Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIMENSION HISTORIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du Groupe de Travail n°4

Abdelmalek BOUZARI[*] – Evelyn BARBIN[**] – Louis CHARBONNEAU[***] – Mamadou S. SANGARÉ[****]

Notre groupe voulait mettre un accent sur la place et le rôle de l'histoire des mathématiques et de leur enseignement dans l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux d'enseignement, du primaire à l'université. Nous proposions de décliner la réflexion autour des quatre grands thèmes suivants :

1. Les apports didactiques de l'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement ;
2. Apports de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques à la didactique des mathématiques: études de cas et enjeux épistémologiques et méthodologiques ;
3. Les approches patrimoniales et ethnomathématiques de l'histoire des connaissances mathématiques à toutes les échelles (école, ville, pays ou région du monde) et leur articulation avec une pensée universelle des mathématiques;
4. L'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones : circulation et échanges.

Alors que le premier thème porte sur l'analyse didactique et épistémologique des expériences effectives d'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement, le second thème vise plutôt à susciter des échanges sur les difficultés méthodologiques rencontrées dans les recherches qui ont pour objet de mieux évaluer l'impact de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans les classes de mathématiques. Le troisième thème cherche à susciter une réflexion sur l'apport du patrimoine culturel pour plonger l'histoire des mathématiques dans les différents contextes où elle a été construite par l'humanité. Ce thème tient compte du fait que les développements, à travers les âges, des concepts mathématiques ne sont pas les fruits instantanés et miraculeux de mathématiciens, mais des tentatives de réponses à des problématiques d'une société continuellement en développement et d'un effort collectif des

[*] ENS de Kouba (Alger) – Algérie – bouzari@ens-kouba.dz
[**] Université de Nantes – France – evelyne.barbin@wanadoo.fr
[***] Université du Québec à Montréal – Canada – charbonneau.louis@uqam.ca
[****] ENS de Bamako – Mali – mamadoussangare@yahoo.fr

Bouzari A., Barbin E., Charbonneau L., Sangaré M.S. (2015) Dimension historique dans l'enseignement des mathématiques – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°4*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 370-373.

membres d’une communauté scientifique, effort fait de circulation d’idées, d’échanges, de ruptures et d’âpres controverses. L’enracinement, à travers le temps, de concepts mathématiques dans des contextes sociaux, culturels et idéologiques est une dimension à prendre en charge dans l'enseignement des mathématiques et dans la formation des enseignants. Enfin, le quatrième thème tire son intérêt du croisement de l'histoire de l'enseignement des mathématiques avec l'histoire des mathématiques et l'histoire sociale et institutionnelle. Ces dernières années, beaucoup d'études ont été proposées dans le cadre d'un pays ou d'une région, sans mettre beaucoup en avant la circulation des conceptions pédagogiques et celle des ouvrages, ainsi que les échanges entre interlocuteurs concernés. Il serait intéressant de développer cette thématique dans la zone francophone, pour laquelle la langue a pu servir de véhicule important.

Il y a eu cinq communications dans notre groupe de travail. Il va alors sans dire que les quatre thèmes n’ont pas été abordés.

Le thème sur les approches patrimoniales (3) a été abordé par Pierre Ageron qui a fait état d'une expérience qu'il a faite à Caen avec des étudiants en formation à l’enseignement des mathématiques. Celui des apports de l’histoire et de l’épistémologie des mathématiques à la didactique des Mathématiques (2) a été abordé dans trois présentations, celle de Slim Mbrabet en rapport avec le théorème de Thalès, celle de Slimane Hassayoune et Rahim Kouki qui traitait de la genèse de la pensée algébrique et aussi celle de Mounira Ighil Ameur et Rachid Bebbouchi sur l'enseignement des décimaux. Une présentation a abordé le thème de l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones (4), celle de José Indenge Y'Esambalaka sur l'évolution de la didactique des mathématiques en République démocratique du Congo.

Le thème sur les apports de l’histoire à la didactique des mathématiques (2) n’a pas été abordé par les participants.

Le groupe était composé de deux (ou trois selon la période) mathématiciens, quatre historiens des mathématiques, trois didacticiens. Les discussions ont surtout porté sur la façon dont l’histoire a été traitée dans les différentes communications. Un certain malaise s’est manifesté de la part des historiens à propos des contenus historiques présentés dans les communications plus didactiques. En effet, les éléments historiques présentés ne prennent pas toujours en compte les derniers développements en histoire des mathématiques, particulièrement dans l’histoire des mathématiques arabo-musulmanes. Cela a pour conséquence de limiter la portée de l’analyse du contenu historique par les didacticiens. Plus spécifiquement, on se limite trop à une histoire des concepts mathématiques sans prendre en compte le contexte plus large, social et culturel, dans lequel les différentes étapes de l’évolution de ces concepts prennent racine. Il ressort de nos discussions que la prise en compte de ces contextes enrichit grandement la compréhension qu’on peut avoir de l’évolution de ces concepts, particulièrement dans l’esprit où on voit l’histoire comme une source d’inspiration vers une meilleure compréhension de l’articulation et de la dynamique de l’évolution de la pensée mathématique chez les élèves. La question se pose alors de savoir comment faire en sorte que les didacticiens puissent avoir accès plus facilement aux recherches de pointe en histoire des mathématiques. Une plus grande collaboration entre didacticien et historien est nécessaire. Il faudrait que des groupes de recherches composés à la fois d’historiens et de didacticiens se forment, groupes dans lesquels les besoins des didacticiens en ce qui a trait aux informations historiques pourraient amener les historiens à eux-mêmes orienter leurs recherches vers de nouvelles avenues. Des groupes, donc, dans lesquels la dynamique de recherche irait dans les deux sens.

Un irritant s'est aussi manifesté dans le fait que les historiens ne comprenaient pas toujours la signification du vocabulaire et la portée des théories didactiques. Plusieurs ont senti qu'il se faisait une lecture de l'histoire qui cherchait à la décrire dans les termes de ces théories, sans trop se donner la liberté nécessaire pour plutôt ajuster ces théories pour respecter ce qu'enseignent les données historiques. C'est comme si les théories didactiques avaient le statut de paradigmes qu'il ne saurait être question de remettre en question. L'histoire des mathématiques se montre d'une grande richesse, surtout lorsqu'on prend en considération les contextes socioculturels dans lesquels les idées et les concepts mathématiques prennent leur source. Cette richesse s'accompagne par ailleurs d'une grande complexité. Ce qui ne veut pas dire qu'il faille renoncer à l'intégrer dans des réflexions théoriques à caractère didactique. Bien au contraire. Mais, il importe de la respecter, et d'accepter que nos efforts ne mènent qu'à des organisations conceptuelles partielles et toujours sujettes à la confrontation avec l'état de nos connaissances historiques. Par ailleurs, de tels efforts de conceptualisation et de théorisation dans une perspective didactique peuvent se révéler riches pour les historiens en orientant leur attention vers des perspectives de recherches nouvelles.

Par ailleurs, nos discussions et nos échanges sur les contextes socioculturels ont montré à répétition qu'on aurait avantage à s'intéresser davantage à l'histoire de l'enseignement des mathématiques. Que ce soit lorsqu'on discute des problèmes de langue dans le contexte de l'arabisation de l'enseignement, ou plus généralement de la diversité des langues dans un même système national d'éducation, ou encore dans l'analyse des difficultés relatives à l'enseignement des fractions, les façons anciennes ou traditionnelles de faire éclairent sous un jour particulier nos fonctionnements actuels.

En résumé, les quelques points retenus à la suite de l'ensemble de nos discussions sont donc :

1. Les références à l'histoire dans les recherches en didactique manifestent parfois un manque de connaissances quant à l'état des connaissances de pointe en histoire des mathématiques. Il importe donc de faciliter les communications régulières entre les historiens, d'une part, et les didacticiens intéressés à l'histoire pour nourrir la réflexion didactique, d'autre part. Cela est particulièrement vrai en ce qui a trait à l'histoire des mathématiques arabes, du Maghreb aussi bien que du Machrek au sens large.
2. Il importe de ne pas négliger le contexte et les raisons d'être ayant mené à la production d'une œuvre ou d'un travail mathématique.
3. La difficulté, pour les historiens, de naviguer à travers le vocabulaire de la didactique des mathématiques. Ils ont parfois l'impression que les théories didactiques devraient être sujettes à adaptation pour pouvoir servir dans le cadre d'analyses de contenus historiques.
4. L'histoire de l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux et des contextes dans lesquels s'insère cet enseignement est un outil probablement révélateur des sources de certaines difficultés rencontrées aujourd'hui. On devrait lui consacrer plus d'attention.

Notre groupe de travail a permis des avancées théoriques et des clarifications nécessaires sur la portée et la signification de ce qui est appelé « intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement » ou « introduction d'une perspective historique dans l'enseignement ». Il ne s'agit pas d'introduire des éléments épars pseudo-historiques dans l'enseignement, mais, comme il a été dit fortement dans notre groupe, de prendre en compte les avancées historiques, ainsi que le contexte plus large, humain, social et culturel, dans lequel les connaissances mathématiques ont été construites. La prise en compte de la construction historique des connaissances dans un contexte élargi permet de savoir à quels problèmes elles permettaient de répondre, quelles furent les difficultés, les ruptures et les tensions auxquelles elles ont donné lieu. Elle enrichit grandement la compréhension des enseignants sur la portée des concepts et sur la signification de leurs changements. À ce compte, l'histoire constitue bien une source de réflexion et d'inspiration vers une meilleure compréhension de la dynamique de la pensée mathématique chez les élèves. Au-delà de cette clarification, notre groupe a avancé des éléments en faveur de la mise en œuvre d'une intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement qui réponde à nos attentes. D'abord, cette intégration suppose de ne pas s'enfermer a priori dans des cadres didactiques, mais au contraire, de procéder à des échanges ouverts avec les chercheurs en didactique. Ensuite, elle nécessiterait une réflexion sur la formation des enseignants à l'histoire et à l'épistémologie des mathématiques. Enfin, elle demande de prendre en compte le contexte institutionnel de cette intégration, et de ce point de vue, l'analyse de l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans le contexte francophone apparaît comme essentielle. Ces trois éléments pourraient être pris en compte pour la continuation des travaux de l'EMF.

REFERENCES

Karp A., Schubring G. (Eds.) (2014) *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer.

Samedi 10 octobre 2015 Hôtel Hilton	**Dimanche 11 octobre 2015 Faculté des Mathématiques, CAM**	**Mardi 13 octobre 2015 Faculté des Mathématiques, CAM**
11h-11h25 : – Mots d'introduction des travaux – Modalités de travail	8h30-9h25 : Communication 2 *Les environnements mathématiques et les démonstrations du théorème de Thalès dans l'histoire.* (MRABET S.)	8h-8h55 :*La recherche en didactique des mathématiques en République Démocratique du Congo : une nouvelle voie pour l'amélioration de la qualité de l'enseignement*. (INDENGE Y'ESAMBALAKA, J. et BUAMOKE MONGA MONGBENGU, J.L.)
11h30-12h25 : Communication 1 *Engeigner l'histoire des mathématiques à l'université : de l'échelle locale aux dimensions du monde.* (AGERON P.)	9h30-10h25 : Communication 3 *La genèse de la pensée algébrique : ruptures et obstacles épistémologiques.* (HASSAYOUNE S. et KOUKI R.).	
	10h30-11h : Pause	10h-10h30 : Pause
	11h-11h55: Communication 4 *Enseignement de décimaux à l'école primaire et environnement algérien.* (IGHIL AMEUR et M.BEBBOUCHI R.)	

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNER L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES À L'UNIVERSITÉ : DE L'ÉCHELLE LOCALE AUX DIMENSIONS DU MONDE

Pierre AGERON*

Résumé – Je rends compte d'une expérience d'enseignement d'histoire des mathématiques au niveau universitaire appuyée sur l'histoire scientifique locale, notamment sur le patrimoine manuscrit conservé à la bibliothèque de Caen. J'explique comment j'ai été amené à faire varier les échelles, en passant à une approche « glocale » connectant les pratiques locales à des phénomènes macrohistoriques comme la circulation du savoir entre la Chrétienté occidentale et l'Islam.

Mots-clefs : histoire locale, Normandie, patrimoine manuscrit, circulation des savoirs, sciences arabes

Abstract – I report here on an experiment of teaching history of mathematics at university level based on local scientific history, especially on the manuscript heritage kept in Caen library. I explain how I was lead to vary scales, switching to a « glocal » approach connecting local practices to macrohistorical phenomena like knowledge circulation between Western Christendom and Islamic countries.

Keywords: local history, Normandy, manuscript heritage, knowledge circulation, Arabic sciences

I. UNE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCHELLE LOCALE

1. *Le familier et l'étrange*

Pendant trois années, j'ai fait de la dimension locale l'axe pédagogique structurant d'un enseignement d'histoire des mathématiques à l'université de Caen.

Cette expérience ne partait pas de rien. Avec des collègues de l'IREM de Basse-Normandie, dont certains avaient une longue expérience en ce domaine et d'autres se lançaient avec enthousiasme, nous avions eu l'occasion d'expliciter notre conviction qu'« il est possible et fécond d'exploiter les objets du patrimoine local dans le contexte d'un enseignement de mathématiques » (Ageron, Jenvrin & Le Goff 2009). Il s'agissait de porter un regard « oblique » sur des objets patrimoniaux du domaine artistique, notamment architectural et pictural, par une approche mathématique. Notre intuition, confortée par nombre d'expériences réussies devant des publics variés, était que la motivation résultant d'une activité mixte est supérieure à l'addition des motivations que susciteraient, par exemple, une visite guidée traditionnelle et des exercices de mathématiques conventionnels. Il n'était donc pas question pour nous d'enrober une pilule amère dans un habillage sucré, mais bien plutôt de croiser démarche humaniste et démarche scientifique, en préservant toute la rigueur propre à chacune d'elles. Nous avions insisté sur le soin à apporter au choix des sites :

* Université de Caen Normandie – France - ageron@unicaen.fr

hors des murs de l'école, mais si possible accessibles à pied, au cœur de l'environnement quotidien des élèves, néanmoins peu connus, un brin mystérieux et habituellement fermés au public. Dans de nombreux cas, ces activités sollicitaient, à un degré ou un autre, l'histoire des mathématiques.

À la rentrée 2010, j'eus à concevoir un nouvel enseignement d'histoire des mathématiques en première année de master de mathématiques (quatrième année d'université). Il devait prolonger, tout en s'en distinguant nettement, l'enseignement assez classique de cette discipline que je dispensais déjà en troisième année de licence. Saisi d'abord d'un certain vertige devant l'océan des possibles, il me sembla naturel de prolonger les réflexions et expérimentations sur le patrimoine local conduites à l'IREM. Je fis cette fois un postulat quelque peu différent : celui que les mathématiques produites, rédigées, imprimées, enseignées, discutées, utilisées dans la ville ou la région où vivent les étudiants étaient de nature à attirer leur attention, à les leur rendre proches, à faire résonner en eux des échos familiers, à les impliquer plus intensivement ou les repositionner favorablement.

Connaissant bien l'histoire de la ville de Caen, où j'exerce aussi, ponctuellement, comme guide-conférencier, je savais que nombre d'institutions, d'entreprises, de rues, de maisons, de familles subsistent, sous une forme ou sous une autre, au sein desquelles s'est écrite cette histoire scientifique locale multiforme, permettant d'en éprouver la réalité. Par ailleurs, une enquête sur les manuscrits arabes de toutes sortes conservés en Basse-Normandie (Ageron 2013) m'avait conduit à visiter les fonds patrimoniaux de plusieurs bibliothèques de la région. J'avais alors remarqué qu'on y conservait aussi un nombre important de documents mathématiques anciens, imprimés ou manuscrits, pour la plupart d'origine régionale. La variété de ces documents m'avait paru à même d'illustrer une partie importante de mon cours ou de mes travaux dirigés. Comme beaucoup d'entre eux étaient des manuels ou des cahiers d'élèves, j'escomptais aussi, devant des étudiants essentiellement destinés au professorat, interroger les méthodes et les objectifs de l'enseignement des mathématiques à différentes époques. Je voulais encore qu'ainsi formés, il puisse leur venir un jour l'idée et l'envie d'utiliser de telles ressources pour construire des activités mono- ou pluridisciplinaires devant leurs propres élèves. Quant aux spécificités du fait local, elles étaient attirantes et plutôt flatteuses : l'antique et puissante tradition savante de Caen, l'*Athenæ Normannorum*[146], « la source de tous nos plus beaux esprits » comme l'assurait Madame de Sévigné, lui permit longtemps de s'affirmer sans complexe vis-à-vis de la capitale. Bref, il me semblait possible d'évoquer, non pas seulement quelques noms de mathématiciens nés en Normandie et sans lien entre eux, mais bien l'histoire des mathématiques en Normandie.

Lorsque j'ai commencé ce cours, trois difficultés sont apparues assez vite.

La première difficulté était inhérente au choix de l'échelle locale : il impliquait de renoncer aux majestueuses avenues de la science universelle, scandées de grands noms et de découvertes décisives, pour privilégier des mathématiques vernaculaires plus ordinaires, celles de savants de second rang, de modestes professeurs, de praticiens locaux, fortement insérés dans la société de leur temps, mais ignorés des résumés d'histoire des sciences. Je n'ai pas toujours su anticiper, ou plutôt assumer pleinement, les effets de ce choix didactique : je me suis senti coupable en découvrant dans les premières copies d'examen l'importance qu'y prenaient de tels mathématiciens par rapport aux hommes célèbres dont je n'avais pas parlé, pensant les avoir suffisamment évoqués dans mon cours de licence. Bien entendu, les étudiants ne faisaient rien d'autre que me donner ce qu'ils pensaient, en toute logique, que

[146] *Athenæ Normannorum* est le titre d'un dictionnaire alphabétique des savants de Caen composé par François Martin à la fin du XVII^e siècle. Son impression, entreprise au XIX^e siècle, s'est interrompue avant l'épuisement de la lettre C; elle comptait déjà 794 pages. Au-delà, il faut consulter le manuscrit 509 de la bibliothèque de Caen.

j'attendais d'eux. Il ne s'agissait pas ici de chauvinisme normand de leur part : qui connaît les Normands sait que la modération identitaire est un élément constitutif et paradoxal de leur particularisme. Il n'est pas impossible cependant que cette formule, transposée dans d'autres régions ou d'autres pays, puisse alimenter des formes de repli ou de revendication.

La deuxième difficulté est relative à la supposée proximité des étudiants avec la ville où ils étudient : elle était souvent une illusion dont j'ai dû me départir. La Basse-Normandie est une région rurale, maillée par d'innombrables bourgs de taille modeste, où beaucoup d'étudiants s'empressent de rejoindre leur famille en fin de semaine et pour les vacances. Le cas des étudiants en sciences est le plus accentué : même après quelques années à l'université, leur « espace vécu » dans la capitale régionale se limite souvent à leur campus, situé en périphérie, à l'hypermarché qui lui fait face, et à deux micro-secteurs du centre ville, très animés le jeudi soir. Beaucoup ne savent pas grand chose de la géographie et l'histoire de la ville, de ses grands monuments, et ignorent même les noms des rues principales, puisque ceux des bars et des fast-foods suffisent pour se donner rendez-vous. En fin de compte, Caen leur est, à peu de choses près, aussi étrangère que le seraient Paris ou Alger. Le postulat de mathématiques qui leur parleraient davantage, parce qu'élaborées localement, est alors pour le moins incertain. Curieusement, c'est parfois l'inverse qui s'est produit : les mathématiques sont devenues une occasion, que certains ont saisie, de découvrir la ville de Caen et son histoire.

La troisième difficulté était la plus prévisible : l'aspiration naturelle des jeunes à dépasser leur horizon quotidien, même, et surtout, lorsque celui-ci leur est en réalité si peu connu. Pour certains, un cours sur l'histoire des mathématiques en Normandie n'a *a priori* rien de bien attirant et est presque, au contraire, une promesse d'ennui. C'est en déplaçant la focale au maximum que j'aurais eu des chances de croiser leur désir de dépaysement, d'exotisme, de découverte, d'étrangeté, d'altérité. Je le savais d'ailleurs déjà par expérience : dans le cours « classique » d'histoire des mathématiques que je propose en troisième année de licence, le chapitre qui m'assure l'enthousiasme le plus visible et unanime de mon public est celui qui l'emmène, au plus loin de son quotidien, dans la Mésopotamie antique. Le premier mystère des cunéiformes sur tablettes d'argile est leur infini pouvoir de séduction.

Il existe cependant une étrangeté du familier. C'est elle qui a permis à ce travail sur les mathématiques locales de fonctionner de façon satisfaisante : je l'ai suscitée presque sans le savoir en faisant travailler les étudiants sur des manuscrits à la bibliothèque de Caen. À l'heure où les jeunes rencontrent des difficultés à lire l'écriture manuscrite de leurs parents, où certains pays renoncent à l'enseignement de l'écriture cursive et où le livre imprimé lui-même recule devant le livre électronique, je n'avais pas réalisé à quel point le contact avec un livre entier écrit à la main représente un choc, profondément dépaysant en lui-même. S'y ajoute sans doute l'émotion, que je ressens moi-même, liée à ce qui fait le propre du manuscrit : celui d'être un objet unique. Les bibliothèques de province, fort heureusement, autorisent encore leurs lecteurs, sans discrimination, à consulter physiquement tous les manuscrits dont ils font la demande. Pour mes étudiants, j'avais établi la liste des manuscrits mathématiques recensés à la bibliothèque centrale de l'agglomération de Caen ; grâce à l'IREM, un certain nombre d'entre eux ont été numérisés pour permettre un travail approfondi. Chaque étudiant(e) devait en choisir un et prendre le temps d'aller le voir : pour certain(e)s, c'était leur première visite à la bibliothèque ; pour tous, ce fut la découverte de la salle des fonds patrimoniaux. Le travail demandé était modeste. Il consistait en général : *a)* à présenter le manuscrit dans son aspect matériel, *b)* à évoquer sommairement son contenu, *c)* à y choisir, avec mon aide, un aspect mathématique intéressant et à en présenter et commenter le traitement de manière détaillée. Le tout faisait l'objet d'une présentation orale avec vidéoprojecteur, au début de chaque séance de travaux dirigés. Les efforts consentis pour déchiffrer les écritures du XVIII^{e} siècle ou celles, souvent redoutables, du XVII^{e} siècle, ont été méritoires. Certains étudiants sont allés plus loin, dans le cadre d'un mémoire soutenu au titre du « Travail d'étude et de recherche » de première année de master. Des étudiants de seconde année de master inscrits en histoire des sciences à Nantes ont aussi soutenu sous ma direction un mémoire plus approfondi sur des manuscrits caennais. Une partie de mes propres recherches ont aussi largement bénéficié de tous ces travaux et ces échanges.

2. *Quelques manuscrits témoins de l'histoire des mathématiques en Normandie*

Les ressources offertes par la bibliothèque de Caen en matière de manuscrits mathématiques couvrent huit siècles. Elles commencent au temps où l'arithmétique positionnelle décimale devient un concurrent sérieux des chiffres romains et du calcul sur l'échiquier, version normande de l'abaque (Schärlig 2003, pp.129-145). En Normandie, le *Carmen de algorismo* [Poème sur l'algorithme] d'Alexandre de Villedieu (v.1175-1240), un enfant du pays, en fut le véhicule. Ce court texte en vers expliquait le principe de la numération en base dix et comment effectuer les sept opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, duplication, dimidiation, multiplication, division, extraction de racine. Une copie du XIII^{e} siècle en est conservée à Caen, au sein d'un recueil de textes de comput ecclésiastique : c'est le plus vieux manuscrit mathématique de la bibliothèque (ms.14). Le texte est mutilé de la septième partie, relative à l'extraction de la racine. Il est précédé d'une sorte de résumé en prose, qui me semble peu ou pas connu, et plus aisé à exploiter pédagogiquement ; il se termine sur deux problèmes de partage, dont celui-ci :

> *Aliquis vult scire utrum serviens eius sciat computare. Precepit ei quod de XX^{ti} denariis emat XX piscis, aliquos ex obolo, alios ex pictos, alios ex duobus denariis, ita quod neque plus neque minus sint de denariis et pictis.* Traduction : Quelqu'un veut savoir si son serviteur sait calculer. Il lui ordonne d'acheter vingt poissons à partir de vingt deniers, certains pour une obole [demi-denier], d'autres pour un picte [demi-obole], d'autre pour deux deniers, de sorte qu'il n'y ait ni plus, ni moins de vingt poissons, et de vingt deniers.

L'invention et le popularisation de l'arithmétique fractionnaire en base dix furent beaucoup plus tardives que ce qu'imaginent en général les étudiants. Parmi les manuscrits non catalogués de la bibliothèque de Caen se trouve un écrit témoignant de l'introduction des nombres décimaux en Normandie (ms. 1008). Remontant certainement au deuxième quart du XVII^{e} siècle, il s'intitule *Arithmétique de dixme pratiquée en Holande*. Il est précédé, en partie de la même main, du *Traité de la fortification holandaize* d'un certain « Monsieur du Clos » et d'une *Table de verges de Holande reduittes en toises de France*. Comme le montre son titre, l'*Arithmétique de dixme* s'inspire des principes de la brochure *De Thiende / La Disme*, « premièrement descripte en flameng et maintenant convertie en français par Simon Stevin », publiée dans ces deux langues en 1585. L'auteur écrit :

> Simon Stevin est le premier qui a mis en lumière ceste arithmetique de dixme [...] Or les Flamants ayant vu ceste facilité ont divisé leur verge en 10 parties (qui estoit autrefois en 12). Dont la 10^{me} partie s'appelle pied, & le pied en 10 parties quilz appellent pouce, & le pouce en 10 parties quilz appellent grain, & cette verge ainsi divisée, il a fallu le secours de l'arithmétique de dixme de Stevin pour les mesures de la géométrie. La pratique de ceste arithmetique n'est point si utile qu'en Hollande, & aux autres lieux elle est inutille, & pour appliquer l'arithmetique de Dixme, il faut donner des exemples de Geométrie. Car de la donner comme a faict Stevin, il n'y a poinct apparence & cette arithmétique sera Geometrie & arithmetique tout ensemble.

Pas encore de virgule à cette époque : l'auteur adopte la notation de Stevin, où chaque décimale est suivie de son rang dans un cercle, par exemple 27⓪8①4②7③ pour 27,847. Il expose la façon de procéder aux opérations arithmétiques élémentaires (désormais au nombre de cinq, duplication et dimidiation n'en faisant plus partie). Il en donne des applications géométriques : la « multiplication de dixme » est ainsi appliquée à la mesure du cercle et la « règle de troys par la dixme » à des calculs de hauteurs de tours.

Ce problème récurrent de la hauteur d'une tour nous conduit de l'arithmétique à la géométrie pratique, qui, favorisée par le développement de l'art militaire, est la grande affaire du premier XVII^e siècle. À la bibliothèque de Caen, un épais manuscrit anonyme intitulé *Traité de fabricomologie ou ergastice du point* m'intriguait (ms. 131). C'est une véritable encyclopédie de construction géométrique, où j'ai repéré de libres emprunts à des auteurs variés, notamment Dürer (*Décrire la circonférence d'une poire*) et Clavius (*D'un point donné hors le triangle, mener une ligne droite qui le divise en deux également*). Certains problèmes semblent originaux (*Diviser un cône en trois parties égales par des plans parallèles à la base*) et l'ouvrage témoigne d'une pensée personnelle profonde sur l'arithmétique des objets et les méthodes de construction. J'ai réalisé en 2011 qu'il était l'œuvre d'un certain Guillemme Le Vasseur (Dieppe, v. 1564 – Rouen, 1634), et que celui-ci fut le mathématicien le plus influent de son époque en Normandie (Ageron 2013a). Tisserand dans sa jeunesse, puis cartographe, pilote de bateau, hydrographe, architecte et ingénieur, il rédigea une série de traités de mathématiques, qu'il enseignait en privé, semble-t-il, aux gentilhommes protestants (Ageron 2016). Parmi eux, le *Traité de fabricomologie* conservé à Caen, dont deux autres manuscrits se trouvent à Paris et à New York. Mais aussi un *Traité de praticométrie*, c'est-à-dire de géométrie pratique mesurée ou nombrée, où Le Vasseur met en avant un compas appelé *gonomètre* permettant de mesurer, par exemple, des lignes ou des hauteurs inaccessible, et où il établit la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle à partir de ses côtés. Et encore un *Traité de trigonométrie*, le seul qui fut imprimé, mais sans nom d'auteur : il y montre comment trouver la profondeur maximale de la mer d'un point de la côte normande à un point de la côte anglaise, comme, selon les versions, « entre Dieppe et La Rie » ou « entre Le Havre de Grâce et Blanquef ». De ces deux derniers traités, la bibliothèque de Caen conserve (ms. 130) des versions raccourcies, copiées de la main du grand orientaliste protestant Samuel Bochart (Courtin & Guênerie 2009) : celui-ci fut certainement l'élève de Le Vasseur. Les traités de Le Vasseur sont des mines d'or pour le professeur : les figures des manuscrits séduisent, les problèmes abordés intéressent et se prêtent bien à une infinité d'approches pédagogiques, par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique.

Les hasards de l'histoire ont mené jusqu'à la Biblioteka Jagiellońska de Cracovie un petit manuscrit normand daté de 1637, intitulé *Questions mathematiques a sçavoir de geometrie et de fortification* (ms. gall. fol. 155). Son auteur, Jacques Louvel (Caen, v. 1600 - Caen, 1680), fut maître écrivain juré et professeur d'écriture et de mathématiques ès-collèges du Bois et des Arts de l'université de Caen. Son opuscule, qui semble en partie inspiré par la *Géométrie pratique* du professeur parisien Didier Henrion (1620), se distingue par la qualité et l'ornementation de sa calligraphie. Il a aussi la particularité, intéressante à exploiter pédagogiquement, de ne fournir les solutions des dix-neuf problèmes énoncés que sous forme d'une figure : on a donc des preuves visuelles, sans mots. Il est suivi, du même auteur, de la description de trois opérations d'arpentage sous le titre *De la Construction du demy-cercle et de son usage*, puis d'une compilation sans ordre de sujets attrayants relatifs à la chronologie et à la navigation, œuvre d'un certain Gilles Bellier, P.E.M. (comprendre : professeur ès-mathématiques) à Rouen, tirée entre autres des livres de l'astrologue Jean de Séville, premier titulaire de la chaire de mathématiques de l'université de Caen.

Le jésuite Georges Fournier (Caen, 1595 – La Flèche, 1652) fut élève des jésuites de Caen et la Flèche, professeur de mathématiques à la Flèche de 1628 à 1633, à Dieppe de 1633 à 1636, à Hesdin de 1639 à 1644, puis revint à Caen comme préfet des études. Ses traités de mathématiques manuscrits, autrefois conservés à la bibliothèque des jésuites de la Flèche, semblent n'avoir pas survécu. Mais plusieurs de ses ouvrages ont été imprimés, notamment son *Hydrographie*, écrite après plusieurs voyages en mer et publiée en 1643. Huit pages y sont réservées à des problèmes de construction géométrique (Fournier 1643, p. 481-488). On y trouve une erreur dont il est intéressant de tirer parti pédagogiquement :

> L'ovale ou ellipse est une ligne courbe que les mathématiciens ont accoustumé de nous exposer en coupant de travers un cosne ou un cylindre, en sorte que la coupe, ou diamètre de l'ovale, ne soit point parallèle aux costés du cylindre ou du triangle du cône, ni à leur base. Celle qui se fait par la coupe du cylindre se nomme simplement ovale. Celle qui se fait par la coupe d'un cosne ressemble parfois à un œuf dont l'un des bouts est plus menu que l'autre.

La section d'un cône n'a jamais, bien sûr, un bout « plus menu que l'autre », car c'est une ellipse, de même que la section d'un cylindre. L'erreur semble héritée d'Albrecht Dürer, qui, dans son *Underweysung der Messung* (1528), définissait l'ellipse comme section de cône et la traçait point par point, par double projection orthogonale, selon un principe parfaitement correct, mais obtenait un tracé ovoïde. Guillemme Le Vasseur, dans son *Traité de fabricomologie ou ergastice du point*, semble aussi penser qu'il y a deux courbes différentes : il définit l'ellipse comme section du cône et l'ovale comme section du cylindre.

Le thème de la construction d'ovales par raccord de cercles, riche en possibilités, est présent chez Le Vasseur, Louvel et Fournier. On le trouve encore dans un manuscrit anonyme conservé à Caen, daté de 1684 (ms. 480) : cet épais volume contient plusieurs traités dont un recueil de problèmes de 82 pages intitulé *De la réduction des figures géométriques ou transmutation d'icelles, appelée par les savants métaschématique*. Le cinquante-septième problème consiste à « construire une cornemuse », sorte de cardioïde. Le cinquante-huitième est la « construction de l'oval parfait par deux quarrés esgaux », c'est-à-dire un ovale circonscrit à un rectangle EFHG divisé en deux, tel un domino, par une transversale AB :

> CONSTRUCTION DE L'OVAL PARFAIT PAR DEUX QUARRES ESGAUX. En l'oval, si on considère un diamètre estre 11, un autre 7, soit mesuré le cercle duquel le diamètre est 7 : on aura 38 ½, qu'il faut diviser par 7, on obtiendra 5 ½, lesquels fault multiplier par 11, le produit sera 60 ½ qui est la juste superficie, d'aultan qu'il y a tel rapport de 38 ½ à 60 ½ que de 7 à 11. Les deux points A et B sont les centres des deux grands quarts de cercle BEF et AGH, et les deux points C et D sont les centres des deux petits quarts de cercle CGE et DFH. Pour trouver les centres et diamètres à tout oval proposé, cela se fait par la 44e proposition du second livre d'Apollonius Pergius.

Après la géométrie, l'algèbre. Elle pénétra avec beaucoup de lenteur dans l'enseignement des mathématiques. Au XVII^e siècle, les réticences étaient encore fortes. Dans son cours, le jésuite Pierre Gautruche, professeur de mathématiques à Caen de 1667 à 1681, ne l'évoque que brièvement et prudemment, sur un seul exemple, très simple (Gautruche 1653, p. 31) :

> *Notabis præterea huc accedere & aliam regulam, quam ab inventore, Algebram nominant […] exemplum subjicio. Quaeretur numerus qui multiplicatus per 14, eandem reddat summam, quam si multiplicetur per 9. additis postea 90, ad ejus productum.* [Traduction : Tu noteras de plus, arrivé à ce point, une autre règle, qu'on nomme l'algèbre, du nom de son inventeur. […] je présente un exemple. On demande un nombre qui, multiplié par 14, rendra le même total que s'il avait été multiplié par 9, et qu'ensuite 90 aient été ajoutés à son produit.

Vers 1700, l'auteur d'un recueil de problèmes d'arithmétique à visée pédagogique (ms. 132) affiche qu'il entend les résoudre « sans aucun secours de l'algèbre ni ancienne ni nouvelle, mais par des raisonnements aisés tirés de la la nature même de ces questions et appuyés sur les principes les plus simples et les plus communs ». Car cette algèbre est, poursuit-il, une méthode « dommageable », qui « laisse l'esprit dans une étrange confusion » ; quant aux algébristes, ce sont « gens oisifs » dont le passe-temps consiste « à embrouiller » les problèmes ! Mais cette vive hostilité est paradoxale, car c'est au fond par l'algèbre, malgré ses dénégations, qu'il résout un problème comme celui-ci (Prigent 2011) :

> Un nombre inconnu a été multiplié par 20 et le produit ayant été soustrait de 70, on a reservé le reste. Le même nombre inconnu est ensuite multiplié par 30, et l'on ajoute 10 à ce nouveau produit. Après quoi,

> divisant par cette somme le reste que l'on avait réservé d'abord, le quotient étant soustrait de 2/5, le reste est 3/10. Quel nombre peut satisfaire a ces conditions ?

Il faut, dit-il, le « réduire aux termes les plus simples », ce qui est après tout l'essence de l'algèbre. Il désigne l'inconnue par x. Plus étonnant encore : tirant de Clavius le problème du *ludimagister*, il le résout par une démarche algébrique, alors que le jésuite allemand appliquait la méthode arithmétique de double fausse position (Ageron 2011). Ce problème est :

> Un maistre de mathematique dit qu'il a tel nombre d'ecoliers, que si chacun luy donnoit 8. pistolles, il ne luy en faudroit plus que 30. pour acheter une maison qu'on veut luy vendre ; mais que s'ils luy donnoient chacun 10. pistoles il auroit 40. pistolles au delà du prix de cette maison. On demande quel est le nombre de ses ecoliers et quel est le prix de la maison qu'on luy veut vendre.

Au XVIII[e] siècle, les réticences sont effacées. L'algèbre semble même parée de toutes les vertus, comme le suggèrent plusieurs manuscrits anonymes conservés à Caen et probablement d'origine locale. L'auteur d'une *Nouvelle méthode pour trouver avec facilité la racine de tous les cubes parfaits et de tous les nombres proprement appelés sursolides* (ms. 133) prône « le secours des lettres » plutôt que la « méthode ordinaire » pour extraire la racine cubique d'un grand nombre comme 115714886617 une fois qu'on a estimé qu'elle « doit être de quatre caractères ». Celui d'un *Traité de géométrie* (ms. 482) venant de la bibliothèque des Jésuites de Caen, ayant commencé à établir sept propositions du livre II des *Éléments* d'Euclide « par les figures », se ravise, biffe ce qu'il a déjà écrit et entreprend de les reformuler algébriquement, car, dit-elle, elles « se démontrent plus aisément par le calcul ». Les techniques enseignées deviennent peu à peu plus complexes. Dans des *Élémens de mathématiques* en français venant en appendice à un cours de philosophie (ms. 465), certainement postérieurs à 1740 puisqu'on y évoque Mme du Châtelet, on trouve les règles de l'arithmétique des polynômes, avec les exemples de la division de $9x^4+12ax^3-4a^3x-a^4$ par $3xx-aa$ et de la racine carrée de $9aa-12ab+4bb$; cependant, les seules équations algébriques considérées sont celles du premier degré. Dans un manuscrit daté de 1763, on trouve, à la suite de cours en latin de botanique et géométrie, le problème de la couronne du roi Hiéron, en français, résolu par l'intermédiaire d'un système de deux équations à deux inconnues (ms. 717). Enfin, dans un cahier d'élève daté de 1742 (ms. 478), on découvre que le jésuite Yves-Marie André, qui fut professeur de mathématiques à Caen de 1726 à 1759 (Ageron & Bessot 2011), montrait à ses élèves comment résoudre certaines équations du troisième degré, comme $x^3+6xx+12x=117$:

> En ajoutant 8 de part et d'autre, nous aurons $x^3+6xx+12x+8 = 125$. Donc en extrayant la racine cubique de part et d'autre […]

II. DU LOCAL AU GLOBAL : UNE HISTOIRE "GLOCALE"

Réfléchissant à la manière d'éviter les écueils d'une approche exclusivement locale de l'histoire des mathématique, j'ai imaginé de lui substituer une stratégie qu'on pourrait qualifier de « glocale », c'est-à-dire connectant et articulant l'histoire locale à un vaste pan de macrohistoire. Plus précisément, j'ai tenté de trouver des textes produits ou étudiés à Caen ou en Normandie invitant, explicitement ou non, à s'intéresser à l'interaction des mathématiques européennes et des mathématiques des pays d'Islam. Aux textes normands répondaient ainsi d'autres textes, arabes et européens, relançant l'intérêt des étudiants. Ma pensée était que ces variations de latitude et d'échelle, à coup sûr fécondes du point de vue épistémologique, pouvaient aussi l'être du point de vue didactique. Au moins permettait-il, en théorie, de mettre en cohérence l'attachant et l'attirant, le quotidien et le pérégrin.

Ouvrant sur les questions très actuelles de circulation d'idées, d'hybridation de savoirs et d'appropriation de pratiques, cette approche pouvait aussi offrir une perspective non dépourvue de valeur pour de futurs enseignants, en lien avec les débats sur la coexistence, la perméabilité, la conflictualité dans un univers mondialisé et une société française métissée.

Certaines pistes sont faciles à suivre. Le *Carmen de Algorismo* d'Alexandre de Villedieu renvoie par son titre à Muhammad bin Mûsâ al-Khuwârizmî et à sa réception latine. C'est aussi le cas des livres de Guillaume Gosselin (v. 1545- v. 1590), né à Ifs, tout près de Caen, qui fut l'un des principaux passeurs de l'algèbre en France et le dernier à désigner l'algèbre par son nom arabe double (Gosselin 1578, seconde partie, déclaration) :

> De la Grand Art, dite en Arabe Algebre & Almucabale, ou Reigle de la chose, inuentée de Maumeth fils de Moïse Arabe

Les exposés élémentaires d'arithmétique et de géométrie pratique rédigés en Normandie aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles ne parlent pas de sciences arabes, mais peuvent être comparés avec intérêt aux manuels généralistes à l'étude dans les pays musulmans à la même époque, par exemple le *Miftâh al-hisâb* [La Clef du calcul] de Jamshîd Ghiyâth al-dîn al-Kâshî (m. 1429) et *Khulâsat al-hisâb* [La Quintessence du calcul] de Bahâ al-dîn al-'Âmilî (1547-1621). On peut ainsi distinguer des cas d'héritage antique commun, de transmission d'époque médiévale, de redécouverte indépendante. Le père André, avec l'équation $x^3+6xx+12x = 117$ qu'il proposait à ses élèves de Caen, nous renvoie sans le savoir à la Syrie du XII^{e} siècle, où al-Sulamî remarquait, concernant l'équation du type « un cube, des carrés et des choses sont égales à un nombre » (Rashed 2011, p. 82) :

> [Si] le tiers du nombre des carrés est égal à la racine carrée du tiers du nombre des choses […] alors elle est réalisable.

Davantage que les mathématiques, les recherches historiques et philologiques érudites furent la spécialité caennaise au XVII^{e} siècle. Certaines sont cependant directement liées aux mathématiques et à la langue arabe. Mes étudiants ont été surpris d'apprendre que parmi les intellectuels qui vivaient alors à Caen ou lui restaient liés, beaucoup maîtrisaient cette langue. Les protestants y excellaient : Samuel Bochart (1599-1667), Étienne Le Moyne (1624-1689) et Étienne Morin (1625-1700). Parmi les catholiques, Louis Thouroude (1615-1689) et Pierre-Daniel Huet (1630-1721) ne possédaient que de solides rudiments, mais Adrien Parvilliers (1619-1679) qui fit un bref séjour à Caen, Antoine Galland (1646-1715) qui y resta dix ans et Pierre Vattier (1623-1667) qui vivait à 67 km de là étaient des arabisants de premier plan.

Une controverse sur l'origine des chiffres dits « vulgaires », par opposition aux prestigieux chiffres romains, opposa Pierre-Daniel Huet et Étienne Le Moyne. Le premier les attribuait aux Grecs et les pensait issus de l'altération des premières lettres de l'alphabet grec (Huet 1679, p. 647 ; Huet 1722, p. 114) :

> […] Le β étant accourci de ses deux extrémités, a produit le 2. Si vous inclinez un peu le γ sur son côté gauche, & que vous en retranchiez le pied, & que vous arrondissiez un peu la corne gauche vers le côté gauche, vous ferez un 3. Le Δ a fait le 4 […]

Le second, avec un argument similaire, défendit une conclusion opposée : pour lui, les chiffres étaient des déformations des premières lettres de l'alphabet arabe, prises dans l'ordre dit *abjad* (Le Moyne 1685, p. 800, ma traduction) :

> Le 6 est un و inversé. Le 7 est le ز arabe, avec un point, parce que si on l'allonge et si on le trace de manière continue, on produit l e signe du nombre sept. La lettre ح et le chiffre 8 sont presque identiques, si on referme les parties supérieure et inférieure de la lettre […].

Huet suspecta Le Moyne de partialité, le décrivant comme très favorable aux Arabes : *Arabibus addictissimus* (Huet 1718, p. 181) ! Dans ce procès en arabophilie, qu'il intenta aussi à Bochart, je suis tenté de voir un peu de jalousie.

L’origine du mot *algèbre* faisait aussi débat. Beaucoup, comme le jésuite caennais Pierre Gautruche déjà évoqué, le faisaient dériver du nom de son inventeur : on hésitait entre Geber, astronome andalou du XII^e siècle, et Gerbert, le savant pape de l’an mille. En 1650, Gilles Ménage rendit publiques ses *Origines de la langue française,* premier dictionnaire étymologique français. Voici ce qu’il écrivit du mot *algèbre* (Ménage 1650, p. 26) :

> ALGEBRE. De Algebra, qui vient de l’Arabe الجبره Algiabarat, qui signifie rei redintegratio, reparatio ossis fracti, valetudinis reparatio, &c. De la racine جبر giabara qui signifie reparavit, roboravit, concinnavit, refecit, parce que l’Algebre est la perfection, & comme la reparation de l’Arithmetique, laquelle les Arabes appellent التكسير Altacsir, fraction. D’où vient qu’on dit les nombres rompus pour les parties de l’unité. Ceux-là se trompent qui dérivent Algebre d’un nommé Geber, qu’ils font Autheur de cette science.

Cette étymologie fit sensation et fut contestée, notamment par Furetière. J’ai pu montrer qu’elle avait été communiquée à Ménage, qui n’était pas arabisant, par Samuel Bochart. Le parisien Ménage était associé à l’Académie de Caen.

Ces débats sont d’intéressantes entrées en matière à des chapitres de l’histoire des mathématiques. Pour les arbitrer, je recours à l’étude de textes arabes, mais aussi européens. Ils permettent de montrer que les thèses de Huet et de Le Moyne sur l’origine des chiffres étaient toutes deux fausses, tandis que la définition de l’algèbre donnée par Ménage était pour l’essentiel correcte, avec des inexactitudes.

Le lecteur intéressé par l’histoire de la connaissance de l’origine du mot algèbre trouvera en annexe différents détails érudits, pour la plupart inédits.

III. EN GUISE DE CONCLUSION

Alors que j’avais le sentiment d’avoir trouvé une formule cohérente et équilibrée pour cet enseignement d’histoire des mathématiques en première année de master, qui, je le rappelle, venait en complément de celui dispensé de manière plus traditionnelle en troisième année de licence, la nouvelle réforme de la formation des enseignants décidée en 2013 modifia encore une fois la donne. L’une de ses conséquences fut le transfert de l’unité d’histoire des mathématiques de la première année de master à la seconde, avec un volume horaire réduit (30h au lieu de 65h). Ce nouvel enseignement fut mis en place en 2014-2015, et j’en ai été chargé. Les étudiants concernés avaient pour la plupart été reçus au concours de recrutement (CAPES) et se trouvaient à mi-temps en situation de stagiaires en responsabilité dans un établissement scolaire, soumis pour leur titularisation au jugement du corps d’inspection. Conscient de ce que cette première expérience d’enseignement serait l’essentiel de leurs préoccupations, je ne leur avais pas demandé, contrairement aux années précédentes, de travail personnel. J’avais seulement tenté de m’appuyer sur des comptes-rendus d’expériences vécues d’introduction d’une perspective historique sur les mathématiques au collège ou au lycée. Mais je n’avais pas réalisé avec quelle vitesse leur nouveau statut de fonctionnaire-stagiaire leur ferait abandonner leurs réflexes d’étudiants : tout ce qui sortait des programmes scolaires au sens le plus strict leur parut détaché de la vraie vie. Un questionnaire d’évaluation a démontré que les séances d’histoire des mathématiques ont été perçues par eux comme inutiles et peu intéressantes. Dans ce contexte peu favorable, je renouvellerai cependant l’essai, probablement en revenant à l’idée de demander à chacun un exposé, un petit article ou une expérimentation pédagogique. La microhistoire bas-normande des mathématiques et de leur enseignement, en connexion avec les courants mondiaux d’histoire des sciences, en constituera probablement à nouveau la ressource principale.

IV. ANNEXE : DE LA NATION ET DU SEXE DE L'ALGÈBRE

Dans les *Origines de la langue française* de Ménage (1650), l'entrée ALGEBRE est une des rares dans où apparaissent des caractères arabes plutôt qu'une translittération ; de plus, Ménage y explique le nom الجبرة – graphié الجبره – et le verbe جبر par des termes latins et non français. Ces deux éléments suggèrent qu'il a recouru à un dictionnaire arabe-latin. Or deux ouvrages de ce type seulement étaient disponibles en 1650 : le bref *Lexicon Arabicum* de Frans Raphelengius (Leyde, 1613) et, en quatre volumes, le *Thesaurus linguae arabicae* de Antonio Giggeius (Milan, 1632). Le premier, le *Lexicon*, ne donne à la racine جبر que :

> جبر Roboravit, reparavit, restauravit, restituit, sanavit. Alligavit. Item coegit.
>
> جبرة Reparatio. Gloss. victoria.

Ce ne peut être la source de Ménage, puisqu'on n'y lit aucune allusion aux mathématiques, ni aux fractures osseuses. En revanche, ces deux sens particuliers apparaissent dans l'article correspondant du *Thesaurus* (Giggeius 1632, vol. I, col. 583), où l'on retrouve par ailleurs l'ensemble des *definientia* de Ménage :

> الجَبَرُ Rei redintegratio. Reparatio ossis fracti. Rei fractae reparatio. Valetudinis reparatio. Rex. Dominus. Servus (sensu contrario). Fortis. Audax. Vir ut hebræum גבר. Divitiarum acquisitio post paupertatem. Impotentia. Adolescens. Reditus.
>
> الجبرة Reparatio. (inde Algebra Mathematicae pars, quasi sit numeri fracti reparatio.)
>
> جبره, & أجبره, & اجتبره, & تجبره Illud reparavit. Roboravit. Concinnavit. Refecit.

Le dictionnaire de Giggeius est donc la source directe de Ménage. Ce dernier ignorant l'arabe, il a nécessairement été guidé par un arabisant. Je fais l'hypothèse que ce fut par Samuel Bochart, qu'il connaissait bien, citait souvent et remercia dans la préface des *Origines*. Bochart était très familier du dictionnaire de Giggeius : il l'a à de nombreuses reprises mentionné dans sa colossale *Geographia sacra*, imprimée à Caen en 1646.

L'intérêt spécifique de Bochart pour le mot algèbre est démontré par le fait suivant. En 1652, l'érudit normand était à Stockholm, invité par la reine Christine, et travaillait à son *Hierozoicon*, traité de zoologie biblique qui paraîtra en 1663. Dans la bibliothèque royale,il tomba sur un manuscrit du *Qâmûs*, le parcourut en totalité et en copia de larges extraits relatifs aux animaux ou, parfois, aux plantes. Le résultat de ce travail occupe les pages 1 à 668 d'un gros manuscrit conservé à la Bibliothèque de Caen (ms. 198). Chaque mot arabe relevé y est suivi de son explication en arabe, tirée du *Qâmûs*, et de son explication en latin, tirée du *Thesaurus* : Bochart semble avoir exploité l'un et l'autre en parallèle. Il est très surprenant d'y trouver le terme mathématique الجبره, qui fait doublement exception à la règle : il est sans rapport avec les animaux ou les plantes, et il est absent du *Qâmûs*. Tout se passe donc comme si Bochart, particulièrement intéressé par ce mot *avant* son séjour en Suède, l'avait inséré là pour mémoire, juste avant le mot de même racine المتجبر, lequel appartient bien au champ lexical de la zoologie et est bien présent dans le *Qâmûs, traduit par :* الاسد (le lion). Ce qui donne les deux lignes suivantes (ms. 198, p. 87) :

> Reparatio, inde Algebra, q. numeri fracti reparatio. الجبره
>
> Leo. الاسد المُتَجبّر

Un indice supplémentaire me renforce dans la conviction que Samuel Bochart est le véritable auteur de l'article de Ménage sur l'algèbre. Celui-ci fit parvenir son dictionnaire à Bochart et à Huet, en sollicitant leurs remarques en vue d'une nouvelle édition. Bochart renvoya son exemplaire à Ménage après en avoir, comme il le dit, « barbouillé toutes les marges »[147]. J'ai consulté cet exemplaire annoté : il est frappant qu'en marge de l'entrée ALGEBRE, Bochart n'ait apporté aucune précision ou correction. L'ouvrage ne fut pas réédité avant 1694. Son titre était devenu *Dictionnaire des étymologies de la langue française,* Bochart était mort depuis longtemps, beaucoup de définitions avaient été revues, mais la notice du mot algèbre n'avait aucunement changé.

Une question que je n'ai pu résoudre est de savoir à quelle source Giggeius a lui-même puisé. La source principale de son dictionnaire est le *Qâmûs* [L'Océan] de al-Fîrûzâbâdî (1329-1415), qu'il suit en général de très près. Mais ce ne peut être le cas ici : aussi bien le sens médical de الجبر que le sens mathématique de الجبرة sont absents du *Qâmûs*, qui donne seulement :

الجبر : خلاف الكسر والملك والعبد ضد والرجال الشجاع وخلاف القدر والغلام والعود

وجبره فجبر جبرا وجبورا وانجبر وتجبر واجتبره فتجبر : أحسن إليه أو أغناه بعد فقر

La *Vocabulista aravigo en letra castellana* de Pedro de Alcala (Grenade, 1505) traduit le verbe جبر par l'espagnol *cobrar* (< latin *recuperare*) et le nom الجبرة par *algebra arte*.

Un mot sur le *sexe* de l'algèbre. Tous les auteurs que j'ai cités jusqu'ici estiment que le mot algèbre présente en arabe la forme féminine الجبرة . Or celle-ci est en réalité inexistante dans l'histoire de l'algèbre arabe, qui ne connaît que la forme masculine الجبر , toujours associée comme on le sait à المقابلة *al-muqâbala*. On voit que l'erreur de genre était bien ancrée chez les orientalistes. Jacob Golius, qui ramena de Syrie en 1629 un manuscrit d'algèbre de 'Umar al-Khayyâm, fut le premier à la rectifier dans son *Lexicon Arabico-Latinum*, où l'on lit (Golius 1653, col. 462) :

جبر Religavit, consolidavit, integritati reddidi fractum (os).

الجبر Reductio partiam ad totum, seu fractionem ad integritatem. Et hinc Algebra nomen habet.

Explication que j'ai retrouvée presque à l'identique dans le *Dictionarium arabico-latinum* de François Pétis de La Croix, professeur au Collège royal de Paris, daté de 1696 et resté manuscrit (ms. BnF Arabe 4343) :

الجَبْرُ Consolidatio, reductio partiam ad totum, seu fractionem ad integritatem, vulgo l'algebre.

Que dire maintenant du lien supposé par Giggeius, Ménage, Golius et de nombreux lexicographes postérieurs entre l'algèbre et les « nombres rompus » ? Il était tentant et logique, puisque le *Qâmûs* définit الجبر comme contraire de الكسر *al-kasr*, lequel signifie rupture ou fraction, y compris dans le sens mathématique de ce dernier mot. Mais il ne rend pas compte du sens exact de l'opération appelée الجبر par les mathématiciens arabes : celle-ci est la restauration additive consistant à rétablir x à partir de $x - y$ en ajoutant y, et non la restauration multiplicative consistant à rétablir x à partir de x / y en multipliant par y. Ménage crut même pouvoir compléter l'explication de Giggeius en opposant l'algèbre à l'arithmétique, que les Arabes, selon lui, nommeraient التكسير (fractionnement, mot dérivé de كسر = fraction). Mais ce sens n'est, à ma connaissance, pas attesté : chez les mathématiciens arabes, l'arithmétique s'appelle علم الحساب *'ilm al-hisâb* (science du calcul), parfois علم العدد *'ilm al-'adad* (science du nombre), mais jamais التكسير, terme qui existe bel et bien, mais ressortit au vocabulaire de la géométrie pratique et signifie découpage ou, plus abstraitement, mesurage.

[147] Sur cette révision, voir la lettre de Bochart à Ménage datée du 22 août 1650 (inédite, ms. Caen 971, lettre 194) et une seconde non datée (British Library, coll. Egerton, n°17, publiée dans : Hector de La Ferrière, *La Normandie à l'étranger*, Paris, 1873, p. 384-385). L'exemplaire des *Origines* annoté par Bochart est conservé à Paris : BnF Res X 923.

En dépit de ces inexactitudes de détail, l'origine arabe et le sens général du mot algèbre étaient bien, dès 1650, à la disposition de tous, dans un ouvrage d'accès facile.

REFERENCES

Ageron P., Jenvrin O., Le Goff J.-P. (2009) De l'architecture aux mathématiques : des lycéens sur le terrain. In Escofier J.-P., Hamon G. (Eds.) (pp. 15-39) *Actes de la rencontre des IREM du Grand ouest et de la réunion de la Commission inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques*. Rennes : IREM de Rennes.

Ageron P. (2011a) Les sciences arabes à Caen au XVII^{e} siècle. In Barbin É., Ageron P. (Eds.) (p. 95-121), *Circulation, transmission, héritage - Histoire et épistémologie des mathématiques*, Caen : IREM de Basse-Normandie.

Ageron P. & Bessot D. (2011) De Varignon au père André : tribulations normandes d'un cours de géométrie. In Barbin É. & Ageron P. (Eds.) (p. 181-200), *Circulation, transmission, héritage - Histoire et épistémologie des mathématiques*, Caen : IREM de Basse-Normandie.

Ageron P. (2011b) Le problème du ludimagister dans un manuscrit normand. *Le Miroir des maths* 8, 22-26.

Ageron P. (2013a) Le *Traité de fabricomologie ou ergastice du point*. In Barbin É. & Marc Moyon M. (Eds.) (p. 287-304), *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire, entre enseignement, recherche et culture*. Limoges : PUL.

Ageron P. (2013b) L'univers du manuscrit arabe, à travers les collections des bibliothèques publiques de Basse-Normandie. *Mémoires de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Caen* XLIX, 69-86.

Ageron P. (2016) Le programme pédagogique de Guillemme Le Vasseur, « architecte, professeur de mathématiques, ingénieur et pilote en la mer océane » (v. 1564-1634). In *Éduquer et instruire en Normandie*, actes du 50^{e} congrès de la Fédération des sociétés historiques et archéologiques de Normandie. Louviers : FSHAN (à paraître en 2016).

Courtin C., Guênerie N. (2009) *Étude du manuscrit* Pratique de géométrie *de Samuel Bochart*. Travail d'études et de recherche, sous la direction de P. Ageron. Caen : Université de Caen.

Fournier G. (1643) *Hydrographie contenant la théorie et la practique de toutes les parties de la navigation*. Paris : M. Soly.

Gautruche P. (1656) *Philosophiae et Mathematicae totius Institutio, Cum Assertionibus disputatis, et vario genere Problematum*, vol. III, *Mathematica*. Caen : A. & J. Cavelier.

Golius J. (1653) *Lexicon Arabico-Latinum.* Leyde : B. & A. Elsevier.

Gosselin G. (1578) *L'arithmétique de Nicolas Tartaglia Brescian.* Paris : A. Périer.

Huet P. D. (1679) *Demonstratio evangelica ad serenissimum Delphinum*. Paris : É. Michallet.

Huet P. D. (1718) *Commentarius de rebus ad eum pertinentibus*. Amsterdam : H. du Sauzet.

Huet P. D. (1722) *Huetiana ou pensées diverses de M. Huet*. Paris : J. Estienne.

Le Moyne É. (1685) *In Varia Sacra Notae et Observationes*, t. II. Leyde : D. van Gaesbeeck.

Prigent A. (2011) *Entre arithmétique et algèbre autour de 1700 : étude d'un manuscrit à visée pédagogique*. Mémoire de master 2, sous la direction de P. Ageron. Nantes : Université de Nantes.

Rashed R. (2011) *D'al-Khwârizmî à Descartes*. Paris : Hermann.

Schärling A. (2003) *Compter avec des jetons*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA DIFFICILE GENÈSE DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE: RUPTURES ET OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Slimane HASSAYOUNE[*]– Rahim KOUKI[**]

Résumé : Cet article rapporte les résultats d'une étude portant sur la genèse historique et la nature épistémologique de l'algèbre élémentaire (objet d'enseignement au niveau de la première année secondaire en Tunisie). Nous y décrivons particulièrement l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, syntaxique et sémiotique.

Les principaux points dégagés montrent que la construction des concepts algébriques se réalise en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale ainsi qu'avec la mobilisation des techniques opératoires. Ceci nous ouvre de nouvelles perspectives de recherche orientées vers l'approfondissement des faits établis et leur exploitation dans une perspective d'ingénierie didactique.

Mots-clés : Algèbre élémentaire - épistémologie - histoire des mathématiques - praxéologie algébrique - champ conceptuel - champ sémiotique - champ syntaxique.

Abstract: This article reports the results of a study concerning the historical genesis and epistemological nature of elementary algebra (taught at the beginning of the secondary school in Tunisia). We particularly describe the diachronic evolution of algebraic praxeologies in the three conceptual, syntactic and semiotic fields.

The main points reached show that the construction of algebraic concepts is closely related to their procedural functionality and operative technics.

This may open new prospects for research oriented toward the deepening of established facts and their exploitation in a perspective of engineering didactics.

Keywords: Elementary algebra - epistemology - mathematics history - algebraic praxeology, conceptual field, syntactic field, semiotic field.

I. INTRODUCTION

L'objet de cet article s'inscrit dans la lignée des investigations qui cherchent à fournir des éclairages sur la nature des praxéologies algébriques visées par les programmes scolaires. Pour ce faire, nous envisageons de mener une analyse épistémologique relative à ces praxéologies en explorant particulièrement les principales phases historiques de leur émergence en tant que manifestations d'un savoir savant et de pratiques sociales de référence.

L'algèbre élémentaire telle qu'elle est enseignée au deuxième cycle de l'enseignement de base (12-14 ans) et au début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans) se manifeste à travers deux principaux champs praxéologiques :

[*]Slimane Hassayoune, Université de Tunis – Tunisie – slimhass@gmail.com
[**] Rahim Kouki, Université de Tunis El Manar – Tunisie – rahim.kouki@ipeim.rnu.tn

Hassayoune S., Kouki R. (2015) La difficile genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 386-402.

- Le calcul algébrique : Manipulation d'expressions numériques et littérales (développement, réduction, factorisation, etc.)
- La résolution de situations-problèmes : Analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, contrôle des solutions.

De nombreuses études menées en Tunisie (Kouki 2004; Ben Nejma 2006; Achour 2005) ont montré que l'enseignement/apprentissage de l'algèbre élémentaire pose des problèmes cruciaux notamment aux niveaux :

- des compétences à développer chez les élèves,
- des choix didactiques à adopter dans les activités d'enseignement/apprentissage et
- de la complexité de son système sémiotique.

Nous allons nous intéresser effectivement à ces problématiques en revenant aux sources et en focalisant sur l'aspect épistémologique de l'algèbre élémentaire. Nous délimiterons les contours du domaine de cet objet de savoir en procédant à une analyse historique et épistémologique de son évolution à travers le temps. Ainsi les époques babylonienne, grecque, arabe et occidentale du XVI^{e} seront tour à tour explorées.

II. GENÈSE DE L'ALGÈBRE

Qu'est-ce que l'algèbre ? Quelle est son origine ? Quel est son rapport avec l'arithmétique ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ? La réponse à ces questions doit tenir compte des phénomènes accompagnant l'évolution et le développement des théories mathématiques sous-jacentes ou mises en jeu et des obstacles rencontrés, et de la manière dont ils ont été franchis.

Le mot « algèbre » provient du terme arabe « al-jabr », qui signifie en médecine « réparation ou restauration d'une fracture ». Il a été utilisé, en mathématiques, dans « Al-kitâb al-mukhtasar f'il jabr w'al-muqâbala »[1], un important ouvrage écrit au début du IX^{e} siècle par Mohammad Ibn Mûssa Al-Khwârizmî (780-850). Dans ce traité, l'expression arabe « al-jabr » désigne l'opération qu'on fait subir à l'équation du second degré pour en supprimer les termes négatifs, alors que « al-muqâbala » signifie la réduction de termes de même degré dans une équation quadratique. Par la suite, le domaine de la résolution des problèmes en utilisant les méthodes décrites par Al-Khwârizmî, fut désigné par le terme unique « al-jabr ». À partir du IX^{e} siècle, l'algèbre devient progressivement, l'art de réduire et de résoudre les équations, puis la science des expressions algébriques et enfin l'art de résoudre des problèmes. Cette nouvelle science simplifie et unifie les techniques anciennes de résolution des problèmes posés par la vie quotidienne des gens sédentarisés et vivant en société. Il apparaît donc que les problèmes de la vie courante sont les vraies origines de cet art et des techniques opératoires que celui-ci engendre dans son développement. Par exemple, Al-Khwârizmî indique que l'utilité de l'algèbre réside essentiellement dans la résolution des problèmes d'héritage, de partition, de construction de canaux d'irrigation, etc.

Les Mésopotamiens, les Égyptiens, les Grecs et les Indiens ont résolu des problèmes à l'aide de procédures constituées d'enchainements d'opérations numériques et sous la forme de listes d'instructions appliquées à des cas particuliers.

Dans ces calculs, ils ne font aucune référence à une quelconque inconnue ni, d'ailleurs, à quelque justification théorique que ce soit. Seul Diophante d'Alexandrie (III^{e} siècle) introduit un symbole qu'il appelle « arithme » (quantité indéterminée d'unités) et fait subir à ce signe

[1] Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison.

les opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division, inverse). Il représente, également, par des signes particuliers le carré de l'arithme, son cube, ses puissances quatrième, cinquième et sixième, par d'autres signes.

Après avoir pris connaissance de la traduction arabe du traité d'arithmétique de Diophante, Al-Karâjî (953-1029) utilise les concepts et lexiques algébriques (shay, mâl et kaab) créés par Al-Khwârizmî pour appliquer l'arithmétique aux expressions algébriques et résoudre les problèmes à l'aide de l'algèbre de Diophante. Al-Karâjî et son disciple Al-Samaw'al (1130-1175) introduisent les polynômes sous la forme de tableaux et explicitent les opérations usuelles sur ces tableaux.

Abdeljaouad (2002) précise que, parallèlement aux mathématiciens d'Orient, ceux du Maroc, comme Al-Hassâr (vivant en 1175) et Ibn Al-Yâssamîn (m. 1204) ont imaginé un système condensé pour représenter les équations et les termes standards utilisés en algèbre :

> La multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne, nous confirme dans l'hypothèse d'une origine maghrébine des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme chapitre complémentaire aux traités de hisâb al-ghubâr. (Abdeljaoued 2002, p22)

Ce symbolisme algébrique permet de représenter le nombre connu ('adad) : ـعـ l'inconnue (shay) : ـشـ, son carré (mâl) : ـمـ, son cube (kaab) : ـكـ , la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) : ـمـمـ et les termes : égal (ya'dilû) : ـلـ , soustraction (illa) : لا comme le montrent les fac-similés suivants :

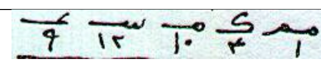
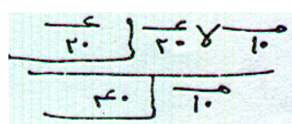
(Abdeljaouad, 2002, (26b), p26)		$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
(Abdeljaouad, 2002, (63b), p26)		$10x^2 - 20 = 20$ $\longrightarrow 10x^2 = 40.$

***Tableau 1** - Les fac-similés* (Abdeljaoued 2002)

Dans son traité « Art analytique ou Algèbre nouvelle », Viète (1540-1603) introduit une véritable algèbre littérale, avec ses symboles, ses procédés calculatoires, ses transformations particulières et sa méthode spécifique (Boyé, 2003). Poursuivant l'élan donné par Viète, Descartes propose une méthode d'algébrisation de la géométrie, dans l'ouvrage intitulé « La Géométrie » et publié en 1637, il annonce :

> Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des géomètres se réduit à un même genre de problèmes qui est de rechercher la valeur des racines de quelque équation. (Cité in Guichard 2000, p. 48)

Et il précise plus loin qu'il veut que sa méthode soit universelle pour :

> Résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète. (Ibid.)

Au XIXe siècle, les algébristes anglais comme Boole ou Morgan, envisagent une algèbre beaucoup plus abstraite où les lettres peuvent représenter des objets quelconques. L'algèbre se métamorphose en une nouvelle science : L'algèbre des structures (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, algèbres, quaternions, etc.). Cette algèbre va constituer un nouveau domaine appelé à structurer et unifier des secteurs divers de l'activité mathématique.

À la lumière de ce qui précède, il apparaît que le véritable essor de l'algèbre est amorcé lorsque la substitution des écritures formelles aux écritures verbales est devenue possible.

Mais pour arriver à cette étape décisive de son évolution, l'algèbre s'est plusieurs fois métamorphosée par une lente abstraction de ses objets d'étude : mesure de grandeurs, calcul sur des nombres abstraits et finalement manipulation d'écritures formelles avec des lettres désignant d'abord des nombres et ultérieurement toutes sortes d'objets. Nous envisageons dans ce qui suit d'analyser les caractéristiques de cette évolution en prenant en compte les trois champs épistémologiques qui se sont construits progressivement au cours de l'histoire : Le champ conceptuel, le champ syntaxique et le champ sémiotique.

Conformément au cadre théorique de notre recherche -la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992)- la variable observée tout au long de cette analyse est la praxéologie algébrique mobilisée.

III. ÉTUDE DIACHRONIQUE DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Dans cette partie, nous menons une étude diachronique de la diffusion de l'algèbre élémentaire et nous faisons l'hypothèse que la connaissance des phénomènes s'y rapportant nous permet de mettre à profit la dialectique phylogenèse-ontogenèse et de tirer les meilleurs enseignements possibles sur les conditions et les contraintes pesant sur cette diffusion.

1. La phase mésopotamienne de l'évolution des praxéologies algébriques

Les savoirs mathématiques mésopotamiens sont essentiellement produits au cours de la période paléo-babylonienne, pendant les quatre premiers siècles du deuxième millénaire avant notre ère. Ces savoirs sont élaborés dans le contexte des écoles de scribes en vue de préparer ces derniers aux fonctions d'administrateur, de gestionnaire, de juriste ou d'écrivain public. Les buts poursuivis, divers et variables, ne semblent pas tous répondre à des besoins pratiques et certains d'entre eux présentent un caractère purement spéculatif. Néanmoins, les problèmes traités sont souvent présentés sous un habillage concret, reflétant les pratiques sociales de l'époque et portant sur les thèmes de l'arpentage, des constructions en briques, des travaux d'ingénierie, d'héritage, de calcul de taux d'intérêt, etc.

Dans les écoles de NIPPUR (grande capitale culturelle de la Mésopotamie), les apprentis scribes apprennent les mathématiques en résolvant des problèmes et en faisant usage des tables numériques (carrés, cubes, inverses, etc.) et des tables métrologiques qui leur servent d'outil de conversion des mesures de longueurs, d'aires, de capacités et de poids en nombres sexagésimaux positionnels et vice versa (Proust C., 2006). Les exercices de calcul font intervenir exclusivement des nombres abstraits sans aucune unité et sont toujours appuyés sur des tables numériques rappelées (dans un coin des tablettes scolaires) ou carrément mémorisées. Les historiens ont constaté que les scribes babyloniens dissocient déjà deux fonctions des nombres, à savoir la quantification (mesure) des grandeurs et le calcul ; pour la première, ils utilisent la notation métrologique et pour la seconde, la notation sexagésimale positionnelle. Ce fait est certainement dû aux différences de notations adoptées alors dans les deux contextes, contrairement à la situation d'aujourd'hui se caractérisant par l'isomorphisme des deux systèmes métrique international et décimal. Et si, par ailleurs, la résolution des problèmes nécessite des allers-retours incessants entre mesures et nombres abstraits, cela n'a pas empêché que des algorithmes de calcul généralisables se sont développés de façon autonome et hors de tout contexte métrologique, ce qui fait apparaitre l'appréhension du sens du nombre par les Babyloniens et leur maîtrise des premières techniques algébriques.

Ainsi, les praxéologies mobilisées au cours de cette période sont essentiellement algorithmiques sous-tendues par des types de tâches calculatoires stéréotypés appelant la mobilisation de techniques mécaniques calquées sur des exemples génériques. Tout se fait par imitation et application à la lettre des procédures arrêtées sans aucune démonstration ni justification, preuve d'une absence complète d'une quelconque technologie ou théorie sous-jacente.

En effet, les problèmes du second degré résolus par les Babyloniens prennent la forme de listes de procédures de calcul numérique. Høyrup[2] (2002) considère que ce ne sont pas de pures recettes découvertes par hasard et que les solutions sont guidées par des raisonnements géométriques, développés plus tard par les mathématiciens grecs et arabes. Toutefois, aucune conceptualisation n'est entamée au cours de cette période et seules *des connaissances-en-acte* (Vergnaud, 1990) sont mobilisées pour répondre aux besoins sociaux.

Le champ syntaxique et algorithmique commence à se faire jour numériquement et sans aucune ostension formelle. L'exemple suivant, relevé de la tablette BM 13901[3], est susceptible de nous éclairer davantage sur la nature des algorithmes numériques utilisés par les Babyloniens pour résoudre des équations quadratiques :

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, et c'était 45' »

Ce problème porte sur la résolution d'une équation du second degré[4]. Si on note x le côté ducarré, le problème à résoudre peut être modélisé, en algèbre moderne, par l'équation[5] :

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Høyrup(2002) traduit l'énoncé et la solution de ce problème comme suit :

« J'ai joint la surface et le côté de mon carré, C'est 45'.

1, tu poseras.

La moitié de 1 tu couperas : 30' $\qquad \frac{1}{2} = \frac{30}{60} \rightarrow 30'$

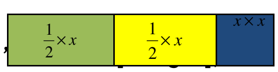
Tu croiseras 30' et 30' : 15' $\qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} \rightarrow 15'$

15' et 45' tu accoleras : 1 $\qquad 15' + 45' = 60' \rightarrow 1$

1 a pour côté 1 $\qquad \sqrt{1} = 1 \rightarrow 1$

Le 30' que tu as croisé, du cœur de 1 tu arracheras : 30' est le côté du carré. $1 - 30' = 1 - \frac{30}{60} = \frac{30}{60} \rightarrow 30'$ »

Høyrup laisse ainsi entendre, par cette traduction, une probable assise géométrique ayant guidé les babyloniens dans leurs raisonnements sous-tendant l'algorithme de résolution. En voici une possible illustration (un carré de côté x, deux rectangles isométriques de dimensions



[2] Cité in : EducMath, *Institut Français de l'*
Disponible sur < http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/lecture/repertoire/hoyrup> (consulté juillet-Août 2014).

[3] Conservée au British Museum, cette tablette remonte à l'époque paléo-babylonienne et constitue l'un des plus anciens et des plus importants textes mathématiques portant sur la résolution des problèmes du second degré.

[4] Conformément à la tradition mésopotamienne, le nombre inconnu cherché est appelé le *côté du carré*, et le carré de ce nombre l'aire *du carré*. Mais le scribe n'hésite pas à ajouter un *côté* à une *aire* au mépris de l'homogénéité des grandeurs, ce qui a conduit certains historiens des mathématiques à parler d'algèbre mésopotamienne et d'équations, et à considérer que les Babyloniens manipulent des « nombres abstraits » et non simplement des grandeurs comme leurs contemporains Égyptiens ou leurs successeurs Grecs.

[5] Il est à noter que, dans le système sexagésimal babylonien, 20 et 1/3 sont notés de la même façon, de même que 45 et 3/4 et, plus généralement, tout nombre a est considéré comme a, $a \times 60$ ou $a/60$ selon le contexte.

½ et x assemblés de deux manières dans deux configurations différentes et un carré de côté ½):

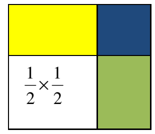


Figure 1 - *L'interprétation géométrique d'Høyrup* (2002)

2. *Contribution des méthodes euclidiennes à l'évolution des praxéologies algébriques*

Deux influences majeures des techniques mathématiques grecques sur les procédures «arithmético-algébriques» pratiquées dans les civilisations antérieures peuvent être relevées : La première a trait au recours aux raisonnements rigoureux prônés par l'école grecque, raisonnements nécessitant des démonstrations convaincantes pour toute affirmation mathématique et réfutant toute généralisation abusive, et la seconde porte sur l'usage des illustrations géométriques pour étayer les propriétés numériques, malgré la limite de sa portée.

Dans les Éléments d'Euclide, il est souvent question de construire géométriquement des grandeurs qui peuvent être interprétées comme des solutions d'équations. Mais le but n'est pas à proprement parler de résoudre des équations, bien que les transformations d'aires envisagées soient équivalentes à des manipulations d'expressions algébriques.

Les Grecs utilisent principalement ce qu'on appelle l'algèbre géométrique pour établir des propriétés algébriques comme les identités remarquables et la résolution d'équations du second degré. Les livres II et VI des Éléments illustrent bien cette méthode qui donne des preuves simples de certains résultats et développe une prise de conscience intuitive des aspects algébriques fort abstraits.

Les praxéologies ainsi développées sont donc essentiellement fondées sur des types de tâches de calcul de grandeurs géométriques nécessitant la mobilisation de techniques de transformations d'aires justifiées par des blocs technologico-théoriques relatifs à la géométrie euclidienne et à la mesure des grandeurs.

Les énoncés des Éléments se rapportent essentiellement aux mesures des grandeurs géométriques, mais ils se prêtent à une interprétation algébrique éclairant la démarche suivie par Euclide tout en étant étrangère à la conception mathématique de l'époque.

Nous décrivons, à titre d'exemples quelques propositions du livre II des *Éléments* (Peyrard, 1819) :

-Les propositions 1 à 3 illustrent géométriquement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Elles s'énoncent par le fait que des rectangles de même hauteur, disposés côte à côte, forment un rectangle dont l'aire est la somme des aires de ces rectangles. Ce fait est illustré par la configuration géométrique suivante :

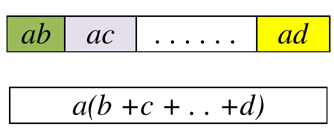


Figure 2 - *Interprétation géométrique de la proposition 3, livre II des Éléments*

Et traduit aujourd'hui algébriquement par la formule :

$$a(b+c+...+d)=ab+ac+...+ad$$

-La proposition 4 démontre géométriquement que, si une droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments. L'illustration géométrique support à cette démonstration est la suivante :

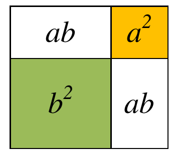


Figure 3 *- Interprétation géométrique de la proposition 4 du livre II des Éléments*

On reconnaît l'identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

-La proposition 11 illustre un problème du second degré. Euclide y expose comment « *couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments soit égal au carré du segment restant* ». Algébriquement, cela revient à résoudre l'équation :

$$ax = (a-x)^2$$

Euclide propose la construction suivante :

* Soit [DB] le segment donné. Il s'agit de construire à la règle et au compas le point F de ce segment de façon que le rectangle compris sous [DB] et [DF] soit égal au carré de [FB].

* Sur [DB] on construit le carré ABDE.
* Soit I le milieu de [AB].
* Construire sur [IB) le point C tel que ID=IC.
* Construire le carré BCHF comme indiqué sur la figure ci-jointe.
* Le point F répond à la question.

La justification donnée est basée sur la proposition (6, II) des Éléments et le théorème de Pythagore :

$AC.CB + IB^2 = IC^2$ (Prop 6, II)

Or : $IC^2 - IB^2 + DB^2$ (Pythagore)

Donc : $AC.CB = DB^2$

d'où : aire$(ACHK)$=aire$(ABDE)$

et alors : aire $(BCHF)$=aire$(KFDE)$

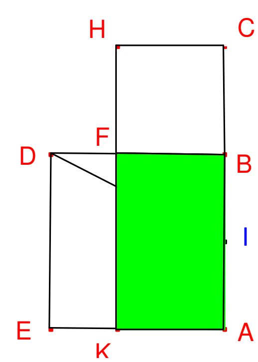


Figure 4 *- Interprétation géométrique de la proposition 11 du livre II des Éléments*

Cette dernière écriture est équivalente à : $BD.DF = (BD - DF)^2$ ou *ax=(a-x)²* où l'on a posé *a= DB et DF=x.*

Pour justifier sa procédure de construction, il est vrai qu'Euclide est amené à manipuler des nombres et des opérations sur ces nombres. Toutefois, ceux-ci sont intimement liés à des concepts géométriques, et les techniques de calcul utilisées restent peu développées et fondamentalement rhétoriques.

Le champ conceptuel, déjà bien installé en géométrie grâce aux apports théoriques des *Éléments*, contient implicitement les concepts algébriques qui ne seront découverts que douze siècles plus tard par les mathématiciens arabes par un changement de cadre, amorcé par Al-Khwârizmî.

Le champ syntaxique évolue parallèlement aux progrès réalisés dans le domaine du langage courant. Dans cette *algèbre rhétorique*, ni les opérations ni les inconnues ne sont représentées par des symboles, tout est écrit et communiqué verbalement en langue naturelle. Le champ sémiotique est fortement caractérisé par les figures géométriques accompagnant les preuves géométriques ainsi que par leurs dénominations lexicales et symboliques.

3. *Apports de Diophante au développement des praxéologies algébriques*

Grâce à sa méthode analytique, Diophante invente une théorie arithmétique nouvelle, considérée comme une *algèbre présymbolique*.

Sa méthode repose sur l'introduction d'une inconnue opérationnelle « arithme », notée ς, (Radford 1991), soigneusement reliée aux inconnues du problème et soumise aux mêmes traitements opérationnels que celles-ci. Cette façon de procéder favorise un changement conceptuel dans les activités de résolution de problèmes. Le langage construit par la symbolisation de l'*arithme* et des diverses catégories de nombres, conjuguée à une syntaxe convenable, a permis à Diophante de traduire les problèmes posés à l'aide d'expressions algébriques se prêtant au calcul formel sur *les espèces*[6] et qui aboutissent à des équations réduites donnant la valeur de l'inconnue opérationnelle et, par suite, celles des inconnues cherchées.

Les deux champs syntaxique et sémiotique se trouvent donc sensiblement enrichis, permettant ainsi une évolution importante des processus algébriques déployés.

Sur le plan sémiotique, Diophante réalise une avancée de taille en introduisant un symbolisme assez adéquat à une nouvelle classification des nombres par rapport à l'école pythagoricienne. Ainsi, ses « désignations abrégées » : Δ^{γ} pour les carrés, K^{γ} pour les cubes, $\Delta^{\gamma}\Delta$ pour les bicarrés, ΔK^{γ} pour les carrés-cubes et $K^{\gamma}K$ pour les cobo-cubes ont permis des manipulations aisées des *arithmes* lors des processus de résolution des problèmes. Par exemple, pour écrire l'expression $2\varsigma^3+\varsigma^2-5\varsigma+4$ où ς désigne l'*arithme*, il utilise les symboles précédents et place les coefficients à droite de chaque puissance de ς, M sépare la partie variable de la partie constante et le symbole $\pitchfork$ exprimant une différence. Il obtient alors l'expression :

$$K^{\gamma}\beta\,\Delta^{\gamma}\alpha\,M\delta \pitchfork \varsigma\varepsilon$$

Procédant de la sorte, il est donc en mesure de traduire en écriture abrégée les relations liant *l'arithme* aux données du problème et ouvre ainsi la voie à l'émergence d'une syntaxe spéciale facilitant un calcul formel en vue d'isoler l'inconnue et fournir la solution du problème proposé.

Toutefois, malgré sa relative efficacité, cette méthode présymbolique reste encore d'envergure limitée car elle ne se prête qu'à la mise en jeu pratique d'une seule variable. On pourrait faire l'hypothèse que Diophante était conscient de cette difficulté ce qui l'a amené à

[6] Monômes faisant intervenir les « arithme »

adopter une méthode se basant sur la recherche d'une seule inconnue (permettant, le cas échéant, de calculer les autres) : *l'inconnue opérationnelle* qu'est l'*arithme*.

Les praxéologies algébriques mobilisées sont articulées autour des types de tâches de résolution de problèmes nécessitant pour leur réalisation des techniques de modélisation à l'aide des inconnues opérationnelles et de manipulations d'écritures formelles sur les *arithme*s. Des éléments technologiques transparaissent implicitement dans la démarche diophantienne de calcul sur les espèces mais sans aucun support théorique notable.

Diophante introduit une méthode générale pour chaque type de tâches, qu'il expose sur un exemple générique (au sens de Balacheff), comme le montre l'exemple suivant (énoncé et solution du problème 27, Livre I, tels que traduits par Ver Eecke[7]) :

> « Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés »

Diophante procède par le traitement d'un exemple générique en choisissant des paramètres convenables (il cherche deux nombres *a* et *b* de somme 20 et de produit 96) :

> « Proposons que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités. »

Il choisit une inconnue opérationnelle :

> « Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes » : $(a – b = 2x)$

Il applique la première condition à savoir que la somme des nombres cherchés est 20, ce qui lui permet d'exprimer les nombres cherchés en fonction de l'arithme.

> « Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes »

Il trouve : $a = 10 + x$ et $b = 10 – x$:

Il applique maintenant la deuxième condition à savoir que le produit des deux nombres est égal à 96 :

> « Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités »

Il applique l'identité algébrique : $(10 + x)(10 – x) = 100 – x^2$ et obtient $100 – x^2 = 96$:

> « Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, »

Il réduit l'équation obtenue et la résout. Il trouve $x^2 = 4$ et en-déduit $x = 2$.

> « et l'arithme devient 2 unités ».

En remplaçant x par sa valeur, il obtient la solution du problème.

> « En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités».

Diophante n'oublie pas de vérifier que les nombres trouvés satisfont bien aux conditions du départ en disant:

> « et ces nombres satisfont la proposition ».

Cette technique de résolution diophantienne illustre la phase *syncopée* de l'histoire de l'algèbre. L'introduction et l'usage d'une lettre pour représenter une quantité inconnue permettent de résoudre des équations à une ou plusieurs inconnues. Mais les données des problèmes posés sont systématiquement remplacées par des nombres soigneusement choisis par Diophante et leur symbolisation par des lettres n'est pas encore amorcée.

---

[7] Cité in Radford, 1991, p. 4

L'invention de cet artifice heuristique -qu'est l'*arithme-* par Diophante, dénote une ouverture d'esprit et une maturité intellectuelle digne du courant novateur de *l'algèbre présymbolique* par rapport au courant « algébrique-géométrique » euclidien.

4. La période arabo-islamique : Naissance de l'algèbre des équations

Al-Khwârizmî (780-850) a le mérite de systématiser l'étude des équations de degré inférieur ou égal à deux et de la théoriser. On trouve dans son traité[8] :

- Une classification des équations quadratiques claire, logique et bien adaptée aux méthodes de résolution préconisées.
- Des techniques efficaces (*al-jabr*, *al-muqabala* et *al-hatt*) permettant de ramener toute équation à l'une des catégories annoncées dans sa typologie, ce qui favorise et donne du sens aux manipulations algébriques effectuées.
- Un algorithme de résolution étayé par des exemples numériques génériques et des justifications géométriques pour chaque catégorie d'équation.

Al-Khwârizmî distingue six types d'équations de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients positifs :

- Trois équations simples : $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$ et $bx = c$.
- Trois équations combinées : $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ et $ax^2 = bx + c$.

Ces équations sont toutes exprimées en phrases, l'usage des symboles numériques et littéraux étant inconnu à cette époque.

Nous voyons là une construction systémique du concept d'équation ainsi qu'une extension notable du champ cognitif lié aux praxéologies algébriques. Celles-ci sont toujours de nature algorithmique et visent la réalisation de tâches de résolution de problèmes, via des techniques de modélisation verbale et des procédures numériques appliquées sur des exemples génériques.

Le bloc technologico-théorique justifiant ces techniques de résolution est essentiellement constitué par les savoirs géométriques de l'époque, notamment ceux qui ont trait à la transformation et à la conversion des aires planes.

Pour expliquer ses méthodes et ses procédures de résolution, Al-Khwârizmî explicite pour chaque type un ou plusieurs exemples numériques. L'exemple suivant permet de suivre la procédure de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

> Les carrés plus les racines égalent un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré plus dix racines sont égaux à trente neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un carré quelconque une quantité égale à dix racines, le tout sera trente neuf.

La solution d'Al-Khwârizmî est la suivante :

> Partage en deux moitiés le nombre des racines, il vient dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même, on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois qui est la racine de carré que tu veux, et le carré est neuf.

Al-Khwârizmî s'appuie donc sur un exemple générique pour établir un algorithme de résolution des équations du type $x^2 + bx = c$ où b et c sont des nombres positifs donnés. Son algorithme de résolution est le suivant :

---

[8] Considéré comme un ouvrage de référence, ce traité est intitulé : *Al-kitab al-mokhtasar fi hisab al-jabr wal muqabala* (livre concis du calcul par les procédés de la restauration et de la réduction) et rédigé vers 825.

1. Prends la moitié du nombre des racines : 5
2. Multiplie ce nombre par lui-même : 25
3. Ajoute 39 au résultat : 64
4. Prends la racine de 64 : 8
5. De 8, soustrais la moitié du nombre des racines : 3
6. La racine est 3 et son carré est 9

Il propose une justification géométrique, dans laquelle il représente le nombre inconnu par une longueur géométrique : Partant du fait que le produit de deux nombres est représenté par l'aire d'un rectangle et le carré d'un nombre par l'aire d'un carré, il s'appuie sur la figure géométrique ci-contre, où la longueur AB désigne le nombre inconnu, pour justifier son algorithme de résolution (Abgral Ph., 2011-2012).

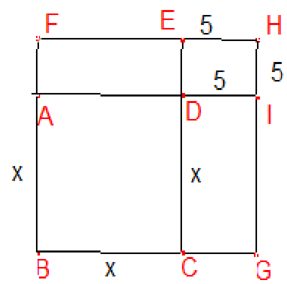


Figure 5 *- Interprétation géométrique de l'algorithme de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$ par Al-Khwârizmî*

ABCD désigne un carré de côté AB, ADEF un rectangle de dimensions 5 et AB et donc d'aire 5.AB, DCGI un rectangle de dimensions 5 et AB et donc d'aire 5.AB, le carré EDIH de côté 5 est donc d'aire 25. En écrivant l'aire du carré FBGH de deux manières (Aire d'un carré de côté (AB + 5) et somme des aires de deux carrés de côtés respectivement AB et 5 et de deux rectangles isométriques de dimensions AB et 5) On obtient :

$(AB + 5)^2 = AB^2 + 5.AB + 5.AB + 25$

$= AB^2 + 10.AB + 25$

$= 39 + 25$, car $AB^2+10.AB = 39$, d'après l'équation (E)

$= 64 = 8^2$ *d'où* $AB+5=8$ *et* $AB=3$

Sans citer Euclide, qu'il ne semble connaître au moment où il rédige son traité d'algèbre, Al-Khwârizmî a su exploiter les résultats géométriques, déjà connus des Babyloniens et en vigueur chez les artisans géomètres de son époque. Il a ainsi pu justifier tous les algorithmes de résolution des équations étudiées par des méthodes géométriques. Il inaugure un nouveau domaine mathématique (*l'algèbre des équations*) dans lequel vont s'engager les futurs mathématiciens arabes (Abù Kâmil, Al-Khayyâam, Ibn Qurrâ, Al-Karâjî, etc.) et italiens (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli et al.) d'abord en usant du langage courant, ensuite avec l'utilisation des lettres désignant les inconnues.

Abù Kâmil (850-930) rédige un traité qu'il intitule *Kitab al-jabr wa'l mùqabalà* dans lequel il expose les principale règles de l'algèbre d'Al-Khwârizmî et propose outre les problèmes types du second degré[9] de l'époque, d'autres problèmes présentés sous forme rhétorique et sans aucun symbole. Il en donne les algorithmes de résolution et les justificatifs géométriques en se basant sur les résultats des *Éléments d'Euclide.* Ainsi, il applique la proposition 6 du livre II des *Éléments* pour fournir une argumentation géométrique de la résolution de l'équation $x^2+10x=39$. En voici, ci-dessous la configuration géométrique sur laquelle est basée sa démonstration :

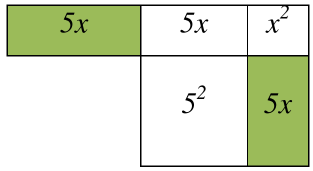


Figure 6 *- Interprétation géométrique de la résolution de l'équation* $x^2 + 10x = 39$ *par Abù Kâmil*

Abù Kâmil a donc eu le mérite d'intégrer l'ancienne tradition grecque avec les nouvelles trouvailles algébriques amorcées par Al-khwârizmî. Ceci n'a pas manqué de relancer les investigations portant sur la résolution d'équations algébriques de degrés supérieurs, les techniques du calcul algébrique sur les monômes et les binômes, les règles de calcul sur les radicaux etc.

Sur le plan syntaxique, le langage ordinaire reste de rigueur et, malgré l'introduction des symboles pour désigner l'inconnue ou ses puissances entières, il n'y a pas à proprement parler de manipulation d'expressions littérales où les lettres ont le statut de variable. Cependant, dans la démarche de résolution des équations, les algébristes maghrébins du XIIe siècle s'occupent de déterminer la valeur de la lettre «ش » représentant l'inconnue dénommée *shay*.

Dans cette étape de l'évolution des praxéologies algébriques, les manipulations verbales des expressions mathématiques n'étaient pas une fin en soi, mais elles étaient dictées par une nécessaire transformation des équations en vue de les résoudre, et par là, de proposer des solutions aux situations de la vie quotidienne qu'elles modélisent.

5. *La contribution de Viète à l'évolution des praxéologies algébriques*

Un des principaux avantages de la méthodologie analytique de Viète est l'obtention de formules générales et applicables à plusieurs situations, caractérisées par l'usage des paramètres littéraux, ce qui permet de conserver la trace de toutes les étapes du raisonnement et de se retrouver facilement lorsque l'on procède à un changement quelconque de ces paramètres. L'activité entreprise ne se réduit donc pas à la résolution d'un problème particulier, c'est plutôt une famille entière de situations qui se trouvent résolues par ce procédé. De plus, cette avancée dans l'évolution des praxéologies algébriques est illustrée par un processus tout à fait nouveau et efficace de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires etc.)

Viète a le mérite de développer l'algèbre en tant qu'outil au service de la résolution des problèmes, mais il montre par la même occasion qu'algèbre et résolution de problèmes (analyse ou art analytique) sont imbriquées au point de se confondre. En effet le développement de l'une favorise celui de l'autre, voire nécessite celui de l'autre, c'est la signification du titre donné à son œuvre *Introduction à l'art analytique ou algèbre nouvelle*.

[9] Ces problèmes concernent les six équations quadratiques figurant dans la typologie développée par Al-khwârimî.

En passant de *l'algèbre rhétorique* (en langage courant et sans aucun symbole) et de *l'algèbre syncopée* (en langage naturel mais avec l'usage de quelques abréviations pour désigner notamment les nombres inconnus) à *l'algèbre symbolique*, Viète réalise une rupture dans le processus du fonctionnement des praxéologies algébriques par un nouveau paradigme, ouvrant la voie à ses successeurs du XVIIe siècle, en particulier Descartes (1596-1650).

Pour illustrer cette nouvelle variante des praxéologies algébriques, nous présentons ci-dessous un exemple de résolution de problème par VIÈTE (Boyé 2003, p. 10):

Énoncé du problème 1 du livre I:

« Étant donné la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés. »

Solution de VIÈTE :

1. Il commence par symboliser les données et pose le problème en question :

   « Soit B la différence des deux côtés, et soit D leur somme. Il faut trouver les côtés. »

2. Il symbolise les inconnues et il traduit les hypothèses en les transformant ce qui lui permet d'établir des relations entre inconnues et données :

   « Soit A le côté le plus petit, donc le plus grand sera $A + B$. Pour cette raison la somme des côtés sera $2A + B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2A + B$ est égal à D. Et par antithèse, 2A sera égal à $D – B$, et tout étant divisé par deux, A sera égal à $\frac{D}{2}-\frac{B}{2}$.

   Soit E le côté le plus grand. Le plus petit sera donc $E – B$. Pour cette raison la somme des côtés sera $2E – B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2 E – B$ sera égal à D, et par antithèse $2E$ sera égal à $D + B$; et tout étant divisé par 2, E sera égal à $\frac{D}{2}+\frac{B}{2}$. »

3. Il expose la solution et s'assure de sa validité :

   « Donc la différence des deux côtés et leur somme étant données, les côtés seront trouvés.

   En effet, la moitié de la somme des côtés moins la moitié de la différence est égal au côté le plus petit ; les mêmes quantités ajoutées donnent le plus grand côté. C'était la recherche à faire. »

4. Il illustre ses trouvailles en donnant un exemple numérique :

   « Soit B= 40, D=100, A fait 30 et E 70. »

Les praxéologies algébriques ainsi développées sont articulées autour de types de tâches de résolution de problèmes en mobilisant des techniques de symbolisation des inconnues et des données, de modélisation des relations entre celles-ci par des écritures algébriques formelles et de résolution d'équations paramétriques en vue d'obtenir des solutions générales. Nous passons, à ce moment de l'histoire, de l'algèbre syncopée à l'algèbre symbolique avec l'usage des abréviations (« A quadratus ou Aq» pour A^2, « A cubus ou Ac» pour A^3, « in » pour la multiplication, « aequatur » pour l'égalité, etc.) (Boyé, 2003)
Mais Viète prend garde de respecter l'homogénéité des degrés dans une égalité entre expressions littérales en complétant par les termes « solido », « plano » comme c'est le cas dans l'écriture suivante :

« *A* cub + *B* plano in *A* aequatur *C* in *A* quad + *D* solido pour : $A^3 + BA = CA^2 + D$ »

Cette précaution prise par Viète illustre son attachement à l'interprétation géométrique euclidienne et aux mesures de grandeurs manipulées dans les formules, ce qui témoigne du stade encore embryonnaire de son algèbre, mais également d'une nécessité de l'époque. Cette lourdeur dans les écritures algébriques va être levée plus tard par Descartes en montrant que l'on peut construire une longueur égale au produit de deux autres et, qu'en conséquence, tout peut être ramené à la dimension 1.

Le langage et les notations se trouvent alors simplifiés et les nouveaux outils ainsi construits favorisent la mise en place de nouveaux concepts, entre autres celui de fonction - concept initié plus tard par Euler- par le biais d'écritures des solutions générales en fonction des données, devenant respectivement variables dépendantes et variables indépendantes.

Les concepts d'équation et d'inconnue ont atteint le niveau structural en tant qu'objets autonomes sur lesquels on peut intervenir et leur appliquer des procédures de toutes sortes et le champ syntaxique se trouve alors élargi.

6. *La nouvelle rupture opérée par Descartes : L'algébrisation de la Géométrie.*

En publiant son œuvre *La Géométrie* en 1637 comme appendice au *Discours de la méthode*, Descartes (1596-1650) opère une nouvelle rupture dans le processus du développement des praxéologies algébriques. Il préconise de ramener tout problème à la résolution d'équations algébriques.

> Tout les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les constructions. (Descartes , La Géométrie, édition 1637, p.297)

Ainsi, tous les problèmes de géométrie peuvent se réduire - par l'introduction d'un segment unité- à des calculs et des manipulations algébriques. C'est là l'idée-clé de Descartes sur laquelle sera fondé l'outil de sa méthode cartésienne qu'est la *Géométrie analytique*. Avec un flair pédagogique inouï, et un effort constant de *se rendre intelligible à tout le monde,* comme il le précise, il expose sa méthode de résolution :

- Première étape : Nommer les lignes de la figure en distinguant les lignes connues et les lignes inconnues.
- Deuxième étape : Mettre le problème en équations.
- Troisième étape : Résoudre les équations trouvées.

> Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation. (*Ibid*, p.300)

La première étape, appelée *analyse des anciens,* nous rappelle un procédé déjà utilisé par les géomètres Grecs (Pappus d'Alexandrie, IV^{è} S) pour résoudre des problèmes de construction géométrique et largement exploité par Viète dans son *art analytique*.

La deuxième et troisième étape, amorcées par les mathématiciens du siècle précédent (XV^{e}) avec l'usage d'un symbolisme assez réduit, sont alors étendues, avec Descartes, à des problèmes plus complexes et plus diversifiés tout en permettant de faire intervenir plusieurs inconnues et des paramètres. Ceci a eu pour conséquence de confronter les mathématiciens de l'époque à des difficultés calculatoires de plus en plus ardues et de les amener ainsi à développer davantage les techniques et les procédés du calcul algébrique.

7. *En guise de conclusion*

Cette étude historique des praxéologies algébriques nous a permis de constater que l'algèbre babylonienne était caractérisée par des algorithmes de calcul généralisables hors contexte métrologique et par l'apparition des premières techniques algébriques fondées sur une bonne maîtrise du sens des nombres, de leurs notations métrologique et positionnelle et de leurs usages dans la résolution des problèmes scolaires (au profit des apprentis-scribes) et de la vie courante.

Les Grecs ont eu ensuite une influence spécifique sur le développement des premières procédures algébriques initiées par leurs ancêtres, grâce à la rigueur du raisonnement qu'ils ont instaurée et par l'étayage géométrique des propriétés numériques accompagnant l'essor de la géométrie euclidienne.

Plus tard, l'introduction de l'inconnue opérationnelle (*arithme*) par Diophante d'Alexandrie, a permis d'insuffler un nouvel élan au processus de résolution des problèmes algébriques en les modélisant par des écritures symboliques se prêtant au calcul formel sur les espèces.

Les mathématiciens arabes ont continué le développement des praxéologies algébriques en systématisant l'étude des équations et justifiant les algorithmes de résolution par des preuves géométriques.

Six siècles plus tard, Viète invente l'art analytique et donne à l'algèbre un nouveau statut opérationnel avec la démarche analyse-synthèse.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisé :

Le premier obstacle franchi est celui de l'écriture. Sans elle, il n'aurait pas été possible ni de communiquer ni de laisser trace de quelques œuvres que ce soient. Ensuite l'algèbre *numéreuse* prend place et se développe rendant d'importants services aux collectivités humaines qui commencent à se sédentariser et éprouver des besoins vitaux d'organisation et de gestion. Mais la complexité des problèmes rencontrés a fait que les exemples algorithmiques ont vite trouvé leur limite et demeurent insuffisants pour répondre aux nouvelles exigences de la vie économique et sociale. Un élan vers la généralisation et l'argumentation est alors exigé.

Avec l'avènement de *l'algèbre géométrique* des Grecs, une rupture eut lieu. Pour résoudre des problèmes de calcul de grandeurs, il n'est plus maintenant question d'appliquer des recettes toutes faites et de justification douteuse, mais il faut désormais démontrer la validité des propositions dans le cadre d'une axiomatique structurellement fondée sur des définitions et des postulats bien délimités.

Plus tard, *l'algèbre formelle* s'est construite progressivement au cours des deux millénaires qui suivent. Mais elle n'est apparue, à un aucun moment de sa genèse, artificielle ni accessoire, elle est dûment exigée par la nature même des problèmes posés (problèmes concrets ensuite équationnels et structurels) ainsi que par la recherche de meilleurs moyens permettant de les résoudre.

Nous résumons à présent cette étude diachronique des praxéologies algébriques en mettant en exergue les caractéristiques épistémologiques des principales phases marquant leur évolution :

La Mésopotamie (Période paléo babylonienne)	XX^e siècle Av. J.C.	***Pré-algèbre algorithmique*** *:* *Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.*
La Grèce antique: Les Éléments d'Euclide, livre II	III^e Av. J.C	***Pré-algèbre géométrique*** *:* *-Calcul de grandeurs géométriques (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations).* *-Rigueur dans les processus d'argumentation.*
Diophante d'Alexandrie	III^e siècle Ap. J.C.	***Arithmétique présymbolique syncopée****:* *-Méthode de l'inconnue opérationnelle (l'arithme).* *-Calcul sur les espèces.*
Al-Khwârizmî	780-850	***Algèbre des équations*** *:* *-Procédés d'al-jabr et al-muqâbala.* *-Algorithmes de résolution justifiés géométriquement.*
Abù Kâmil **Al-Karâjî** **Al-Khâyyâm**	850-930 953-1029 1050-1123	***Arithmétisation de l'algèbre*** *Généralisation des opérations arithmétiques aux expressions monômes et aux polynômes.*
Viète	1540-1603	***Algèbre littérale (spécieuse)*** *:* *-Calcul algébrique abstrait.* *-Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique (analyse/synthèse).*
Descartes	1596-1650	***Algébrisation de la Géométrie***

Tableau 2*- Les principales étapes historiques de l'évolution des praxéologies algébriques*

Suite à cette analyse historico-épistémologique, il apparait que, lors de sa genèse, l'algèbre s'est progressivement constituée, au fil du temps, comme un outil et une démarche de résolution de problèmes. De façon plus précise, en suivant le parcours de la conceptualisation, de la syntaxe et de la sémiotique algébriques, des Babyloniens à Viète en passant par Euclide, Diophante et Al-Khwârizmî, nous nous rendons compte que l'algèbre a lentement évolué vers un langage formel permettant de modéliser des situations-problèmes et de les résoudre via un calcul littéral approprié ; l'étude de ses concepts, en tant qu'objets de savoir, n'est venue que plus tard. Il est donc primordial de privilégier le travail de modélisation et les dialectiques Outil/Objet (Douady 1986) et Opératoire/Prédicatif (Vergnaud 1990) tout au long du curriculum, si l'on veut gagner le pari de donner sens aux activités algébriques et de favoriser une interaction intégrative des différents domaines des mathématiques. Mais ceci présuppose une autre façon d'envisager l'enseignement/apprentissage de l'algèbre et nécessite un plus grand effort en ingénierie didactique génératrice de situations ajustées à cette fin ; c'est ce qui constitue une véritable perspective de recherche en didactique de l'algèbre.

IV. PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

Au cours de ce travail de recherche, nous nous sommes intéressés à l'origine de l'algèbre élémentaire enseignée en première année du cycle secondaire tunisien. Notre objectif était de questionner les fondements épistémologiques de cet objet de savoir afin de mieux connaître les sources des difficultés des élèves et d'être ainsi en mesure de proposer les solutions didactiques qui conviennent.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisée.

Ceci nous a révélé maintes caractéristiques épistémologiques de l'algèbre élémentaire dont nous citons ci-après les principales :

- L'algèbre est structurellement et fonctionnellement attachée aux activités de résolution de problèmes qui constituent sa véritable raison d'être et son ultime champ d'application
- Le développement des compétences algébriques nécessite la levée de l'obstacle du raisonnement arithmétique en assumant une rupture épistémologique *arithmétique-algébrique*.
- Prenant naissance dans le champ numérique, l'algèbre n'a pu s'en détacher qu'au prix d'une double transition : *procédural-structural* et *numérique- littéral.*

Nous nous demandons, enfin, si nous pouvons envisager une autre alternative curriculaire permettant de conjuguer les deux aspects conceptuel et opérationnel de l'algèbre dans une perspective dynamique et didactique et si nous pouvons faire en sorte que l'apprentissage de l'algèbre élémentaire soit une réponse pertinente à un besoin éprouvé par les apprenants, *in situ,* lorsqu'ils sont confrontés à un problème intra- ou extra-mathématique. Certaines réponses, à ces questions, pourraient faire l'objet de recherches futures.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, *Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Marrakech, 30-31 Mai et 1er Juin 2002.

Abgral Ph. (2011-2012) *Histoire des mathématiques*, Cours de Mastère M1, ISEFC, Tunis.

Achour S. (2005) *L'introduction des fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : Quelles alternatives possibles ?*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Ben Nejma S. (2006) *Étude des rapports institutionnel et personnel aux équations via la mise en équation de problèmes en première année secondaire tunisien (3è en France) : Évolution de ces rapports dans la transition collège/lycée*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Boyé A. (2003) *François Viète, inventeur de l'algèbre*. IREM, Pays de la Loire.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques* 12, 73-112.

Descartes R. (1637) *La Géométrie*, livre premier, édition 1637 publiée dans *The geometry of Rene Descartes* de David Eugene Smith et Marcia L. Latham.

Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des Mathématiques* 7(2), 5-32.

Guichard J. P. (2000) Qu'est-ce que l'algèbre ? Un domaine ou un langage ?, L'algèbre au lycée et au collège, *Publication de l'IREM de Montpellier*, p. 40-57.

Høyrup J. (2002) *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin, studies and sources in the history of mathematics and physical sciences*. Berlin & Londres, Spinger.

Kouki R. (2004) *La logique des prédicats comme cadre d'analyses didactiques : Le cas des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle au début du secondaire*, mémoire de mastère, ISEFC TUNIS.

Peyrard F. (1819) *Les œuvres d'Euclide traduites littéralement*. Paris, 1819 ; Réimpression Librairie A. Blanchard, Paris, 1993.

Proust C. (2006) Mathématiques en Mésopotamie, *Culture-Math*, ENS Ulm - DESCO, 2006.

Radford L. (1991) Diophante et l'algèbre présymbolique, *Bulletin AMQ*.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques* 10(2-3), 133-170.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DÉCIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE ET ENVIRONNEMENT ALGÉRIEN

Mounira IGHIL AMEUR* – Rachid BEBBOUCHI**

Résumé – Les compétences futures des élèves concernant les nombres décimaux se jouent à l'école primaire ; cela a poussé de nombreux didacticiens à faire des recherches dans ce domaine. Nous nous sommes intéressés dans notre travail à l'enseignement des décimaux à l'école primaire algérienne, et en analysant les manuels scolaires officiels nous avons constaté que l'enseignement des décimaux en Algérie est basé essentiellement sur une approche numérique, et afin d'en faciliter l'apprentissage, nous avons fait quelques remarques et propositions.

Mots-Clefs : nombre décimal, fraction décimale, fraction ordinaire, approche numérique, approche par mesures

Abstract – The future competences of students concerning decimal numbers is played in primary school; this pushed many didacticians to make research in this area. We are interested in our work in the education of decimals in the Algerian primary school , and by analyzing official scholar books we noticed that the education of decimals is essentially based on a numerical approach. We give some remarks and suggestions in order to facilitate the learning of decimal numbers.

Key-words : decimal number, decimal fraction, ordinary fraction, numerical approach, approach by measures.

I. INTRODUCTION

Tout en étant une étape incontournable dans l'acquisition de notre culture mathématique, les nombres décimaux font partie de notre environnement. Ils servent à exprimer des mesures. Les exemples sont nombreux dans notre vie quotidienne (longueur, masse, température,…...). Malheureusement, des obstacles sont rencontrés lors de leur apprentissage, ce qui crée des difficultés pour l'utilisation de ces nombres par les élèves.

Une étude en France faite en 1998 a montré que sur 1742 élèves français de la troisième année de l'enseignement secondaire général, seulement 74,6% étaient capables d'ordonner correctement les nombres suivants 8,10 – 8,01 – 8,121 et 8,6. Alors qu'en est-il des élèves du primaire ?

* Usthb – Algérie -iamaths@yahoo.fr
** Usthb – Algérie- rbebbouchi@hotmail.com

Ighil Ameur M., Bebbouchi R. (2015) Enseignement des nombres décimaux a l'école primaire et environnement algérien. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 403-410.

Cela nous pousse à penser à une approche réfléchie qui facilite l'enseignement de ces nombres que nous appelons les DECIMAUX.

II. UNE PETITE HISTOIRE DES NOMBRES DECIMAUX (LE PASSAGE A LA VIRGULE)

Les avancées les plus précoces vers les nombres décimaux ont été faites par les savants arabes. Le premier manuel arabe connu pour avoir présenté les nombres décimaux est *Kitab al fusul fi-l-hisab al hindi* écrit par Ibrahim al Iqlidisi (920-980). Ce dernier les notait avec les chiffres indiens d'une manière semblable à celle de nos jours, mais surmontée d'un trait : le nombre 89 ,532 par exemple se notait $\overline{89'532}$.

Il explique que sa notation sans dénominateur permet d'effectuer plus rapidement les multiplications et les divisions en passant par les puissances de 10(non encore définies comme telles).

Deux siècles plus tard, Yahya al Samaw'al (1130-1180) indique qu'en faisant une division ou en calculant la racine carrée d'un nombre, on peut aller au-delà des entiers. Il utilise un tableau pour montrer que le chiffre des unités est une séparation entre les chiffres des dizaines, des centaines…... et les chiffres des dixièmes, des centièmes……

En 1427, le célèbre astronome de Samarkande, Jemshid al Kashi, affirme dans *Miftah al-hisab (La clé de l'arithmétique)* avoir découvert les fractions décimales. Il expose leur théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales.

Par ailleurs, il montre l'analogie des calculs dans les systèmes de numération décimale et de numération sexagésimale et donne les règles de conversion d'un système à l'autre. Al-Kashi utilise les nombres décimaux dans la résolution de quelques problèmes algébriques et dans les calculs d'aires et incite à leur usage pour la vérification des calculs dans le système sexagésimal.

Si les nombres décimaux tardent à venir en Occident**,** c'est tout simplement parce que l'écriture décimale des nombres a mis du temps à s'imposer. En 1579 , François Viète (1540-1603) incite l'usage des fractions décimales plutôt que celui des fractions sexagésimales .

C'est au belge Simon Stevin (1548-1620) qu'on attribue la découverte des nombres décimaux, et ceci pour deux raisons essentielles, d'abord parce qu'il semble que Stevin ait conçu sa théorie indépendamment des travaux antérieurs réalisés par les savants arabes, ensuite parce que le système de Stévin s'est répandu d'une façon très rapide et a été adopté en une dizaine d'années.

L'ouvrage de référence s'intitule « La Disme ». Stevin l'a écrit en 1585 sous la forme d'une petite brochure de trente-six pages. Il note par exemple le nombre 89,532 : 89(0)5(1)3(2)2(3)

L'avantage de cette écriture est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers.

En 1592, un italien, Giovanni Antonio Magini (1555-1617), propose une notation proche de la nôtre et qui est encore utilisée dans les pays anglo-saxons : 89.532. En 1595, le suisse Jost Bürgi (1552-1632) fait surmonter le chiffre des unités par un petit rond : 89°532

C'est au début du XVIIème siècle que le néerlandais Willerbrord van Roijen Snell (1530-1626), aussi connu sous le nom de Snellius, puis l'écossais John Napier (1550-1617), utilisèrent la virgule dans l'écriture des nombres décimaux.

III. UN ETAT DES LIEUX DANS LE SYSTEME EDUCATIF ALGERIEN :

L'enseignement des nombres décimaux dans l'école primaire algérienne commence à partir de la quatrième année, la cinquième année étant la dernière année de l'enseignement primaire (élèves de 9 à 11 ans) ; il s'appuie essentiellement sur une approche numérique.

Le manuel scolaire de quatrième année comporte quatre cours sur les nombres décimaux précédés de trois cours sur les fractions :

Cours N°1 : intitulé « La partie entière et la partie décimale » (p. 100–101)

Objectif : Découvrir les fractions décimales.

Cours N°2 : intitulé « Nombres décimaux 1 » (p.102–103)

Objectif : Ecriture avec la virgule des fractions décimales.

Cours N°3 : intitulé « Nombres décimaux 2 » (p.104–105)

Objectif : Ordonner et comparer des nombres décimaux.

La règle graduée est introduite.

Cours N°4 : intitulé « Nombres décimaux N3 » (p.110–111)

Objectif : Additionner et soustraire des nombres décimaux.

Le manuel scolaire de cinquième année[3] comporte huit cours sur les nombres décimaux précédés de quatre cours sur les fractions :

Cours N°1 : intitulé « Nombres décimaux 1 » (p.54–55)

Objectif : Définir les nombres décimaux comme une deuxième écriture de fractions décimales.

Cours N°2 : intitulé : « Nombres décimaux 2 » (p.56–57)

Objectif : Rencontrer les nombres décimaux par une situation de mesure (longueur)

Cours N°3 : intitulé : « Nombre décimaux 3 » (p.60–61)

Objectif : Ordonner et comparer des nombres décimaux

Cours N°4 : intitulé : « Nombres décimaux 4 » (p.64–65)

Objectif : Découvrir que fraction décimale et nombre décimal étaient deux écritures de même nombre

Cours N°5 : intitulé : « Nombres décimaux 5 » (p.66–67).

Objectif : Additionner et soustraire des nombres décimaux.

Cours N°6 : intitulé : « Nombre décimaux 6 » (p.73–74)

Objectif : Multiplier un nombre décimal par un nombre naturel

Cours N°7 : intitulé : « Nombres décimaux 7 » (p.75–76)

Objectif : Multiplier un nombre décimal par 10,100,1000.

Cours N°8 : intitulé : « Nombres décimaux 8 » (p.94–95)

Objectif : Diviser un nombre décimal par 10,100,1000

L'analyse des livres scolaires officiels de la quatrième et de la cinquième année montre que l'apprentissage des nombres décimaux est basé sur le champ numérique. Ces ouvrages s'intéressent d'abord aux fractions ordinaires, puis aux fractions décimales. Les nombres décimaux sont définis comme une deuxième écriture des fractions décimales et sont ensuite situés sur la droite numérique graduée. Cette droite permet aux élèves de comparer des nombres décimaux.

Dans le livre scolaire officiel de quatrième année, l'approche est exclusivement numérique. Aucune référence aux grandeurs n'est indiquée. Pour étudier les nombres décimaux vingt activités ont été proposées et aucune d'entre elles ne fait appel à la mesure de grandeurs. Par contre, dans le livre de cinquième année, le concept de prix apparait dans quelques activités, ainsi que des situations de mesures de grandeurs telle que la longueur, ce qui permet d'approfondir les connaissances des élèves. En fin de cycle primaire, les élèves sont théoriquement capables de :

- placer des nombres décimaux dans le tableau du système décimal de position
- placer les nombres décimaux sur la droite numérique graduée
- ordonner et comparer des nombres décimaux
- additionner et soustraire des nombres décimaux
- multiplier un nombre décimal par 10, 100, 1000
- diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000
- et multiplier un nombre décimal par un entier naturel

IV. QUELQUES REMARQUES SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE ALGERIENNE

En analysant les livres scolaires officiels de quatrième et cinquième année, on constate que les fractions et les nombres décimaux sont les deux apprentissages importants dans le domaine des nombres, mais un lien immédiat est mis entre fraction et nombres décimaux, ce qui ne laisse pas le temps à un enfant de bien maitriser les fractions.

Montrer que fraction et nombre décimal étaient deux écritures d'un même nombre n'a pas été un objectif que l'élève devait atteindre en fin de cursus primaire mais un apriori avec lequel il démarre son apprentissage.

L'utilisation du contexte monnaie a facilité l'apprentissage des nombres décimaux (dans quelques cas), par exemple dans les pays qui utilisent l'euro. Beaucoup d'enseignants ont affirmé qu'après l'arrivée de l'euro, les élèves comprennent plus vite les nombres décimaux. Mais, dans l'enseignement algérien, l'utilisation des prix ne contribue plus à approfondir les connaissances des élèves car, ces dernières années, après la dégradation de la valeur du dinar algérien, des prix du style 480,60DA, 68,03DA ne représentent plus des valeurs correctes sur le marché algérien (alors qu'on remarque que dans le livre de cinquième année plusieurs activités ont été proposées). Seul l'exemple du prix des médicaments mentionné sur les vignettes reste valable, des nombres à virgule y figurent.

Après la réforme du système éducatif faite par le Ministère de l'Education Nationale en 2003et basée sur l'approche par compétences, des cours sur l'utilisation de la calculatrice sont proposés, ce qui permet à l'élève de rencontrer les nombres décimaux en faisant des divisions.

Les cours de soutien de mathématiques pour les élèves, particulièrement ceux du primaire, sont devenus un phénomène qui s'est propagé d'une façon spectaculaire ces dix dernières années dans notre environnement algérien. Est-ce là la preuve que les élèves rencontrent des difficultés d'apprentissage à l'école ?

L'enseignement des nombres décimaux a évolué dans le monde, des logiciels ont été développés pour améliorer leur apprentissage. Malheureusement, pour des raisons économiques, une telle technique est loin d'être applicable dans plusieurs de nos écoles algériennes.

L'arabisation des mathématiques dans le système éducatif algérien, qui a été faite par des inspecteurs, a causé des difficultés d'apprentissage chez les élèves. Par exemple, pour le cas de la lecture des nombres décimaux :

125,53 est lu en arabe : cent, cinq et vingt virgule trois et cinquante.

125,03 est lu en arabe : cent, cinq et vingt virgule zéro trois.

Une telle lecture crée des confusions chez les élèves et ne peut être imputée à la traduction arabe.

V. UNE APPROCHE DIDACTIQUE DES NOMBRES DECIMAUX

L'analyse de quelques manuels scolaires belges, français, suisses et allemands faite par une équipe du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques CREM, a montré que les approches des nombres décimaux pouvaient être variées. On peut regrouper ces manuels en quatre catégories :

Les manuels qui se basent essentiellement sur une approche numérique

Ces manuels procèdent parfois avec des approches différentes, certains s'intéressent d'abord aux fractions ordinaires puis aux fractions décimales et l'équivalence entre un nombre décimal et une fraction décimale est ensuite donnée ce qui est le cas par exemple pour la collection « A la conquête des maths », les auteurs proposent pour la première activité d'apprentissage une fiche où les élèves doivent (relier les fractions aux nombres décimaux), puis(relier chaque nombre décimal à sa situation sur la droite graduée), d'autres manuels n'insistent pas immédiatement sur les liens entre les fractions et les nombres décimaux. Les nombres décimaux naissent de l'extension du système décimal de position par la suite des fractions et des nombres décimaux étant situés sur une droite graduée, des égalités vont apparaitre (l'écriture en fraction d'un nombre décimal et son écriture avec la virgule sont situées au même endroit sur la droite graduée).

Les manuels qui se basent essentiellement sur les mesures de grandeurs

Ces manuels s'appuient sur l'approche par les mesures qui est bien évidement importante et ne peut être absente d'un dispositif d'enseignement des nombres décimaux, ce qui est le cas par exemple pour la collection « Faire les maths ».Les auteurs proposent dès la première page une situation où les nombres décimaux sont solutions de calculs de prix en euros. Les élèves doivent lire des étiquettes où le prix et le poids sont exprimés par un nombre à virgule. Il leur est ensuite demandé d'écrire les poids dans l'abaque, puis avec la virgule. Des situations de mesures de longueur et de transformation de l'unité permettent aussi d'approfondir les connaissances des élèves.

Les manuels qui s'appuient sur ces deux domaines complémentaire

La collection « Corome » et la collection « J'apprend les maths » s'appuient sur une approche mixte et complémentaire. La collection Corome propose une situation numérique à partir de laquelle les élèves vont constater que les nombres naturels, ne suffisent plus à résoudre des situations d'addition ou de soustraction. Ensuite des situations font appel à la mesure de grandeurs ou à la multiplication de nombres à l'aide de la calculatrice. Le lien avec les fractions n'apparait que plus tard dans le cursus. Celui-ci est construit à partir de la droite numérique.

Les manuels qui ne déterminent pas de choix mais juxtaposent des activités

Les auteurs de la collection « Archi m'aide » et « Cracks en maths » ne définissent pas vraiment une approche structurée.

Les difficultés d'apprentissage des nombres décimaux ont été étudiées par des didacticiens et des chercheurs (notamment Brousseau , Douady) et vers 2007, certains s'interrogent encore sur l'intérêt d'une approche réfléchie des nombres décimaux pour permettre aux élèves de comparer , ordonner des nombres décimaux et opérer sur ces nombres plus facilement qu'auparavant .

On constate que la notion de nombre décimal ne peut naître ni exclusivement de la notion de système décimal de position, donc du contexte numérique, ni exclusivement de la mesure de grandeur. Pour rencontrer les nombres décimaux, on a choisi de proposer aux élèves une situation qui leur pose problème, une situation qui crée un déséquilibre au niveau de leurs savoirs, de leur conception. On a proposé par exemple de travailler sur les aires des carrés oǔ on demande de trouver la longueur du côté d'un carré dont l'aire est 8cm².

On propose donc aux élèves une situation problème pour laquelle les nombres naturels ne suffisent pas. Pour pouvoir la résoudre, il est nécessaire aux élèves d'en utiliser d'autres : Les Nombres Décimaux.

Cette même équipe de recherche a développé, en collaboration avec un groupe d'informaticiens, un outil informatique d'évaluation diagnostique nommé : DECIVAL.

Ce logiciel permet de mettre en évidence la manière avec laquelle les élèves traitent des tâches relatives aux nombres décimaux.

DECIVAL propose des tâches relatives à :

- La comparaison de deux nombres décimaux (l'ordre).
- L'addition de deux nombres décimaux.
- La soustraction de deux nombres décimaux.
- La multiplication de deux nombres décimaux.

L'utilisation de ce logiciel figure actuellement dans le programme scolaire français.

Et afin de remédier à certaines difficultés rencontrées par les élèves du primaire lors de l'apprentissage des nombres décimaux, ce serait intéressant de privilégier, dans un premier temps, le travail sur le sens pour amener ensuite la technique et l'automatisation, et comme les nombres décimaux sont rarement vus comme une partie de plaisir chez les élèves de primaire, ce serait intéressant aussi d'ajouter un coté ludique aux activités . Plusieurs activités qui se basent sur le jeu ont été proposées par (Brissiaud 2012, pp.38-93).

VI. L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE ALGERIENNE DE 1830 A NOS JOURS

Les travaux de S. Stevin amènent les mathématiciens et les autorités universitaires en Europe à s'intéresser à l'enseignement des nombres décimaux dés le seizième siècle.

Selon G. Brousseau, il a fallu deux siècles pour franchir le pas, et un siècle encore pour que cela soit traduit dans des pratiques d'écoles, où ce sont essentiellement les mécanismes indépendamment des justifications mathématiques qui sont enseignés.

De 1830 à nos jours, l'enseignement des nombres décimaux a évolué, mais il n'est devenu applicable aux algériens qu'après l'élargissement à l'Algérie des lois dites « lois de Ferry »en 1883, car de1830 à 1883 plus de 90% des algériens ont dû suivre leurs études dans les mosquées et les zaouiates. (Kadri 2007, pp.19-39).

Dans les premiers programmes, les poids et les mesures constituaient un champ privilégié pour l'apprentissage des nombres décimaux car dans cette période là, l'enseignement des mathématiques à l'école primaire avait pour objectif de préparer à la vie courante, les élèves quittaient tôt l'école pour aller travailler avec ou pour leurs familles. Après les guerres, en plus de la préparation à la vie courante, il s'est avéré nécessaire d'ajouter une préparation à la poursuite des études.

A la fin des années soixante, les mathématiques modernes apparaissent dans les programmes et suite à la révolution structuraliste des mathématiques, le lien entre les nombres décimaux et plus globalement les rationnels et les grandeurs, s'appauvrit : l'approche numérique est donc privilégiée.

Dans les années 1980, après la réforme du système éducatif algérien faite après l'indépendance (création de l'école fondamentale) et après l'abandon de la réforme dite « mathématiques modernes », le travail à partir des problèmes s'accentue, le rapport à la vie quotidienne comme élément de découverte est à nouveau mis en avant (on s'appuie donc sur une approche mixte).

Lier les mathématiques à la résolution des problèmes de la vie courante reste une préoccupation dans les derniers programmes parus après la réforme faite en 2003 basée sur l'approche par compétences, mais cette fois tout en emmenant les élèves à s'interroger et à réfléchir sur des « questions de structure ».

VII. NOS PROPOSITIONS

Pour améliorer l'apprentissage des nombres décimaux dans l'école algérienne il faut agir sur leur enseignement initial. Pour cela, nous proposons :

- d'introduire les nombres décimaux en quatrième année comme nombres à virgules sans faire appel à des fractions, une notion que les élèves voient aussi pour la première fois, tout en respectant l'approche didactique citée ci-dessus, et de laisser « l'équivalence entre un nombre décimal et une fraction décimale » comme un objectif à atteindre en fin de cinquième année.

(un élève de primaire est plus à l'aise devant un nombre à virgule que devant une fraction).

- d'agir sur les activités proposées aux élèves en faisant un choix réfléchi pour permettre aux élèves de construire des savoirs persistants.
- d'agir au niveau de la formation des enseignants (initiale et continue) car il est utile qu'ils aient en tête les différentes approches possibles et qu'ils puissent ajuster leur activité enseignante en fonction des difficultés des élèves, et il est nécessaire aussi que les enseignants puissent distinguer les difficultés « normales » des difficultés dues aux obstacles didactiques, et plus particulièrement aux obstacles épistémologiques .

Et pour conclure, nous confirmons ce qu'a dit N. Rouche que s'il est vrai que toute théorie répond à une question, ne nous arrive-t-il pas trop souvent d'enseigner les réponses ? C'est-à-dire la théorie avant les questions, avant que les élèves aient suffisamment éprouvé la nécessité de la théorie.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2005) *Les arithmétiques arabes*. Tunis : Collection quol lana.

Brissiaud R. (2012) *Apprentissage des fractions et des décimaux*. Polynésie Française : PIUFM 2012.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble France : La pensée sauvage.

Grégoire J., Michaux C., Rouche N., Desmet L., Skilbecq P., Fanuel J., Soille S., Pliez G., Randour M. (2010) *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux*. Nivelles : Rapport final d'une recherche CREM 2010.

Kadri A. (2007) *Histoire du système d'enseignement colonial en Algérie*. Lyon : ENS éditions.

Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

Saidan A.S. (1985) *Uklidisi , al-fusul-fi-l-hisab al-hindi (les sections sur le calcul indien).* Alep : Université d'Alep, institut d'histoire des sciences arabes.

Http://www.maths-et-tiques.fr/ : un site Web.

MANUELS SCOLAIRES

Livre scolaire algérien de quatrième année : les maths dans notre vie. ONPS avril 2006.

Livre scolaire algérien de cinquième année : les maths dans notre vie. ONPS mars 2007.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES ENVIRONNEMENTS MATHÉMATIQUES ET LES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS DANS L'HISTOIRE

Slim MRABET*

Résumé - Le théorème de Thalès a résisté à tous les changements d'axiomatiques dans l'histoire des mathématiques et a profité de la diversité des formes avec lesquelles il peut être formulé pour évoluer dans des environnements mathématiques divers. L'analyse de certains traités de chercheurs qui ont marqué l'histoire montre les conditions d'apparition de ce théorème et l'évolution de certaines démonstrations qui lui sont associées, à des époques différentes de l'histoire des mathématiques et de son enseignement. Nous montrons comment certains chercheurs ont été confrontés à des obstacles epistémologiques, et soulevons la question de l'incommensurabilité qui a souvent été rencontré.

Mots-clefs : Théorème de Thalès, démonstration, commensurable, obstacle, triangles semblables

Abstract – Thales theorem has resisted to all changes of axiomatics in mathematics history. It took advantage of the diversity of forms with which it can be made, to evolve in different mathematical environments. The analysis of some treaties of researchers that have marked the history shows the conditions of appearance of this theorem and the evolution of its demonstrations, at different times of mathematics history and its teaching. We show how some researchers have been facing to epistemological obstacles, and raise the question of the incommensurabilite which has often been met.

Keywords: Thales theorem, demonstration, commensurable, obstacle, similar triangles

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous choisissons d'étudier le théorème de Thalès pour des raisons multiples. Citons essentiellement que ce thème a résisté à tous les changements d'axiomatiques dans l'histoire des mathématiques, et que chez plusieurs chercheurs, depuis les Eléments d'Euclide, son évolution a été confrontée à des obstacles épistémologiques. En didactique, plusieurs recherches ont montré que c'est un moment redoutable d'enseignement, aussi bien pour les élèves que pour les enseignants.

L'intérêt de l'étude épistémologique que nous menons dans ce travail provient du fait que les choix d'enseignement effectués peuvent contribuer au dépassement, ou au contraire, au renforcement, de difficultés d'ordre épistémologique. Nous pensons également que la genèse historique d'une connaissance pourrait contribuer à une interprétation mieux fondée des difficultés remarquées chez les élèves. Selon Arsac (1987), il est important d'étudier la genèse historique d'une démonstration vu qu'on est amené à la reproduire en classe. Même si dans

* Université de Gafsa - Tunisie- mrabet_slim@yahoo.fr

Mrabet S. (2015) Les environnements mathématiques et les démonstrations du théorème de Thalès dans l'histoire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 411-423.

l’enseignement actuel il n’est pas toujours possible d’expliciter les moyens de la rigueur, il semble que dans le cas du théorème de Thalès, on ne peut pas cacher un point important : celui de la difficulté des rapports incommensurables.

L’étude des conditions d’apparition du théorème de Thalès et des différentes démonstrations qui lui sont associées nous fournit des éléments de réflexion sur la place du numérique dans le géométrique. Dans ce travail, nous commencerons par pointer dans l’histoire sur des évolutions dans la vision de la géométrie et dans la démonstration. Nous analyserons ensuite quelques démonstrations du théorème de Thalès proposées à des époques différentes de l’histoire des mathématiques et de son enseignement.

Nous choisirons d’analyser, pour le thème qui nous intéresse, quelques traités d’auteurs qui ont marqué l’histoire et qui ont eu une influence à une période donnée, sur l’enseignement des mathématiques. Nous commencerons par préciser, brièvement, les orientations générales et les caractéristiques de la géométrie chez chaque auteur, puis, nous nous focaliserons sur le théorème de Thalès, préciserons les concepts qui ont contribué à son élaboration, et sa démonstration en l’inscrivant dans un cadre plus large, celui de l’axiomatique de la géométrie qui caractérise cet auteur.

Il s’agit des traités d’Euclide, d’Arnaul, de Legendre, et d’Hadamard. Nous nous référerons également à un exemple de démonstration du théorème de Thalès extrait d’un manuel scolaire, et qui caractérise une axiomatique particulière de la géométrie.

II. LES ELEMENTS D’EUCLIDE (VERS 300 ANS A.V J.C)

Notons d’abord que dans l’étude des démonstrations du théorème de Thalès, notre but n’est pas de juger de la possibilité de les enseigner de la même manière. Il est clair que souvent, elles ont un niveau d’abstraction qui dépasse celui des élèves. Le but est surtout d’étudier l’évolution de la niche écologique dans laquelle le théorème de Thalès vit et de découvrir les obstacles épistémologiques qui ont accompagné et qui ont expliqué cette évolution.

1. *La géométrie chez Euclide*

Les *Eléments* d’Euclide constituent un moment important de l’évolution de la géométrie. Dès l’Antiquité, ils étaient considérés comme un moyen de rompre avec l’appréhension perceptive dominante à ce moment. Caractérisé par une axiomatique qui se veut rigoureuse, par sa rigueur et par son enchaînement logique, le traité d’Euclide prend appui sur le monde sensible, et utilise des raisonnements logiques tout en ayant souvent recours à des procédés empiriques. La géométrie d’Euclide s’est basée sur la théorie des proportions d’Eudoxe pour faire face à la crise provoquée par les irrationnels apparue en lien avec le théorème de Pythagore, ce qui a permis d’éliminer le recours aux nombres autres que les entiers. Dans le traité d’Euclide, un des objectifs essentiels est d’établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l’espace) et des proportions.

Pour traiter les situations relatives aux triangles et plus généralement aux polygones et à différentes courbes et surfaces, Euclide utilise les cas d’égalité et la similitude des triangles. Le théorème de Thalès, traduit par Peyrard sous le nom de « proposition des lignes proportionnelles », nous semble un point essentiel de la géométrie d’Euclide puisqu’il permet de repérer des points forts sur lesquels se fonde cette géométrie. Nous citons essentiellement deux de ces points :

- la méthode des aires qui consiste à faire des découpages et des recompositions dans le but de comparer des aires. Ce procédé, rendu opérationnel par les cas d'égalités des triangles, est fréquemment utilisé chez Euclide et d'une façon générale chez les géomètres grecs.

- la théorie des proportions élaborée pour résoudre le problème de l'égalité de deux rapports incommensurables. Elle est développée par Eudoxe et exposée au livre V des Eléments. Dans la théorie d'Eudoxe-Euclide, le rapport de deux grandeurs n'est possible que si ces grandeurs sont de même nature. Le cas du rapport de deux grandeurs incommensurables est exclu et il n'est pas défini comme un nombre. Cette conception persiste longtemps jusqu'au XIX^{e} siècle et trouve une solution par la construction des nombres réels.

2. *Le théorème de Thalès chez Euclide*

Le traité d'Euclide nous a fourni le premier énoncé dans l'histoire du théorème des lignes proportionnelles. La proposition 2 du Livre VI relative à cet énoncé traite du cas d'un triangle et d'une droite parallèle à l'un de ses côtés. La proposition 2 du L VI stipule que:

> Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Sa démonstration est basée sur une proposition précédente (proposition 1 Livre VI) qu'à la suite de Perrin (2006), nous appelons ***le lemme des proportions*** et sur un découpage et une reconstruction de figures.

Indépendamment du théorème de Thalès, la méthode des aires utilisée par Euclide présente au moins deux avantages :

- elle permet de contourner le problème des rapports incommensurables.

- elle interprète l'égalité des surfaces en termes de superposition et légitime la méthode empirique basée sur le découpage et la reconstruction de figures.

Dans le traité d'Euclide, les cas d'égalité de triangles forment un point fort de la méthode des aires puisqu'ils légitiment le procédé empirique.

Dans la démonstration de la proposition 2 du L VI, nous pouvons repérer cinq lemmes mobilisés dont quatre sont préparés dès le Livre I. Nous les exposons dans ce qui suit en utilisant les appellations proposées par Perrin (2006) :

1- Le lemme du trapèze (proposition 37 L I) qui stipule que :

> « Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux ».

2- Le lemme des proportions (proposition 1 L VI) qui stipule que :

> « Les triangles (et les parallélogrammes) qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ».

Ces deux lemmes reposent sur un même autre lemme : celui du **demi-parallélogramme** (proposition 34 L I) :

> « Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en deux parties égales ».

Pour démontrer le lemme du trapèze, Euclide se sert également d'un nouveau lemme que nous appelons celui du **double triangle** (proposition 41 L I) **:**

> « Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle », alors que la preuve de la proposition I du L VI (le lemme des proportions) est fondée sur la proposition 38 L I que nous appelons : le lemme des triangles à bases égales, et qui est conséquence du lemme de trapèze.

« Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux ».

Outre le fait que la démonstration d'Euclide permet de contourner le problème des irrationnels, nous pensons qu'elle est à la fois simple et très visuelle, et qu'elle pourrait bien être enseignée à un élève de fin du collège ou du début du lycée.

3. La démonstration d'Euclide

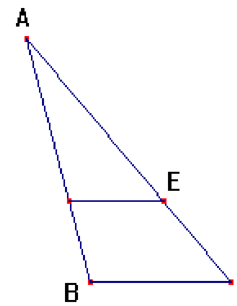


Figure1-La démonstration d'Euclide

Soit le triangle ABΓ et une droite ΔE // BΓ; je dis que l'on a: BΔ: ΔA = ΓE: EA

Joignons les droites BE et ΓΔ

Les triangles BΔE et ΓΔE sont égaux, car ils ont la même base, ΔE et sont situés entre les mêmes parallèles ΔE et BΓ (I.38)

AΔE étant un autre triangle quelconque, nous avons:

(BΔE): (AΔE) = (ΓΔE): (AΔE) (V.7)

car les grandeurs égales à une même troisième ont même rapport

Mais (BΔE): (AΔE) = BΔ: ΔA (VI.1)

Car ces triangles ont la même hauteur, la perpendiculaire à AB issue du point E; ils sont donc dans le rapport de leurs bases.

Pour la même raison, nous avons: (ΓΔE): (AΔE) = ΓE: EA

d'où BΔ: ΔA = ΓE: EA (V.11)

Chez Euclide, le théorème de Thalès a un rôle de transition assurant le lien entre les triangles équiangles et les triangles semblables définis comme étant des triangles équiangles dont les côtés sont deux à deux proportionnels. Le théorème de Thalès permet à Euclide de simplifier cette dernière définition et de montrer que la condition « équiangle » est suffisante pour dire que deux triangles sont semblables. Il permet également d'établir la propriété réciproque des triangles semblables :

« Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entre eux » (proposition 5, L VI)

Le traité d'Euclide a marqué une grande partie de l'histoire des mathématiques et il est source d'inspiration pour de nombreux auteurs. Ceci n'a pas empêché certains de ses successeurs de le critiquer et de proposer d'autres conceptions de la géométrie et d'autres démonstrations du théorème qui nous intéresse.

III. LES ELEMENTS D'ARNAULD (1667)

1. *La géométrie chez Arnauld*

Au XVII^{e} siècle, le traité d'Euclide ne semble pas satisfaire certains mathématiciens. A cette époque s'est développée une arithmétique qui a renouvelé la notion de grandeur et qui a établi le lien entre les opérations sur les nombres et celles sur les grandeurs, ce qui a permis à Arnauld de fonder une théorie des proportions au début de son ouvrage.

A l'époque d'Arnauld sont apparus les nombres sourds comme étant le rapport de deux grandeurs incommensurables sans qu'ils n'aient un statut théorique bien défini. Arnauld se place du côté de la pratique de la mesure et pour lui, à une grandeur est associé un nombre comme étant le nombre de fois que cette grandeur contient l'unité ou une partie de l'unité avec éventuellement un résidu. De la même façon il définit le rapport de deux grandeurs homogènes en prenant comme unité une partie aliquote du premier. Par ailleurs, le traité d'Euclide a été objet de critiques d'Arnauld et Nicole. Un des points sur lesquels portent ces critiques porte sur le respect du vrai ordre de la nature. Dans l'axiome 32 du Livre V (annexes), Arnauld mentionne clairement que le vrai ordre de la nature impose l'antériorité des lignes par rapport aux triangles. Dans la démonstration du théorème de Thalès, Arnauld rejette le détour par les aires que fait Euclide et pose l'antériorité des lignes par rapport aux surfaces. Sa démonstration s'appuie sur le résultat qui stipule que sur toute sécante, des parallèles équidistantes déterminent des segments égaux. Dans la résolution des problèmes, il renonce aux triangles, chers à Euclide, comme moyen de traiter les situations qui relèvent du théorème de Thalès. Pour lui, l'inégalité triangulaire remplace les cas d'égalité par superposition et la notion d'angle occupe une place centrale.

2. *Le chemin pour le théorème de Thalès*

Dans le traité d'Arnaud, au début du Livre X consacré aux lignes proportionnelles, un ensemble de lemmes permet de préparer le terrain pour les énoncés liés au théorème de Thalès. Le premier lemme introduit la notion d'espace parallèle comme étant un espace compris d'une part entre deux parallèles et indéfini de l'autre, alors que le lemme 4 définit l'inclinaison d'une ligne dans un espace parallèle comme étant l'angle aigu qu'elle fait sur l'une et l'autre parallèle, ces deux angles sont toujours égaux.

Dans le lemme 6 du même Livre, Arnauld définit les angles semblables. C'est en fait une manière de considérer des triangles mais des triangles dont deux côtés sont infinis : les angles semblables sont des angles qui, lorsque étant égaux, c'est-à-dire superposables, les angles sur la base de l'un[1] sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun. Cette notion remplace le recours que fait Euclide aux triangles. Arnauld se distingue d'Euclide en considérant que les lignes sont infinies et sort du cadre des figures fermées dans lesquelles Euclide s'est enfermé. La proposition fondamentale qui suit les lemmes traite d'un cas de proportionnalité des côtés de deux triangles ayant un angle aigu égal, dans une formulation propre à Arnauld, se servant d'espace parallèle et d'inclinaison de lignes.

Le premier théorème du Livre X correspond à la proportionnalité des côtés des triangles équiangles, toujours en faisant appel à l'inclinaison de lignes. Par rapport à Euclide, les rôles se sont renversés : les triangles équiangles chez Arnauld, introduits à partir d'angles semblables, précèdent tout énoncé du théorème de Thalès dans un triangle, alors que pour Euclide, ces triangles sont revisités après la proposition VI. 2.

[1] Pour Arnauld, la base d'un angle correspond à une sécante aux côtés de l'angle.

3. Les énoncés du théorème de Thalès

La première forme ressemblant aux énoncés récents du théorème de Thalès apparaît dans un premier corollaire du premier théorème du Livre X. Cet énoncé se sert de plusieurs parallèles coupées par des sécantes.

Premier corollaire

14. Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième etc., comme chaque autre toute est à la même partie, première, ou deuxième, ou troisième etc.

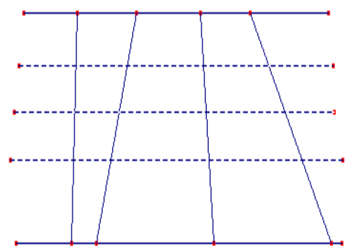


Figure 2*- Enoncé d'Arnauld*

Les angles paraissent chez Arnauld aussi importants que les triangles chez Euclide :

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouve diverses sortes de proportions de grand usage.

Sa démonstration n'est qu'une application des deux premiers théorèmes (résultats 13 et 18) et du 9ème lemme comme conséquence des angles alternes internes introduits au résultat 57 du Livre VIII. (voir annexes)

IV. LES ELEMENTS DE LEGENDRE (1794)

1. La géométrie chez Legendre

L'ouvrage de Legendre marque un retour à Euclide et se propose de démontrer certaines propriétés admises par ce dernier, comme le 5^{e} postulat, en commençant par montrer que « Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits ». A partir de ce résultat, Legendre démontre l'égalité des angles alternes-internes et correspondants définis par deux droites parallèles coupées par une sécante. Il joint la rigueur euclidienne à sa théorie sur les mesures. Nous retrouvons la méthode des aires d'Euclide dans la proposition 1 du livre III intitulée : *les proportions des figures*, à laquelle sont ajoutées des propriétés d'algèbre après avoir défini au début du même livre, les notions de figures équivalentes, de figures semblables et d'angles homologues.

Notons que le traité de Legendre a été utilisé pour l'enseignement avec des modifications au fil des rééditions. Nous avons consulté une 14ème réédition de ce traité réécrite par Blanchet, et avons trouvé que Legendre se limite alors au cas d'un triangle, et l'abandon de la méthode des aires l'a amené à distinguer deux cas suivant que les longueurs sont commensurables ou incommensurables. Ainsi, la proposition XVI du livre III indique que :

« Toute parallèle DE à l'un des côtés BC d'un triangle ABC, divise les autres côtés AB, AC, en parties proportionnelles »

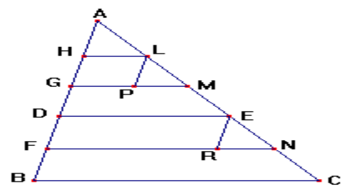


Figure 3- Enoncé de Legendre

Le cas des segments commensurables :

L'auteur traite un exemple générique : il divise les segments AD et DB suivant la commune mesure. Les parallèles menées de H, G, D et F déterminent sur le segment AC des segments égaux. Pour démontrer ce résultat, il montre l'égalité des triangles (par exemple LPM et ERN) en se basant sur les angles correspondants et alternes internes, puis il déduit que AE et EC sont divisés dans le même rapport que AD et DB.

Le cas des segments incommensurables n'est pas effectivement démontré, mais l'auteur précise qu'il suffit d'encadrer les rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$ par deux nombres consécutifs de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc.., avec un raisonnement qu'il a utilisé dans un chapitre antérieur, et il déduit que les rapports sont égaux.

Le sens réciproque du théorème, toujours relatif au triangle, apparaît à la proposition suivante

La démonstration se sert du sens direct et du raisonnement par l'absurde :

Proposition XIV

Théorème

Réciproquement, si les côtés AB, AC d'un triangle ABC sont coupés proportionnellement par la ligne DE, en sorte qu'on ait $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

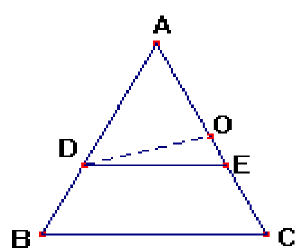


Figure 4- La réciproque chez Legendre

Je dis que la ligne DE sera parallèle à la base BC. Car si DE n'est pas parallèle à BC, supposons que DO en soit une ; alors suivant le théorème précédent on aura : $\frac{AD}{DB} = \frac{AO}{OC}$

Donc on aura : $\frac{AO}{OC} = \frac{AE}{EC}$, proportion impossible puisque, d'une part, AE est plus grand que AO, et que, de l'autre, EC est plus petit que OC; donc la parallèle à BC, menée par le point D, ne peut différer de DE.

2. *Les applications du théorème de Thalès*

Le théorème de Thalès réduit au triangle permet de traiter les propriétés des bissectrices d'un angle dans un triangle et du lieu géométrique des points dont les distances à deux points B et C sont dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. Viennent ensuite les cas de similitude des triangles qui profitent des définitions des triangles équiangles et des triangles semblables, puis les applications aux polygones semblables en les décomposant en des triangles semblables. Comme nous l'avons remarqué chez Euclide, la cohésion Thalès-triangles semblables est nette. Dès leur apparition, les triangles semblables chez Legendre se substituent au théorème de Thalès et trouvent un terrain riche d'applications. Nous citons en particulier les applications aux rapports de périmètres et d'aires de polygones semblables et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Dans des problèmes relatifs au livre III, l'obsolescence interne du théorème de Thalès est également assurée par des problèmes de type : diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles à des lignes données, trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Dans les livres suivants du traité, les triangles semblables sont utilisés dans des problèmes de calcul d'aires relatifs à des polygones réguliers. Le théorème de Thalès ne sera revisité que dans l'étude de la géométrie dans l'espace, dans les sections d'une pyramide.

V. LE TRAITE D'HADAMARD (1899)

1. *La géométrie chez Hadamard*

Le traité de Hadamard est destiné à l'enseignement de la géométrie. Au début de son ouvrage, Hadamard signale qu'il compte se démarquer d'Euclide en insistant sur les aspects pratiques et intuitifs de l'enseignement de la géométrie. Chez lui, la géométrie est considérée comme plus simple, plus accessible du point de vue du raisonnement et plus concrète que les théories abstraites de l'arithmétique et de l'algèbre. Une importance particulière est accordée à l'étude des figures et des relations qu'elles ont entre elles ce qui explique la fréquence élevée des problèmes de construction géométrique qui occupent, en particulier, un chapitre entier (chapitre VI) du Livre III. Par ailleurs, la comparaison des figures et l'étude de leurs correspondances sont bien mises en avant en suivant deux méthodes :

- la méthode classique chère à Euclide qui consiste à appliquer le principe de superposition. Pour cela, apparaît dès l'introduction la définition de deux figures égales comme étant deux figures superposables.

- la méthode « moderne » qui fait appel aux transformations du plan. Ainsi, symétrie orthogonale, rotation et translations sont introduites dès le premier Livre et cohabitent avec les objets traditionnels de la géométrie. Ceci a permis de traiter de nouveaux types de problèmes tels que la recherche des lieux de points.

2. *Un chemin pour Thalès*

Dans les deux premiers livres, sont traités des propriétés classiques de géométrie que nous avons trouvées dans les traités précédents. Pour ce qui nous intéresse, nous citons les cas d'égalité des triangles, les propriétés des angles alternes internes et des angles correspondants, et l'étude des parallélogrammes.

En faisant la comparaison avec les autres traités analysés, notamment celui d'Euclide, nous pouvons dire que l'abandon de la méthode des aires a réduit le nombre des ingrédients utiles pour préparer le terrain à l'arrivée du théorème de Thalès.

3. Les énoncés du théorème de Thalès

Le premier énoncé du théorème de Thalès qui suit le rappel des proportions et de leurs propriétés au Livre III se sert de la notion de projection (Théorème fondamental, 113, annexes). Le cas général de cet énoncé est préparé par un cas particulier où les segments sur la droite de départ sont égaux. La démonstration de ce cas particulier est identique à celle qu'on a trouvée chez Legendre (14$^{\text{ème}}$ réédition), alors que la démonstration du cas général consiste à montrer que les rapports de distances sont égaux à 1/n près quel que soit n. Par rapport à la méthode classique par les aires, la démonstration d'Hadamard présente un nouveau point de vue: celui de la continuité et du passage à la limite pour montrer que les rapports de distances sont égaux s'ils sont égaux à 1/n près quel que soit n. Notons que dans la démonstration d'Hadamard, un cas particulier générique est traité et les positions de quelques points (I' et II') ne sont pas démontrées mais simplement lues sur la figure (annexes).

A l'instar de la majorité des démonstrations précédentes, celle d'Hadamard pose la difficulté du passage du cas des segments commensurables au cas des segments incommensurables. Hadamard traite d'un cas particulier (n = 5) et laisse implicites les encadrements des rapports et la propriété de la densité de **Q** dans **R**.

4. Les applications du théorème de Thalès

Les applications immédiates du théorème de Thalès traitent des propriétés des bissectrices internes et externes d'un angle ce qui a permis d'établir le théorème relatif à la recherche du lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné. Au chapitre suivant relatif aux similitudes des triangles, un premier théorème permet la transition entre le travail sur les lignes proportionnelles et celui sur les triangles semblables :

> « Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle forme avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier »

Les cas de similitude des triangles qui suivent se substituent au théorème qui nous occupe et à l'instar des traités précédents, dorénavant ils vont être un outil puissant dans la résolution de toutes les situations de Thalès.

VI. LE THEOREME DE THALES DANS L'ALGEBRE LINEAIRE

Nous nous servons d'un manuel scolaire tunisien, celui de Troisième année secondaire de 1977 : le théorème de Thalès apparaît juste après la définition de la projection d'une droite sur une droite parallèlement à une droite. Il est énoncé comme suit (p.161) :

> **THEOREME 35 (de THALES)**
>
> Soit A, B, C trois points alignés avec $A \neq B$. Soit p une projection sur une droite parallèlement à une droite. En notant A' le point p(A), B' le point p(B) et C' le point p(C), on a : $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ (avec $\alpha \in IR$)

Une démonstration du théorème de Thalès est proposée par la suite : nous considérons p : la projection sur D_1 parallèlement à Δ.

Deux cas sont distingués suivant que (AB) est parallèle à Δ ou non. Dans le premier cas, le résultat est évident. Dans le deuxième cas, voici la démonstration :

On a vu que la projection de (AB) sur D_1 parallèlement à Δ est bijective donc $A' \neq B'$ et $(A'B') = D_1$. C' étant sur D_1, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$. En utilisant le théorème de CHASLES, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'})$ avec $\overrightarrow{AC} \in$ dir (AB), $\overrightarrow{A'A} \in$ dir (Δ) et $\overrightarrow{CC'} \in$ dir (Δ) donc $(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'}) \in$ dir (Δ). Cette démonstration a été faite dans un exercice obligatoire après le théorème 21.

De même $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})$ avec $\overrightarrow{AB} \in$ dir (AB) évidemment, et $(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'}) \in$ dir (Δ). Comme $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ on a : $\overrightarrow{A'C'} = \lambda[\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})]$ donc $\overrightarrow{A'C'} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{AB}}_{\in dir(AB)} + \underbrace{\lambda(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})}_{\in dir\Delta}$. On a obtenu ci-dessus $\overrightarrow{A'C'} = \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\in dir(AB)} + \underbrace{(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'})}_{\in dir(\Delta)}$.

Puisque dir $(AB) \neq$ dir (Δ), le théorème 32 affirme en particulier $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

On a par hypothèse $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$. Le théorème 28 affirme : $\lambda = \alpha$

Conclusion : $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$ c.q.f.d

VII. CONCLUSION

A partir de notre analyse, nous pouvons dire que durant des siècles, le théorème de Thalès garde toujours une grande place dans l'organisation mathématique de la géométrie. Dans la majorité des ouvrages que nous avons consultés, le problème de l'incommensurabilité a été rencontré. Les démonstrations du théorème de Thalès sont souvent faites dans le cas des segments commensurables, et le passage aux segments incommensurables est admis. La problématique de l'incommensurabilité fait obstacle à l'enseignement d'une démonstration du théorème de Thalès, puisque les techniques utilisées dans les démonstrations citées ne sont pas au niveau d'un élève de fin de collège ou du début du lycée, et puisque au moment où cet enseignement devient possible (en terminale), d'autres outils se substituent au théorème de Thalès, les similitudes notamment. Nous pensons avec Abdeljaouad (2002) que l'un des intérêts de la démonstration du théorème de Thalès pour un enseignant est de concevoir la droite réelle sans « trous ». Ce travail a également tenté de montrer que le théorème de Thalès a résisté aux changements d'axiomatiques dans l'histoire, et a profité des différentes formes avec lesquelles il peut être formulé, pour évoluer dans des environnements mathématiques différents. Il serait utile de traiter ce sujet lors d'une formation d'enseignants.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) *Une démonstration du théorème de Thalès*. Miftah al-Hissab, n°100, Tunis.

Arnauld A. (1667) *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris : Charles Savreux.

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration : essai épistémologique didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8(3). Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau G. (1995) Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université, in "Autour de Thalès". *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p. 87-12.

Euclide (1993) *Les œuvres d'Euclide*. Traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage argumenté d'une importante introduction par M. Jean Itard. Paris : Librairie Scientifique et Technologique Albert Blanchard.

Hadamard J. (1928) *Leçons de géométrie élémentaire*. Paris : 10è édition.
Legendre A.D. (1794) *Eléments de géométrie*. Paris : Firmin Didot.
Mrabet S. (2004) *Quelles conceptions ont les enseignants tunisiens du collège et du lycée sur le théorème de Thalès ?* Mémoire de DEA. Université de Tunis.
Mrabet S. (2010). *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien: conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*. Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).
Perrin D (2006) *Autour de Thalès*. Conférence à l'université Paris 7.

MANUEL SCOLAIRE

Manuel Tunisien (1977), Mathématique 3, 3e de l'enseignement secondaire, Centre National Pédagogique.

ANNEXES

Le traité d'Arnauld

Livre V

32. [….] Ce qui doit faire regretter le scrupule qu'on pourrait avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses et employer les triangles pour employer les propriétés des lignes, c'est-à-dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à al véritable méthode [….].

Livre VIII

57. La même ligne coupant obliquement plusieurs parallèles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est-à-dire qu'elle fait sur toutes, les angles égaux.

Lemme 9

Lorsqu'une ligne est coupée par plusieurs lignes toutes parallèles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les parallèles qui les renferment.

13. Premier théorème

Si deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le sont autant chacune que chacune de deux autres le sont dans un autre espace, les également inclinées sont en même raison

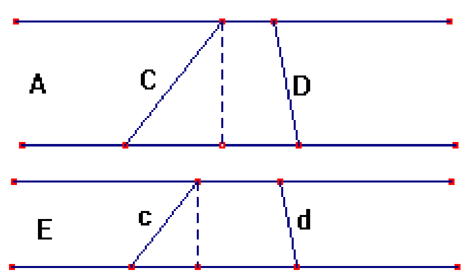


Figure 5- *Le premier théorème chez Arnauld*

Second théorème

18. Lorsque deux angles sont semblables (c'est-à-dire selon le sixième lemme, lorsqu'étant égaux, les angles sur la bases de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun), ces côtés sont proportionnels aux côtés, et la base à la base et la hauteur à la hauteur.

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouve diverses sortes de proportions de grand usage

Démonstration

En traçant du sommet une parallèle aux deux bases, il se trouve trois espaces parallèles. D'après le 9ème lemme, T étant incliné dans W que P dans A et q dans E ; et de même, t étant autant incliné dans w que p dans A et g dans E, d'après le 1er théorème, on a : T.P :: t.p ; Tq :: t.g ; P.q :: p.g et alternado T.t :: P.p ; T.t :: q.g ; P.p ::q.g. Par Le 2ème théorème, chaque toute et sa première partie sont en même raison que la dernière base et la première T.P :: B.b ; t.p ::B.b et alternado T.B ::P.b ; t.B ::p.b Ainsi T.P ::P.p::B.b.

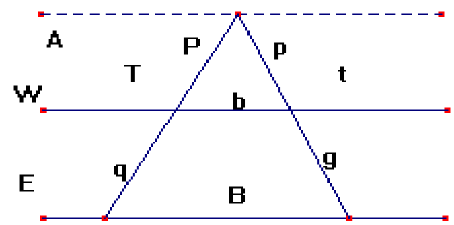


Figure 6- Second théorème chez Arnauld

Hadamard

113 Théorème fondamental

…..

2ème cas : les points A, B, C, D sont quelconques.Nous allons démontrer que les valeurs à 1/n près des deux rapports $\frac{CD}{AB}$ et $\frac{C'D'}{A'B'}$ sont égales, quel que soit n.

Soit, par exemple, $n=5$: divisons AB en cinq parties égales aux points 1, 2, 3, 4 et supposons que la cinquième partie de AB soit contenue deux fois mais non trois dans CD : soient I, II, III les extrémités de trois segments égaux au cinquième de AB et portés successivement sur la droite CB à partir du point C ; de sorte que les points I et II sont entre C et D (le dernier pouvant toutefois coïncider avec C), le point III au-delà du point D. par tous ces points 1, 2, 3, 4, I, II, III, menons des parallèles à la direction commune des droites AA', BB', CC', DD', jusqu'à rencontre en 1', 2', 3', 4', I', II', III', avec la droite A'B'C'D'. Nous avons ainsi divisé A'B' en cinq parties égales et porté trois fois l'une de ces parties à partir du point C' dans la direction C'D' (1°). Les points I', II' étant dans l'intervalle C'D' et le point III' au-delà du point D' (d'après la remarque faite tout d'abord) et théorème est démontré.

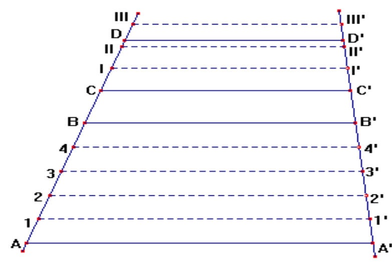


***Figure 7**- Enoncé de*