraction (illa) : لا comme le montrent les fac-similés suivants :

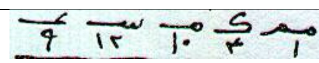
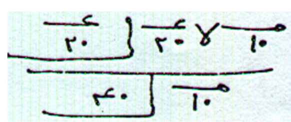
(Abdeljaouad, 2002, (26b), p26)		$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
(Abdeljaouad, 2002, (63b), p26)		$10x^2 - 20 = 20$ $\longrightarrow 10x^2 = 40.$

***Tableau 1 -** Les fac-similés* (Abdeljaoued 2002)

Dans son traité « Art analytique ou Algèbre nouvelle », Viète (1540-1603) introduit une véritable algèbre littérale, avec ses symboles, ses procédés calculatoires, ses transformations particulières et sa méthode spécifique (Boyé, 2003). Poursuivant l'élan donné par Viète, Descartes propose une méthode d'algébrisation de la géométrie, dans l'ouvrage intitulé « La Géométrie » et publié en 1637, il annonce :

> Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des géomètres se réduit à un même genre de problèmes qui est de rechercher la valeur des racines de quelque équation. (Cité in Guichard 2000, p. 48)

Et il précise plus loin qu'il veut que sa méthode soit universelle pour :

> Résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète. (Ibid.)

Au XIX[e] siècle, les algébristes anglais comme Boole ou Morgan, envisagent une algèbre beaucoup plus abstraite où les lettres peuvent représenter des objets quelconques. L'algèbre se métamorphose en une nouvelle science : L'algèbre des structures (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, algèbres, quaternions, etc.). Cette algèbre va constituer un nouveau domaine appelé à structurer et unifier des secteurs divers de l'activité mathématique.

À la lumière de ce qui précède, il apparaît que le véritable essor de l'algèbre est amorcé lorsque la substitution des écritures formelles aux écritures verbales est devenue possible.

Mais pour arriver à cette étape décisive de son évolution, l'algèbre s'est plusieurs fois métamorphosée par une lente abstraction de ses objets d'étude : mesure de grandeurs, calcul sur des nombres abstraits et finalement manipulation d'écritures formelles avec des lettres désignant d'abord des nombres et ultérieurement toutes sortes d'objets. Nous envisageons dans ce qui suit d'analyser les caractéristiques de cette évolution en prenant en compte les trois champs épistémologiques qui se sont construits progressivement au cours de l'histoire : Le champ conceptuel, le champ syntaxique et le champ sémiotique.

Conformément au cadre théorique de notre recherche -la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992)- la variable observée tout au long de cette analyse est la praxéologie algébrique mobilisée.

III. ÉTUDE DIACHRONIQUE DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Dans cette partie, nous menons une étude diachronique de la diffusion de l'algèbre élémentaire et nous faisons l'hypothèse que la connaissance des phénomènes s'y rapportant nous permet de mettre à profit la dialectique phylogenèse-ontogenèse et de tirer les meilleurs enseignements possibles sur les conditions et les contraintes pesant sur cette diffusion.

1. La phase mésopotamienne de l'évolution des praxéologies algébriques

Les savoirs mathématiques mésopotamiens sont essentiellement produits au cours de la période paléo-babylonienne, pendant les quatre premiers siècles du deuxième millénaire avant notre ère. Ces savoirs sont élaborés dans le contexte des écoles de scribes en vue de préparer ces derniers aux fonctions d'administrateur, de gestionnaire, de juriste ou d'écrivain public. Les buts poursuivis, divers et variables, ne semblent pas tous répondre à des besoins pratiques et certains d'entre eux présentent un caractère purement spéculatif. Néanmoins, les problèmes traités sont souvent présentés sous un habillage concret, reflétant les pratiques sociales de l'époque et portant sur les thèmes de l'arpentage, des constructions en briques, des travaux d'ingénierie, d'héritage, de calcul de taux d'intérêt, etc.

Dans les écoles de NIPPUR (grande capitale culturelle de la Mésopotamie), les apprentis scribes apprennent les mathématiques en résolvant des problèmes et en faisant usage des tables numériques (carrés, cubes, inverses, etc.) et des tables métrologiques qui leur servent d'outil de conversion des mesures de longueurs, d'aires, de capacités et de poids en nombres sexagésimaux positionnels et vice versa (Proust C., 2006). Les exercices de calcul font intervenir exclusivement des nombres abstraits sans aucune unité et sont toujours appuyés sur des tables numériques rappelées (dans un coin des tablettes scolaires) ou carrément mémorisées. Les historiens ont constaté que les scribes babyloniens dissocient déjà deux fonctions des nombres, à savoir la quantification (mesure) des grandeurs et le calcul ; pour la première, ils utilisent la notation métrologique et pour la seconde, la notation sexagésimale positionnelle. Ce fait est certainement dû aux différences de notations adoptées alors dans les deux contextes, contrairement à la situation d'aujourd'hui se caractérisant par l'isomorphisme des deux systèmes métrique international et décimal. Et si, par ailleurs, la résolution des problèmes nécessite des allers-retours incessants entre mesures et nombres abstraits, cela n'a pas empêché que des algorithmes de calcul généralisables se sont développés de façon autonome et hors de tout contexte métrologique, ce qui fait apparaitre l'appréhension du sens du nombre par les Babyloniens et leur maîtrise des premières techniques algébriques.

Ainsi, les praxéologies mobilisées au cours de cette période sont essentiellement algorithmiques sous-tendues par des types de tâches calculatoires stéréotypés appelant la mobilisation de techniques mécaniques calquées sur des exemples génériques. Tout se fait par imitation et application à la lettre des procédures arrêtées sans aucune démonstration ni justification, preuve d'une absence complète d'une quelconque technologie ou théorie sous-jacente.

En effet, les problèmes du second degré résolus par les Babyloniens prennent la forme de listes de procédures de calcul numérique. Høyrup[2] (2002) considère que ce ne sont pas de pures recettes découvertes par hasard et que les solutions sont guidées par des raisonnements géométriques, développés plus tard par les mathématiciens grecs et arabes. Toutefois, aucune conceptualisation n'est entamée au cours de cette période et seules *des connaissances-en-acte* (Vergnaud, 1990) sont mobilisées pour répondre aux besoins sociaux.

Le champ syntaxique et algorithmique commence à se faire jour numériquement et sans aucune ostension formelle. L'exemple suivant, relevé de la tablette BM 13901[3], est susceptible de nous éclairer davantage sur la nature des algorithmes numériques utilisés par les Babyloniens pour résoudre des équations quadratiques :

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, et c'était 45' »

Ce problème porte sur la résolution d'une équation du second degré[4]. Si on note x le côté ducarré, le problème à résoudre peut être modélisé, en algèbre moderne, par l'équation[5] :

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Høyrup(2002) traduit l'énoncé et la solution de ce problème comme suit :

« J'ai joint la surface et le côté de mon carré, C'est 45'.

1, tu poseras.

La moitié de 1 tu couperas : 30' $\quad \frac{1}{2} = \frac{30}{60} \to 30'$

Tu croiseras 30' et 30' : 15' $\quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} \to 15'$

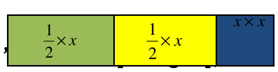
15' et 45' tu accoleras : 1 $\quad 15' + 45' = 60' \to 1$

1 a pour côté 1 $\quad \sqrt{1} = 1 \to 1$

Le 30' que tu as croisé, du cœur de 1 tu arracheras : 30' est le côté du carré.

$1 - 30' = 1 - \frac{30}{60} = \frac{30}{60} \to 30'$ »

Høyrup laisse ainsi entendre, par cette traduction, une probable assise géométrique ayant guidé les babyloniens dans leurs raisonnements sous-tendant l'algorithme de résolution. En voici une possible illustration (un carré de côté x, deux rectangles isométriques de dimensions



[2] Cité in : EducMath, *Institut Français de l'*
Disponible sur < http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/lecture/repertoire/hoyrup> (consulté juillet-Août 2014).

[3] Conservée au British Museum, cette tablette remonte à l'époque paléo-babylonienne et constitue l'un des plus anciens et des plus importants textes mathématiques portant sur la résolution des problèmes du second degré.

[4] Conformément à la tradition mésopotamienne, le nombre inconnu cherché est appelé le *côté du carré*, et le carré de ce nombre l'aire *du carré*. Mais le scribe n'hésite pas à ajouter un *côté* à une *aire* au mépris de l'homogénéité des grandeurs, ce qui a conduit certains historiens des mathématiques à parler d'algèbre mésopotamienne et d'équations, et à considérer que les Babyloniens manipulent des « nombres abstraits » et non simplement des grandeurs comme leurs contemporains Égyptiens ou leurs successeurs Grecs.

[5] Il est à noter que, dans le système sexagésimal babylonien, 20 et 1/3 sont notés de la même façon, de même que 45 et 3/4 et, plus généralement, tout nombre *a* est considéré comme *a*, *a*×60 ou *a*/60 selon le contexte.

½ et x assemblés de deux manières dans deux configurations différentes et un carré de côté ½):

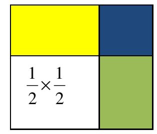


Figure 1 - *L'interprétation géométrique d'Høyrup* (2002)

2. *Contribution des méthodes euclidiennes à l'évolution des praxéologies algébriques*

Deux influences majeures des techniques mathématiques grecques sur les procédures «arithmético-algébriques» pratiquées dans les civilisations antérieures peuvent être relevées : La première a trait au recours aux raisonnements rigoureux prônés par l'école grecque, raisonnements nécessitant des démonstrations convaincantes pour toute affirmation mathématique et réfutant toute généralisation abusive, et la seconde porte sur l'usage des illustrations géométriques pour étayer les propriétés numériques, malgré la limite de sa portée.

Dans les Éléments d'Euclide, il est souvent question de construire géométriquement des grandeurs qui peuvent être interprétées comme des solutions d'équations. Mais le but n'est pas à proprement parler de résoudre des équations, bien que les transformations d'aires envisagées soient équivalentes à des manipulations d'expressions algébriques.

Les Grecs utilisent principalement ce qu'on appelle l'algèbre géométrique pour établir des propriétés algébriques comme les identités remarquables et la résolution d'équations du second degré. Les livres II et VI des Éléments illustrent bien cette méthode qui donne des preuves simples de certains résultats et développe une prise de conscience intuitive des aspects algébriques fort abstraits.

Les praxéologies ainsi développées sont donc essentiellement fondées sur des types de tâches de calcul de grandeurs géométriques nécessitant la mobilisation de techniques de transformations d'aires justifiées par des blocs technologico-théoriques relatifs à la géométrie euclidienne et à la mesure des grandeurs.

Les énoncés des Éléments se rapportent essentiellement aux mesures des grandeurs géométriques, mais ils se prêtent à une interprétation algébrique éclairant la démarche suivie par Euclide tout en étant étrangère à la conception mathématique de l'époque.

Nous décrivons, à titre d'exemples quelques propositions du livre II des *Éléments* (Peyrard, 1819) :

-Les propositions 1 à 3 illustrent géométriquement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Elles s'énoncent par le fait que des rectangles de même hauteur, disposés côte à côte, forment un rectangle dont l'aire est la somme des aires de ces rectangles. Ce fait est illustré par la configuration géométrique suivante :

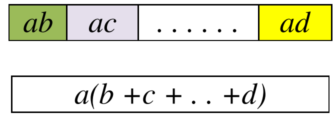


Figure 2 - *Interprétation géométrique de la proposition 3, livre II des Éléments*

Et traduit aujourd'hui algébriquement par la formule :

$$a(b+c+...+d)=ab+ac+...+ad$$

-La proposition 4 démontre géométriquement que, si une droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments. L'illustration géométrique support à cette démonstration est la suivante :

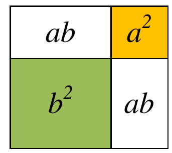


Figure 3 *- Interprétation géométrique de la proposition 4 du livre II des Éléments*

On reconnaît l'identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

-La proposition 11 illustre un problème du second degré. Euclide y expose comment « *couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments soit égal au carré du segment restant* ». Algébriquement, cela revient à résoudre l'équation :

$$ax = (a-x)^2$$

Euclide propose la construction suivante :

* Soit [DB] le segment donné. Il s'agit de construire à la règle et au compas le point F de ce segment de façon que le rectangle compris sous [DB] et [DF] soit égal au carré de [FB].

* Sur [DB] on construit le carré ABDE.
* Soit I le milieu de [AB].
* Construire sur [IB) le point C tel que ID=IC.
* Construire le carré BCHF comme indiqué sur la figure ci-jointe.
* Le point F répond à la question.

La justification donnée est basée sur la proposition (6, II) des Éléments et le théorème de Pythagore :

$AC.CB + IB^2 = IC^2$ (Prop 6, II)

Or : $IC^2 - IB^2 + DB^2$ (Pythagore)

Donc : $AC.CB = DB^2$

d'où : aire$(ACHK)$=aire$(ABDE)$

et alors : aire $(BCHF)$=aire$(KFDE)$

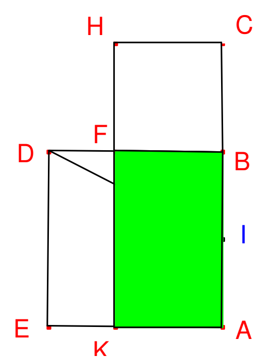


Figure 4 *- Interprétation géométrique de la proposition 11 du livre II des Éléments*

Cette dernière écriture est équivalente à : $BD.DF = (BD - DF)^2$ ou $ax=(a\text{-}x)^2$ où l'on a posé $a=DB$ *et* $DF=x$.

Pour justifier sa procédure de construction, il est vrai qu'Euclide est amené à manipuler des nombres et des opérations sur ces nombres. Toutefois, ceux-ci sont intimement liés à des concepts géométriques, et les techniques de calcul utilisées restent peu développées et fondamentalement rhétoriques.

Le champ conceptuel, déjà bien installé en géométrie grâce aux apports théoriques des *Éléments*, contient implicitement les concepts algébriques qui ne seront découverts que douze siècles plus tard par les mathématiciens arabes par un changement de cadre, amorcé par Al-Khwârizmî.

Le champ syntaxique évolue parallèlement aux progrès réalisés dans le domaine du langage courant. Dans cette *algèbre rhétorique*, ni les opérations ni les inconnues ne sont représentées par des symboles, tout est écrit et communiqué verbalement en langue naturelle. Le champ sémiotique est fortement caractérisé par les figures géométriques accompagnant les preuves géométriques ainsi que par leurs dénominations lexicales et symboliques.

3. Apports de Diophante au développement des praxéologies algébriques

Grâce à sa méthode analytique, Diophante invente une théorie arithmétique nouvelle, considérée comme une *algèbre présymbolique*.

Sa méthode repose sur l'introduction d'une inconnue opérationnelle « arithme », notée ς, (Radford 1991), soigneusement reliée aux inconnues du problème et soumise aux mêmes traitements opérationnels que celles-ci. Cette façon de procéder favorise un changement conceptuel dans les activités de résolution de problèmes. Le langage construit par la symbolisation de l'*arithme* et des diverses catégories de nombres, conjuguée à une syntaxe convenable, a permis à Diophante de traduire les problèmes posés à l'aide d'expressions algébriques se prêtant au calcul formel sur *les espèces*[6] et qui aboutissent à des équations réduites donnant la valeur de l'inconnue opérationnelle et, par suite, celles des inconnues cherchées.

Les deux champs syntaxique et sémiotique se trouvent donc sensiblement enrichis, permettant ainsi une évolution importante des processus algébriques déployés.

Sur le plan sémiotique, Diophante réalise une avancée de taille en introduisant un symbolisme assez adéquat à une nouvelle classification des nombres par rapport à l'école pythagoricienne. Ainsi, ses « désignations abrégées » : Δ^{γ} pour les carrés, K^{γ} pour les cubes, $\Delta^{\gamma}\Delta$ pour les bicarrés, ΔK^{γ} pour les carrés-cubes et $K^{\gamma}K$ pour les cobo-cubes ont permis des manipulations aisées des *arithmes* lors des processus de résolution des problèmes. Par exemple, pour écrire l'expression $2\varsigma^3+\varsigma^2-5\varsigma+4$ où ς désigne l'*arithme*, il utilise les symboles précédents et place les coefficients à droite de chaque puissance de ς, M sépare la partie variable de la partie constante et le symbole ⩚ exprimant une différence. Il obtient alors l'expression :

$$K^{\gamma}\beta\, \Delta^{\gamma}\alpha\, M\delta \;⩚\; \varsigma\varepsilon$$

Procédant de la sorte, il est donc en mesure de traduire en écriture abrégée les relations liant *l'arithme* aux données du problème et ouvre ainsi la voie à l'émergence d'une syntaxe spéciale facilitant un calcul formel en vue d'isoler l'inconnue et fournir la solution du problème proposé.

Toutefois, malgré sa relative efficacité, cette méthode présymbolique reste encore d'envergure limitée car elle ne se prête qu'à la mise en jeu pratique d'une seule variable. On pourrait faire l'hypothèse que Diophante était conscient de cette difficulté ce qui l'a amené à

[6] Monômes faisant intervenir les « arithme »

adopter une méthode se basant sur la recherche d'une seule inconnue (permettant, le cas échéant, de calculer les autres) : *l'inconnue opérationnelle* qu'est l'*arithme*.

Les praxéologies algébriques mobilisées sont articulées autour des types de tâches de résolution de problèmes nécessitant pour leur réalisation des techniques de modélisation à l'aide des inconnues opérationnelles et de manipulations d'écritures formelles sur les *arithme*s. Des éléments technologiques transparaissent implicitement dans la démarche diophantienne de calcul sur les espèces mais sans aucun support théorique notable.

Diophante introduit une méthode générale pour chaque type de tâches, qu'il expose sur un exemple générique (au sens de Balacheff), comme le montre l'exemple suivant (énoncé et solution du problème 27, Livre I, tels que traduits par Ver Eecke[7]) :

> « Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés »

Diophante procède par le traitement d'un exemple générique en choisissant des paramètres convenables (il cherche deux nombres a et b de somme 20 et de produit 96) :

> « Proposons que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités. »

Il choisit une inconnue opérationnelle :

> « Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes » : $(a – b = 2x)$

Il applique la première condition à savoir que la somme des nombres cherchés est 20, ce qui lui permet d'exprimer les nombres cherchés en fonction de l'arithme.

> « Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes »

Il trouve : $a = 10 + x$ et $b = 10 – x$:

Il applique maintenant la deuxième condition à savoir que le produit des deux nombres est égal à 96 :

> « Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités »

Il applique l'identité algébrique : $(10 + x)(10 – x) = 100 – x^2$ et obtient $100 – x^2 = 96$:

> « Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, »

Il réduit l'équation obtenue et la résout. Il trouve $x^2 = 4$ et en-déduit $x = 2$.

> « et l'arithme devient 2 unités ».

En remplaçant x par sa valeur, il obtient la solution du problème.

> « En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités».

Diophante n'oublie pas de vérifier que les nombres trouvés satisfont bien aux conditions du départ en disant:

> « et ces nombres satisfont la proposition ».

Cette technique de résolution diophantienne illustre la phase *syncopée* de l'histoire de l'algèbre. L'introduction et l'usage d'une lettre pour représenter une quantité inconnue permettent de résoudre des équations à une ou plusieurs inconnues. Mais les données des problèmes posés sont systématiquement remplacées par des nombres soigneusement choisis par Diophante et leur symbolisation par des lettres n'est pas encore amorcée.

---

[7] Cité in Radford, 1991, p. 4

L'invention de cet artifice heuristique -qu'est l'*arithme*- par Diophante, dénote une ouverture d'esprit et une maturité intellectuelle digne du courant novateur de *l'algèbre présymbolique* par rapport au courant « algébrique-géométrique » euclidien.

4. La période arabo-islamique : Naissance de l'algèbre des équations

Al-Khwârizmî (780-850) a le mérite de systématiser l'étude des équations de degré inférieur ou égal à deux et de la théoriser. On trouve dans son traité[8] :

- Une classification des équations quadratiques claire, logique et bien adaptée aux méthodes de résolution préconisées.
- Des techniques efficaces (*al-jabr*, *al-muqabala* et *al-hatt*) permettant de ramener toute équation à l'une des catégories annoncées dans sa typologie, ce qui favorise et donne du sens aux manipulations algébriques effectuées.
- Un algorithme de résolution étayé par des exemples numériques génériques et des justifications géométriques pour chaque catégorie d'équation.

Al-Khwârizmî distingue six types d'équations de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients positifs :

- Trois équations simples : $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$ *et* $bx = c$.
- Trois équations combinées : $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ *et* $ax^2 = bx + c$.

Ces équations sont toutes exprimées en phrases, l'usage des symboles numériques et littéraux étant inconnu à cette époque.

Nous voyons là une construction systémique du concept d'équation ainsi qu'une extension notable du champ cognitif lié aux praxéologies algébriques. Celles-ci sont toujours de nature algorithmique et visent la réalisation de tâches de résolution de problèmes, via des techniques de modélisation verbale et des procédures numériques appliquées sur des exemples génériques.

Le bloc technologico-théorique justifiant ces techniques de résolution est essentiellement constitué par les savoirs géométriques de l'époque, notamment ceux qui ont trait à la transformation et à la conversion des aires planes.

Pour expliquer ses méthodes et ses procédures de résolution, Al-Khwârizmî explicite pour chaque type un ou plusieurs exemples numériques. L'exemple suivant permet de suivre la procédure de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

> Les carrés plus les racines égalent un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré plus dix racines sont égaux à trente neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un carré quelconque une quantité égale à dix racines, le tout sera trente neuf.

La solution d'Al-Khwârizmî est la suivante :

> Partage en deux moitiés le nombre des racines, il vient dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même, on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois qui est la racine de carré que tu veux, et le carré est neuf.

Al-Khwârizmî s'appuie donc sur un exemple générique pour établir un algorithme de résolution des équations du type $x^2 + bx = c$ où b et c sont des nombres positifs donnés. Son algorithme de résolution est le suivant :

---

[8] Considéré comme un ouvrage de référence, ce traité est intitulé : *Al-kitab al-mokhtasar fi hisab al-jabr wal muqabala* (livre concis du calcul par les procédés de la restauration et de la réduction) et rédigé vers 825.

1. Prends la moitié du nombre des racines : 5
2. Multiplie ce nombre par lui-même : 25
3. Ajoute 39 au résultat : 64
4. Prends la racine de 64 : 8
5. De 8, soustrais la moitié du nombre des racines : 3
6. La racine est 3 et son carré est 9

Il propose une justification géométrique, dans laquelle il représente le nombre inconnu par une longueur géométrique : Partant du fait que le produit de deux nombres est représenté par l'aire d'un rectangle et le carré d'un nombre par l'aire d'un carré, il s'appuie sur la figure géométrique ci-contre, où la longueur AB désigne le nombre inconnu, pour justifier son algorithme de résolution (Abgral Ph., 2011-2012).

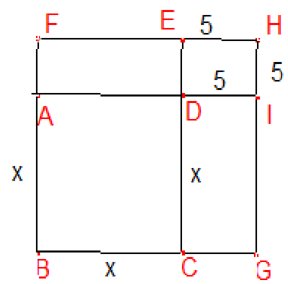


Figure 5 *- Interprétation géométrique de l'algorithme de résolution de l'équation* $x^2 + 10x = 39$ *par Al-Khwârizmî*

ABCD désigne un carré de côté AB, ADEF un rectangle de dimensions 5 et AB et donc d'aire 5.AB, DCGI un rectangle de dimensions 5 et AB et donc d'aire 5.AB, le carré EDIH de côté 5 est donc d'aire 25. En écrivant l'aire du carré FBGH de deux manières (Aire d'un carré de côté (AB + 5) et somme des aires de deux carrés de côtés respectivement AB et 5 et de deux rectangles isométriques de dimensions AB et 5) On obtient :

$(AB + 5)^2 \quad = AB^2 + 5.AB + 5.AB + 25$

$= AB^2 + 10.AB + 25$

$= 39 + 25$, car $AB^2 + 10.AB = 39$, d'après l'équation (E)

$= 64 = 8^2$ *d'où* $AB+5=8$ *et* $AB=3$

Sans citer Euclide, qu'il ne semble connaître au moment où il rédige son traité d'algèbre, Al-Khwârizmî a su exploiter les résultats géométriques, déjà connus des Babyloniens et en vigueur chez les artisans géomètres de son époque. Il a ainsi pu justifier tous les algorithmes de résolution des équations étudiées par des méthodes géométriques. Il inaugure un nouveau domaine mathématique (*l'algèbre des équations*) dans lequel vont s'engager les futurs mathématiciens arabes (Abù Kâmil, Al-Khayyâam, Ibn Qurrâ, Al-Karâjî, etc.) et italiens (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli et al.) d'abord en usant du langage courant, ensuite avec l'utilisation des lettres désignant les inconnues.

Abù Kâmil (850-930) rédige un traité qu'il intitule *Kitab al-jabr wa'l mùqabalà* dans lequel il expose les principale règles de l'algèbre d'Al-Khwârizmî et propose outre les problèmes types du second degré[9] de l'époque, d'autres problèmes présentés sous forme rhétorique et sans aucun symbole. Il en donne les algorithmes de résolution et les justificatifs géométriques en se basant sur les résultats des *Éléments d'Euclide.* Ainsi, il applique la proposition 6 du livre II des *Éléments* pour fournir une argumentation géométrique de la résolution de l'équation $x^2+10x=39$. En voici, ci-dessous la configuration géométrique sur laquelle est basée sa démonstration :

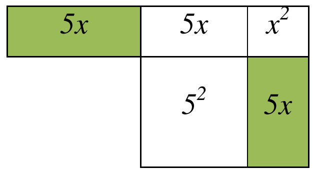


Figure 6 *- Interprétation géométrique de la résolution de l'équation* $x^2 + 10x = 39$ *par Abù Kâmil*

Abù Kâmil a donc eu le mérite d'intégrer l'ancienne tradition grecque avec les nouvelles trouvailles algébriques amorcées par Al-khwârizmî. Ceci n'a pas manqué de relancer les investigations portant sur la résolution d'équations algébriques de degrés supérieurs, les techniques du calcul algébrique sur les monômes et les binômes, les règles de calcul sur les radicaux etc.

Sur le plan syntaxique, le langage ordinaire reste de rigueur et, malgré l'introduction des symboles pour désigner l'inconnue ou ses puissances entières, il n'y a pas à proprement parler de manipulation d'expressions littérales où les lettres ont le statut de variable. Cependant, dans la démarche de résolution des équations, les algébristes maghrébins du XIIe siècle s'occupent de déterminer la valeur de la lettre «ش » représentant l'inconnue dénommée *shay*.

Dans cette étape de l'évolution des praxéologies algébriques, les manipulations verbales des expressions mathématiques n'étaient pas une fin en soi, mais elles étaient dictées par une nécessaire transformation des équations en vue de les résoudre, et par là, de proposer des solutions aux situations de la vie quotidienne qu'elles modélisent.

5. *La contribution de Viète à l'évolution des praxéologies algébriques*

Un des principaux avantages de la méthodologie analytique de Viète est l'obtention de formules générales et applicables à plusieurs situations, caractérisées par l'usage des paramètres littéraux, ce qui permet de conserver la trace de toutes les étapes du raisonnement et de se retrouver facilement lorsque l'on procède à un changement quelconque de ces paramètres. L'activité entreprise ne se réduit donc pas à la résolution d'un problème particulier, c'est plutôt une famille entière de situations qui se trouvent résolues par ce procédé. De plus, cette avancée dans l'évolution des praxéologies algébriques est illustrée par un processus tout à fait nouveau et efficace de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires etc.)

Viète a le mérite de développer l'algèbre en tant qu'outil au service de la résolution des problèmes, mais il montre par la même occasion qu'algèbre et résolution de problèmes (analyse ou art analytique) sont imbriquées au point de se confondre. En effet le développement de l'une favorise celui de l'autre, voire nécessite celui de l'autre, c'est la signification du titre donné à son œuvre *Introduction à l'art analytique ou algèbre nouvelle*.

[9] Ces problèmes concernent les six équations quadratiques figurant dans la typologie développée par Al-khwârimî.

En passant de *l'algèbre rhétorique* (en langage courant et sans aucun symbole) et de *l'algèbre syncopée* (en langage naturel mais avec l'usage de quelques abréviations pour désigner notamment les nombres inconnus) à *l'algèbre symbolique*, Viète réalise une rupture dans le processus du fonctionnement des praxéologies algébriques par un nouveau paradigme, ouvrant la voie à ses successeurs du XVIIe siècle, en particulier Descartes (1596-1650).

Pour illustrer cette nouvelle variante des praxéologies algébriques, nous présentons ci-dessous un exemple de résolution de problème par VIÈTE (Boyé 2003, p. 10):

Énoncé du problème 1 du livre I:

« Étant donné la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés. »

Solution de VIÈTE :

1. Il commence par symboliser les données et pose le problème en question :

   « Soit B la différence des deux côtés, et soit D leur somme. Il faut trouver les côtés. »

2. Il symbolise les inconnues et il traduit les hypothèses en les transformant ce qui lui permet d'établir des relations entre inconnues et données :

   « Soit A le côté le plus petit, donc le plus grand sera $A + B$. Pour cette raison la somme des côtés sera $2A + B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2A + B$ est égal à D. Et par antithèse, 2A sera égal à $D - B$, et tout étant divisé par deux, A sera égal à $\frac{D}{2} - \frac{B}{2}$.

   Soit E le côté le plus grand. Le plus petit sera donc $E - B$. Pour cette raison la somme des côtés sera $2E - B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2E - B$ sera égal à D, et par antithèse $2E$ sera égal à $D + B$; et tout étant divisé par 2, E sera égal à $\frac{D}{2} + \frac{B}{2}$. »

3. Il expose la solution et s'assure de sa validité :

   « Donc la différence des deux côtés et leur somme étant données, les côtés seront trouvés.

   En effet, la moitié de la somme des côtés moins la moitié de la différence est égal au côté le plus petit ; les mêmes quantités ajoutées donnent le plus grand côté. C'était la recherche à faire. »

4. Il illustre ses trouvailles en donnant un exemple numérique :

   « Soit B= 40, D=100, A fait 30 et E 70. »

Les praxéologies algébriques ainsi développées sont articulées autour de types de tâches de résolution de problèmes en mobilisant des techniques de symbolisation des inconnues et des données, de modélisation des relations entre celles-ci par des écritures algébriques formelles et de résolution d'équations paramétriques en vue d'obtenir des solutions générales. Nous passons, à ce moment de l'histoire, de l'algèbre syncopée à l'algèbre symbolique avec l'usage des abréviations (« A quadratus ou Aq» pour A^2, « A cubus ou Ac» pour A^3, « in » pour la multiplication, « aequatur » pour l'égalité, etc.) (Boyé, 2003)
Mais Viète prend garde de respecter l'homogénéité des degrés dans une égalité entre expressions littérales en complétant par les termes « solido », « plano » comme c'est le cas dans l'écriture suivante :

« A cub + B plano in A aequatur C in A quad + D solido pour : $A^3 + BA = CA^2 + D$ »

Cette précaution prise par Viète illustre son attachement à l'interprétation géométrique euclidienne et aux mesures de grandeurs manipulées dans les formules, ce qui témoigne du stade encore embryonnaire de son algèbre, mais également d'une nécessité de l'époque. Cette lourdeur dans les écritures algébriques va être levée plus tard par Descartes en montrant que l'on peut construire une longueur égale au produit de deux autres et, qu'en conséquence, tout peut être ramené à la dimension 1.

Le langage et les notations se trouvent alors simplifiés et les nouveaux outils ainsi construits favorisent la mise en place de nouveaux concepts, entre autres celui de fonction - concept initié plus tard par Euler- par le biais d'écritures des solutions générales en fonction des données, devenant respectivement variables dépendantes et variables indépendantes.

Les concepts d'équation et d'inconnue ont atteint le niveau structural en tant qu'objets autonomes sur lesquels on peut intervenir et leur appliquer des procédures de toutes sortes et le champ syntaxique se trouve alors élargi.

6. *La nouvelle rupture opérée par Descartes : L'algébrisation de la Géométrie.*

En publiant son œuvre *La Géométrie* en 1637 comme appendice au *Discours de la méthode*, Descartes (1596-1650) opère une nouvelle rupture dans le processus du développement des praxéologies algébriques. Il préconise de ramener tout problème à la résolution d'équations algébriques.

> Tout les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les constructions. (Descartes , La Géométrie, édition 1637, p.297)

Ainsi, tous les problèmes de géométrie peuvent se réduire - par l'introduction d'un segment unité- à des calculs et des manipulations algébriques. C'est là l'idée-clé de Descartes sur laquelle sera fondé l'outil de sa méthode cartésienne qu'est la *Géométrie analytique*. Avec un flair pédagogique inouï, et un effort constant de *se rendre intelligible à tout le monde,* comme il le précise, il expose sa méthode de résolution :

- Première étape : Nommer les lignes de la figure en distinguant les lignes connues et les lignes inconnues.
- Deuxième étape : Mettre le problème en équations.
- Troisième étape : Résoudre les équations trouvées.

> Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation. (*Ibid*, p.300)

La première étape, appelée *analyse des anciens,* nous rappelle un procédé déjà utilisé par les géomètres Grecs (Pappus d'Alexandrie, IV^{è} S) pour résoudre des problèmes de construction géométrique et largement exploité par Viète dans son *art analytique*.

La deuxième et troisième étape, amorcées par les mathématiciens du siècle précédent (XV^{e}) avec l'usage d'un symbolisme assez réduit, sont alors étendues, avec Descartes, à des problèmes plus complexes et plus diversifiés tout en permettant de faire intervenir plusieurs inconnues et des paramètres. Ceci a eu pour conséquence de confronter les mathématiciens de l'époque à des difficultés calculatoires de plus en plus ardues et de les amener ainsi à développer davantage les techniques et les procédés du calcul algébrique.

7. *En guise de conclusion*

Cette étude historique des praxéologies algébriques nous a permis de constater que l'algèbre babylonienne était caractérisée par des algorithmes de calcul généralisables hors contexte métrologique et par l'apparition des premières techniques algébriques fondées sur une bonne maîtrise du sens des nombres, de leurs notations métrologique et positionnelle et de leurs usages dans la résolution des problèmes scolaires (au profit des apprentis-scribes) et de la vie courante.

Les Grecs ont eu ensuite une influence spécifique sur le développement des premières procédures algébriques initiées par leurs ancêtres, grâce à la rigueur du raisonnement qu'ils ont instaurée et par l'étayage géométrique des propriétés numériques accompagnant l'essor de la géométrie euclidienne.

Plus tard, l'introduction de l'inconnue opérationnelle (*arithme*) par Diophante d'Alexandrie, a permis d'insuffler un nouvel élan au processus de résolution des problèmes algébriques en les modélisant par des écritures symboliques se prêtant au calcul formel sur les espèces.

Les mathématiciens arabes ont continué le développement des praxéologies algébriques en systématisant l'étude des équations et justifiant les algorithmes de résolution par des preuves géométriques.

Six siècles plus tard, Viète invente l'art analytique et donne à l'algèbre un nouveau statut opérationnel avec la démarche analyse-synthèse.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisé :

Le premier obstacle franchi est celui de l'écriture. Sans elle, il n'aurait pas été possible ni de communiquer ni de laisser trace de quelques œuvres que ce soient. Ensuite l'algèbre *numéreuse* prend place et se développe rendant d'importants services aux collectivités humaines qui commencent à se sédentariser et éprouver des besoins vitaux d'organisation et de gestion. Mais la complexité des problèmes rencontrés a fait que les exemples algorithmiques ont vite trouvé leur limite et demeurent insuffisants pour répondre aux nouvelles exigences de la vie économique et sociale. Un élan vers la généralisation et l'argumentation est alors exigé.

Avec l'avènement de *l'algèbre géométrique* des Grecs, une rupture eut lieu. Pour résoudre des problèmes de calcul de grandeurs, il n'est plus maintenant question d'appliquer des recettes toutes faites et de justification douteuse, mais il faut désormais démontrer la validité des propositions dans le cadre d'une axiomatique structurellement fondée sur des définitions et des postulats bien délimités.

Plus tard, *l'algèbre formelle* s'est construite progressivement au cours des deux millénaires qui suivent. Mais elle n'est apparue, à un aucun moment de sa genèse, artificielle ni accessoire, elle est dûment exigée par la nature même des problèmes posés (problèmes concrets ensuite équationnels et structurels) ainsi que par la recherche de meilleurs moyens permettant de les résoudre.

Nous résumons à présent cette étude diachronique des praxéologies algébriques en mettant en exergue les caractéristiques épistémologiques des principales phases marquant leur évolution :

La Mésopotamie (Période paléo babylonienne)	XXe siècle Av. J.C.	***Pré-algèbre algorithmique :*** *Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.*
La Grèce antique: Les Éléments d'Euclide, livre II	IIIe Av. J.C	***Pré-algèbre géométrique :*** *-Calcul de grandeurs géométriques (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations).* *-Rigueur dans les processus d'argumentation.*
Diophante d'Alexandrie	IIIe siècle Ap. J.C.	***Arithmétique présymbolique syncopée:*** *-Méthode de l'inconnue opérationnelle (l'arithme).* *-Calcul sur les espèces.*
Al-Khwârizmî	780-850	***Algèbre des équations :*** *-Procédés d'al-jabr et al-muqâbala.* *-Algorithmes de résolution justifiés géométriquement.*
Abù Kâmil **Al-Karâjî** **Al-Khâyyâm**	850-930 953-1029 1050-1123	***Arithmétisation de l'algèbre*** *Généralisation des opérations arithmétiques aux expressions monômes et aux polynômes.*
Viète	1540-1603	***Algèbre littérale (spécieuse) :*** *-Calcul algébrique abstrait.* *-Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique (analyse/synthèse).*
Descartes	1596-1650	***Algébrisation de la Géométrie***

Tableau 2*- Les principales étapes historiques de l'évolution des praxéologies algébriques*

Suite à cette analyse historico-épistémologique, il apparait que, lors de sa genèse, l'algèbre s'est progressivement constituée, au fil du temps, comme un outil et une démarche de résolution de problèmes. De façon plus précise, en suivant le parcours de la conceptualisation, de la syntaxe et de la sémiotique algébriques, des Babyloniens à Viète en passant par Euclide, Diophante et Al-Khwârizmî, nous nous rendons compte que l'algèbre a lentement évolué vers un langage formel permettant de modéliser des situations-problèmes et de les résoudre via un calcul littéral approprié ; l'étude de ses concepts, en tant qu'objets de savoir, n'est venue que plus tard. Il est donc primordial de privilégier le travail de modélisation et les dialectiques Outil/Objet (Douady 1986) et Opératoire/Prédicatif (Vergnaud 1990) tout au long du curriculum, si l'on veut gagner le pari de donner sens aux activités algébriques et de favoriser une interaction intégrative des différents domaines des mathématiques. Mais ceci présuppose une autre façon d'envisager l'enseignement/apprentissage de l'algèbre et nécessite un plus grand effort en ingénierie didactique génératrice de situations ajustées à cette fin ; c'est ce qui constitue une véritable perspective de recherche en didactique de l'algèbre.

IV. PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

Au cours de ce travail de recherche, nous nous sommes intéressés à l'origine de l'algèbre élémentaire enseignée en première année du cycle secondaire tunisien. Notre objectif était de questionner les fondements épistémologiques de cet objet de savoir afin de mieux connaître les sources des difficultés des élèves et d'être ainsi en mesure de proposer les solutions didactiques qui conviennent.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisée.

Ceci nous a révélé maintes caractéristiques épistémologiques de l'algèbre élémentaire dont nous citons ci-après les principales :

- L'algèbre est structurellement et fonctionnellement attachée aux activités de résolution de problèmes qui constituent sa véritable raison d'être et son ultime champ d'application
- Le développement des compétences algébriques nécessite la levée de l'obstacle du raisonnement arithmétique en assumant une rupture épistémologique *arithmétique-algébrique*.
- Prenant naissance dans le champ numérique, l'algèbre n'a pu s'en détacher qu'au prix d'une double transition : *procédural-structural* et *numérique- littéral.*

Nous nous demandons, enfin, si nous pouvons envisager une autre alternative curriculaire permettant de conjuguer les deux aspects conceptuel et opérationnel de l'algèbre dans une perspective dynamique et didactique et si nous pouvons faire en sorte que l'apprentissage de l'algèbre élémentaire soit une réponse pertinente à un besoin éprouvé par les apprenants, *in situ,* lorsqu'ils sont confrontés à un problème intra- ou extra-mathématique. Certaines réponses, à ces questions, pourraient faire l'objet de recherches futures.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, *Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Marrakech, 30-31 Mai et 1er Juin 2002.

Abgral Ph. (2011-2012) *Histoire des mathématiques*, Cours de Mastère M1, ISEFC, Tunis.

Achour S. (2005) *L'introduction des fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : Quelles alternatives possibles ?*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Ben Nejma S. (2006) *Étude des rapports institutionnel et personnel aux équations via la mise en équation de problèmes en première année secondaire tunisien (3è en France) : Évolution de ces rapports dans la transition collège/lycée*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Boyé A. (2003) *François Viète, inventeur de l'algèbre*. IREM, Pays de la Loire.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques* 12, 73-112.

Descartes R. (1637) *La Géométrie*, livre premier, édition 1637 publiée dans *The geometry of Rene Descartes* de David Eugene Smith et Marcia L. Latham.

Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des Mathématiques* 7(2), 5-32.

Guichard J. P. (2000) Qu'est-ce que l'algèbre ? Un domaine ou un langage ?, L'algèbre au lycée et au collège, *Publication de l'IREM de Montpellier*, p. 40-57.

Høyrup J. (2002) *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin, studies and sources in the history of mathematics and physical sciences*. Berlin & Londres, Spinger.

Kouki R. (2004) *La logique des prédicats comme cadre d'analyses didactiques : Le cas des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle au début du secondaire*, mémoire de mastère, ISEFC TUNIS.

Peyrard F. (1819) *Les œuvres d'Euclide traduites littéralement*. Paris, 1819 ; Réimpression Librairie A. Blanchard, Paris, 1993.

Proust C. (2006) Mathématiques en Mésopotamie, *Culture-Math*, ENS Ulm - DESCO, 2006.

Radford L. (1991) Diophante et l'algèbre présymbolique, *Bulletin AMQ*.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques* 10(2-3), 133-170.