Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

SYMBOLISER ET CONCEPTUALISER, DEUX FACETTES INDISSOCIABLES DE LA PENSEE MATHEMATIQUE : L'EXEMPLE DE L'ALGEBRE

Joëlle VLASSIS[*] – Annick FAGNANT[**] – Isabelle DEMONTY[***]

Résumé – Dès les premiers instants de leur histoire, les mathématiques se sont développées en étroite relation avec les symboles qu'elles utilisent. Au départ d'une analyse épistémico-historique de l'évolution de la notation algébrique, cet article propose une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Il vise en particulier à mettre en lumière, dans la foulée des approches socioculturelles, le rôle et l'importance des activités de symbolisation dans les apprentissages mathématiques. Il vient également concrétiser ces perspectives par des pratiques de classe illustrant les propos théoriques. Une activité sur l'apprentissage de la résolution des équations est développée dans cet objectif.

Mots-clefs : symbolisation, conceptualisation, chaîne de signification, approches socioculturelles, histoire de l'algèbre

Abstract – From the very beginning of their history, mathematics were developed in close relationship with the symbols they use. Starting from an epistemico-historical analysis of the development of algebraic notation, this article proposes a reflection on the dialectic conceptualization/symbolization specific to the mathematical thinking. In particular, it aims to develop, on the basis of sociocultural approaches, the role and importance of symbolization activities in mathematics learning. It also proposes some classroom practices illustrating the theoretical principles. An activity on the learning of solving equations is developed in that objective.

Keywords: symbolization, conceptualization, semiotic chain, sociocultural approaches, history of algebra

I. INTRODUCTION

En mathématiques, les objets n'ont pas d'existence tangible et ne sont pas directement accessibles par la perception. Les notations symboliques sont donc cruciales puisqu'elles seules permettent de rendre compte des objets en question et d'y accéder. Leur utilisation autorise la communication, la réflexion et les échanges mathématiques. Toutes ces actions, impossibles sans ces notations, permettent ainsi le développement et le progrès de cette discipline.

[*] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu
[**] Université de Liège – Belgique – afagnant@ulg.ac.be
[***] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – isabelle.demonty@uni.lu

Vlassis J., Fagnant A., Demonty, I. (2015) Symboliser et conceptualiser, deux facettes indissociables de la pensée mathématique : l'exemple de l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 357-369.

Dans les pratiques d'enseignement, les symboles[1] mathématiques sont traditionnellement présentés comme des entités destinées à représenter une réalité mathématique externe, et dont il convient d'enseigner la grammaire et le vocabulaire. Ils sont donnés d'emblée aux élèves sous leur forme définitive. Le point de vue implicite sous-jacent à cette approche consiste à considérer les symboles de manière indépendante des concepts et opérations qu'ils représentent. Avec la redécouverte et la diffusion des travaux de Vygotsky, cette conception du rôle des symboles dans les apprentissages s'est profondément modifiée. Désormais, ceux-ci sont considérés comme constitutifs de la conceptualisation mathématique. Cette conception rejoint le développement même des mathématiques au fil des siècles où chaque avancée conceptuelle fut accompagnée, précédée ou suivie d'une avancée dans la symbolisation.

Dans la foulée des approches inspirées de Vygotsky, l'objectif de cet article consiste à développer une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Il vise en particulier à mettre en lumière le rôle et l'importance des activités de symbolisation dans les apprentissages mathématiques. Il se propose également de concrétiser ces perspectives par des pratiques de classe illustrant les propos théoriques.

Cet article est composé de trois parties. La première consiste à évoquer le rôle de la symbolisation dans le développement de l'algèbre au fil de l'histoire. La deuxième section discute, dans la foulée des thèses vygotskiennes, du processus de symbolisation en tant qu'élément incontournable des apprentissages mathématiques. Enfin, la dernière partie vient illustrer les principes évoqués en présentant des pratiques de classe basées sur des activités de symbolisation.

II. L'HISTOIRE DE L'ALGEBRE, UNE (R)EVOLUTION CONCEPTUELLE GRACE A UNE DECOUVERTE SYMBOLIQUE MAJEURE

L'histoire de la notation algébrique en Occident constitue un exemple éclairant de la dialectique entre symbolisation et conceptualisation dans le développement de l'histoire des mathématiques. Les analyses historiques montrent combien ces symbolisations ont été constitutives de l'émergence des objets mathématiques eux-mêmes.

Selon Ifrah (1994), c'est tout d'abord la découverte de la numération de position et du zéro par les savants indiens qui a ouvert la voix à l'élaboration d'une science algébrique. Car,

> « avec ce type de notations, les valeurs numériques, cessant d'être connotées par des symboles propres à chacune d'elles, perdent du coup de leur individualité qualitative […] la régularité cyclique de leur construction fournit une loi qui permet de les engendrer toutes à l'infini d'une manière toujours identique, et sans jamais que se perde la connaissances exact de leur rapport » (Massignon & Arnaldez, in Ifrah 1994, p. 454).

Cependant, toujours selon Ifrah, l'algèbre indienne n'aura pas su accomplir le pas décisif pour évoluer vers l'algèbre que nous connaissons. En effet, il lui manquait une notation générale, en l'occurrence la notation littérale, pour désigner des variables, inconnues ou constantes indéterminées. C'est la découverte de cette notation symbolique par Viète en 1591 qui a rendu possible la naissance de l'algèbre moderne. Ifrah souligne que c'est bien la notation littérale algébrique qui permit de passer du particulier au général, élevant la science algébrique à un niveau bien supérieur à celui de l'arithmétique ordinaire.

1 Dans cet article, nous utiliserons le terme « symbole » au sens large en référence à la définition de Cobb (2000) selon lequel les symboles sont des entités concrètes devant être interprétées comme signifiant quelque chose d'autre. Ainsi, les symboles ne se réduisent pas aux signes mathématiques conventionnels mais incluent aussi bien des graphiques, des tableaux, des diagrammes que des notations non standards comme de simples marques sur un papier voire un arrangement physique d'objets.

Plusieurs auteurs (Harper 1987 ; Kieran 1992 ; Ifrah 1994) s'accordent pour affirmer que l'évolution de la notation algébrique s'est réalisée en trois grandes phases.

La première phase est celle du *langage « rhétorique »* (Harper 1987) *ou terminologique* (Ifrah, 1994). Au cours de cette période, seul, le langage naturel est utilisé pour résoudre les problèmes. Aucun signe, ni symbole mathématique n'est utilisé. Les processus de calcul sont décrits verbalement.

La deuxième phase voit le développement d'un *langage syncopé.* C'est Diophante qui au III^{e} siècle après J.C. introduit des symboles pour désigner certains nombres. Radford (1992), rappelle toutefois que l'innovation majeure apportée par Diophante est l'idée d'*arithme* : une quantité indéterminée d'unités qu'il symbolisera sous la forme ζ (dzèta). Cet *arithme* correspond à la notion d'inconnue en algèbre moderne. Le changement conceptuel introduit par Dipohante avec l'*arithme*, c'est que cette quantité inconnue va être prise en compte dans les calculs. On va opérer avec elle ! Selon Radford (1992), l'objectif de Diophante n'était pas de résoudre des problèmes de la vie réelle appliqués au commerce, à l'agriculture ou à tout autre situation concrète mais des problèmes qui reflètent la structure de l'arithmétique. Diophante s'intéresse en effet au groupement des nombres (cubes, carrés, …) et les problèmes qu'il entreprend de résoudre concerne les nombres, leur différence, … Ses innovations symboliques ont consisté à abréger les mots. Celles-ci se sont imposées en raison des limites de l'écriture propre à l'époque, en tant que techniques efficaces pour copier plus rapidement les manuscrits mathématiques.

Ses innovations tant symboliques que conceptuelle conduisirent à des avancées importantes dans la résolution de problèmes et donnèrent lieu à une théorie arithmétique ouvrant de nouvelles perspectives (Radford 1992). La principale préoccupation des mathématiciens au cours de cette période consiste à découvrir l'identité des lettres et non d'essayer d'exprimer une généralisation. Le but de l'algèbre est donc de rechercher la valeur d'une inconnue (solution numérique d'un problème). Au cours de cette période se développe une utilisation de plus en plus extensive du symbolisme mathématique (symboles opératoires et littéraux) qui autorisa le développement d'opérations de plus en plus sophistiquées impossibles à réaliser avec les mots.

Enfin, dans la troisième phase, avec le *langage symbolique*, un changement radical se produit grâce à François Viète (à la fin du XVI^{e} siècle), lorsque les lettres vont également être utilisées comme paramètres, c'est-à-dire comme quantités données (Harper 1987). Cette simple mais brillante avancée conceptuelle allait changer la face de l'algèbre. Cette utilisation des lettres introduit un nouveau concept numérique en mathématiques : le concept de « nombre algébrique ». Les nombres représentés par ces lettres n'ont ni dimension spécifique, ni classement d'ordre particulier. Par exemple, dans $x + y = a$, a peut-être considéré comme une quantité donnée. Elle peut représenter tout nombre; x et y sont maintenant des variables corrélées. Kieran (1992) précise qu'avec ce langage symbolique, il devient possible d'exprimer des solutions générales et d'utiliser l'algèbre comme un outil pour démontrer les règles régissant les relations numériques. L'invention de Viète d'une notation condensée permit, selon Ifrah (1994), de passer d'un raisonnement individuel, portant sur des propriétés spécifiques, à un raisonnement global sur les propriétés communes à tous les cas d'une même espèce.

Ce dernier précise que :

> « L'usage de la lettre alphabétique pour désigner un paramètre ou une inconnue a défintivement libéré l'algèbre de l'esclavage du verbe, permettant dès lors de créer une sorte de « langue internationale » comprises sans équivoque possible par les mathématiciens du monde entier » (Ifrah 1994, p. 387).

Et c'est ce qui rendit possible, rappelle Ifrah, l'émergence d'autres concepts mathématiques, comme celui des fonctions, discipline qui constitue aujourd'hui l'un des fondements des mathématiques appliquées, mais également l'algébrisation de l'analyse et l'essor de la géométrie analytique.

Ce détour historique n'a pas pour but de montrer les différents cheminements « maladroits » entrepris par les savants au fil des siècles avant d'arriver aux mathématiques modernes abstraites, qui seraient considérées comme les seules « bonnes » mathématiques. Au contraire, nous pensons, à l'instar de Radford (1997), que les analyses historiques ont pour but de mieux comprendre la façon dont le savoir mathématique s'est développé dans une culture donnée, ainsi que la façon dont les significations ont émergé et se sont modifiées au fil des siècles. C'est davantage le processus d'émergence des idées mathématiques qui importe plutôt que la connaissance de la succession des événements et des faits historiques pour eux-mêmes. En l'occurrence, l'histoire de l'algèbre que nous venons d'évoquer brièvement, consiste à mettre en évidence le processus selon lequel les avancées symboliques se sont développées en étroite relation avec les avancées conceptuelles dans un contexte socio-culturel donné. Ces avancées symboliques permirent de poser de nouveaux problèmes et d'ouvrir à de nouveaux domaines requérant de nouvelles symbolisations plus adéquates dans un processus cyclique et récursif d'une société et d'une science en constante progression. Dans cette perspective, ainsi que le souligne Radford (1997), l'algèbre syncopée ne doit pas être considérée comme une étape intermédiaire entre une époque « primitive » et les mathématiques formelles, et qui serait caractérisée par des manques, notamment un manque de méthode générale. Au contraire, la découverte de l'*arithme* permit à Diophante de développer une méthode très sophistiquée de résolution de problèmes. En outre, le développement de la symbolisation syncopée fut façonné tant par les découvertes conceptuelles que par le contexte socio-culturel de l'époque. Les limites de l'écriture participèrent à son développement en rendant nécessaire l'abréviation des mots.

III. L'IMPORTANCE DE LA SYMBOLISATION DANS LES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES

Ce développement des notations algébriques au cours des derniers siècles, s'il a permis des avancées conceptuelles déterminantes, a souvent dû être poursuivi au détriment de l'évidence de sens pour les non-initiés. En effet, dans les phases rhétoriques et syncopées, le langage utilisé en mathématique correspondait ou restait encore proche du langage naturel. Mais depuis Viète et l'algèbre symbolique, les relations entre symboles et objets mathématiques se sont complexifiées de telle sorte que le lien entre de nombreuses expressions symboliques et ce qu'elles signifient n'est plus du tout direct. La plupart des symboles présentent plusieurs significations qui varient parfois au sein d'une même situation. Cette polysémie des symboles nécessite une formation aux conventions et aux règles qui régissent leur utilisation. Cela ne va pas sans difficulté pour les élèves du début du secondaire qui commettent un grand nombre d'erreurs en raison d'un manque de sens attribué à des symboles comme la lettre (Küchemann 1978 ; Booth 1984), le signe d'égalité (Kieran 1981 ; Theis 2005) ou encore le signe « moins » (Vlassis 2004, 2008, 2010). Une des raisons principales des difficultés observées chez les élèves trouve son origine dans un manque d'enseignement explicite et significatif du changement de sens de signes déjà connus tels que le signe d'égalité, la lettre ou le signe « moins ». En effet, la plupart du temps, ces changements pourtant majeurs sont de l'ordre de l'implicite et véhiculés dans des pratiques d'enseignement basées essentiellement sur l'application de règles et techniques dépourvues de sens aux yeux des élèves (Kieran 1992 ; Radford 2008).

L'objectif de cette section consiste à proposer une démarche d'enseignement alternative basée sur les approches socioculturelles issues des principes de Vygotsky (1997). Ces perspectives envisagent le développement conceptuel en étroite interaction avec le développement des symboles. Pour Vygostsky (1997) en effet, la communication et les interactions sociales sont considérées comme consusbstantielles à l'apprentissage et à la pensée. Le développement cognitif trouve son origine dans les interactions sociales médiatisées, c'est-à-dire instrumentées ou outillées, par des « signes » tels que le langage, l'écriture, les symboles, le dessin ou encore les schémas. En ce sens, les symboles mathématiques constituent des signes en tant qu'outils de la communication mathématique. C'est l'appropriation des signes qui, dans la pensée de Vygotsky (1997), marque de façon essentielle le passage des activités élémentaires aux activités supérieures. Dans les sections qui suivent, nous proposons tout d'abord une réflexion sur les signes, puis présentons un modèle d'apprentissage inspiré de Gravemeijer et Stephan (2002) basé sur les chaînes de signification et dans lequel concepts et symboles interagissent étroitement.

1. Signes et communication

Si la formation de la connaissance est considérée d'un point de vue social, l'utilisation des signes (et donc, notamment, des symboles mathématiques) devient un élément culturel central de la cognition (Radford 1998). Dans la perspective vygotskienne, si les signes ont d'abord une fonction générale communicative pour réguler l'interaction et le déroulement de l'activité, celle-ci précède et est à l'origine de la fonction intellectuelle. C'est parce qu'il est d'abord conduit à utiliser les signes pour agir sur l'autre (fonction sociale) que l'enfant devient capable de les utiliser pour agir sur lui-même (fonction individuelle cognitive). En ce sens, les théories sémiotiques de l'activité mathématique peuvent contribuer à affiner notre compréhension des principes qui viennent d'être évoqués. Sur la base des travaux des sémioticiens (Lacan/Saussure, cité par Gravemejer 2002), nous présentons une définition du signe schématisée dans la figure 1 ci-dessous.

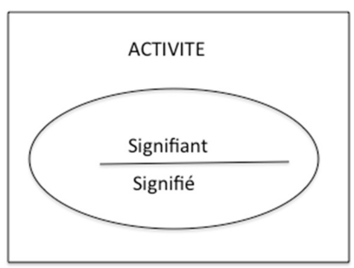


***Figure 1** – Proposition de définition du « signe » incluant la notion d'activité*

En sémiotique, un signe est généralement considéré comme étant constitué d'un « signifiant », l'expression matérielle perceptuellement accessible du signe, et d'un « signifié », renvoyant au contenu, au sens de cette expression. Les approches socioculturelles nous amènent à considérer le signe dans la foulée de sémioticiens, comme exprimant une relation étroite et sémantique entre signifiant et signifié. Un signe est ainsi représenté comme un ensemble composé de deux facettes inséparables (voir figure 1). Cependant, de notre point de vue, cette conception du signe ne peut suffire. Dans les approches socioculturelles, un signe n'est jamais une entité pour elle-même, il prend place et fait sens dans un contexte d'activité précis et est produit pour atteindre un objectif donné (Radford 1998). L'activité est envisagée comme l'environnement dans lequel s'insèrent les actions mathématiques des individus et qui les rendent nécessaires. Selon Radford (1998), l'activité présente deux caractéristiques importantes. La première c'est qu'elle est médiatisée par les signes et est donc enracinée dans la culture, la seconde c'est qu'elle est orientée vers un but. L'histoire de la notation algébrique, évoquée sans la section I, témoigne du même processus. Ainsi, de notre point de vue, un signe se définit par un signifiant et un signifié en étroite relation, médiatisant une activité donnée orientée vers un but. C'est pourquoi, nous suggérons de compléter la représentation du signe proposée par la sémiotique, en l'intégrant au cœur même de l'activité dans laquelle il est produit (voir figure 1).

2. *Signes et chaîne de significations*

À travers leurs analyses, Gravemeijer et al. (2000) ont mis en évidence le rôle crucial des activités de symbolisation qui se développent en relation avec l'évolution de pratiques mathématiques de la classe afin de faire émerger une réalité mathématique abstraite. Selon ces auteurs, les différentes étapes de symbolisation constituent une chaîne de significations dont la composante de base est le signe tel que nous venons de le définir. La chaîne de signification développée par Gravemeijer et al. (2000) et Gravemeijer (2002) présente une vision dynamique du signe selon laquelle une combinaison précédente du signe devient le signifié de la combinaison suivante (voir figure 2). Nous proposons dans la section IV un exemple de chaîne de significations modélisant une activité sur les équations (voir figure 5).

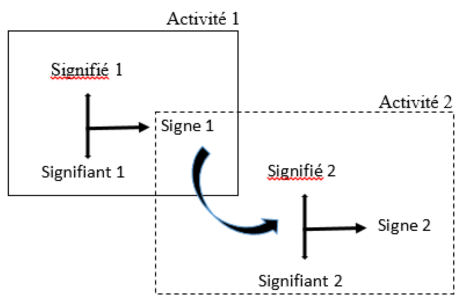


Figure 2 *– Chaîne de significations inspirée de Gravemeijer (2002) et adaptée à la définition du signe incluant la notion d'activité*

L'évolution des signes dans une chaîne de significations présentée dans la figure 2, implique que le nouveau signifié englobe le signe original, tandis que la signification du signe original change dans une mathématisation progressive de plus en plus abstraite. Ainsi, celle-ci s'installe de manière « *bottom up* » au départ des activités informelles des élèves (Gravemeijer et al. 2000). La signification initiale du signe précédent étant en relation avec des intérêts particuliers, elle est remplacée par une signification différente quand le signe suivant est utilisé dans des pratiques motivées par de nouvelles préoccupations. Cette évolution du signe est ainsi rendue nécessaire par des activités de complexité croissante. Il est à noter que Gravemeijer et al. (2000) insistent sur l'idée que l'évolution des signes émerge avec l'évolution des pratiques de classe. Cependant, leur schéma initial de chaîne de significations ne rend curieusement pas compte de cette dimension. C'est pourquoi nous l'avons adapté à notre définition du signe incluant les signes dans le contexte des activités qui évoluent au fil du temps (voir figure 2).

L'avantage de ce processus, selon Presmeg (2006), c'est qu'à chaque point de la chaîne existe la possibilité pour les élèves de revenir en arrière y compris aux actions initiales. Dans une perspective socioculturelle, cette production de symboles va entraîner des débats sur la pertinence de telle ou telle symbolisation en fonction de l'activité donnée. Ce va et vient entre le langage verbal, les symboles non conventionnels et les symboles mathématiques pour résoudre une tâche donnée contribue pleinement à la production de sens et à la compréhension des objets mathématiques étudiés. Rappelons à cet égard que les objets mathématiques appartiennent à une réalité intangible et qu'ils ne peuvent être appréhendés qu'à travers leurs différentes représentions. En ce sens, cette évolution à travers les différents types signes au cours des activités mathématiques contribue également puissamment à la conceptualisation des objets mathématiques.

IV. UN EXEMPLE D'ACTIVITE DE SYMBOLISATION EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

La séquence d'enseignement de trois leçons sur la résolution d'équations que nous présentons ici a été mise au point par Radford (2002) et retravaillée par Radford, Miranda et Demers (2009) dans le but d'illustrer les caractéristiques d'une activité permettant un passage progressif à l'abstraction. Selon ces auteurs, abstraction et symbolisation sont intimement liées :

> « Les abstractions mathématiques partent d'une expérience sensorielle concrète […] Mais les abstractions mathématiques vont vite porter non pas sur des objets, mais sur des symboles les représentant » (p. 11).

1. *Brève description de la séquence*

La séquence, menée dans une classe de 2e secondaire (grade 7 ; enfants de 13-14ans), s'organise au départ de problèmes de cartes de hockey dont certaines sont placées dans des enveloppes. La figure 3 présente un exemple de problèmes exploités.

Paulette et Richard

« La mère de Paulette et de Richard décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe. Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe. Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes. Maintenant, les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.

Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe ?

Figure 3 *– Un exemple de problèmes exploités dans la séquence (Radford et al. 2009, p. 31)*

Tous les problèmes travaillés peuvent se modéliser sous la forme d'une équation du premier degré à une inconnue où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation.

Les élèves de 2e année du secondaire pourraient résoudre ces problèmes par une démarche arithmétique, par tâtonnements par exemple, mais la séquence a pour objectif de les amener à entrer progressivement dans une démarche de résolution algébrique. Cette démarche algébrique se distingue des démarches arithmétiques notamment par la nécessité de s'appuyer sur une propriété de l'égalité, qui autorise à ajouter ou à soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité. Dans ses interventions, l'enseignant guide donc les élèves vers une appropriation progressive de cette démarche algébrique, au départ de manipulation d'objets concrets, puis de symboles de plus en plus conventionnels. Trois activités avec des énoncés similaires sont proposées aux élèves pour exploiter les problèmes. Le sens de l'activité dans le contexte d'apprentissage répond aux mêmes critères que ceux évoqués précédemment. L'enseignant définit des « activités » en relation avec les contenus mathématiques visés qui seront médiatisées par des signes et rendront nécessaires les actions et les symbolisations des élèves en relation avec les apprentissages visés.

Lors de la première activité, les élèves disposent de cartes et d'enveloppes pour résoudre la situation. Le discours des élèves est principalement oral : il s'agit de construire et d'exprimer oralement une démarche permettant de retrouver le nombre de cartes présentes dans une enveloppe. Sur le plan de la conceptualisation, l'objectif de cette première activité est de mettre en évidence la propriété de l'égalité sur laquelle s'appuie la démarche algébrique de résolution d'équations, ancrée ici dans la situation concrète travaillée : « on peut ajouter ou enlever le même nombre de cartes à chaque enfant, tout en conservant l'égalité du nombre de cartes que possède chaque enfant ». Un exemple de production est présenté dans la figure 4 (première colonne).

Dans la deuxième activité, les élèves ne disposent plus du matériel concret : il s'agit de trouver une manière de résoudre le problème sous forme uniquement écrite. Les élèves sont ici amenés à exprimer sous la forme d'un schéma une stratégie de résolution du problème traité. Un exemple de production d'un groupe d'élèves figure dans la colonne centrale de la figure 4.

Lors de la troisième activité, les élèves sont invités à utiliser le symbolisme algébrique pour résoudre les situations. Les discussions sont d'abord axées sur la manière de symboliser le problème avec des nombres, des lettres et des signes opératoires. Une fois l'équation élaborée, le discours portera sur la symbolisation algébrique de la démarche de résolution. La troisième colonne de la figure 4 présente une production élaborée dans une classe.

La suite de la séquence amènera les élèves à résoudre des équations sans contexte, données directement sous une forme symbolique.

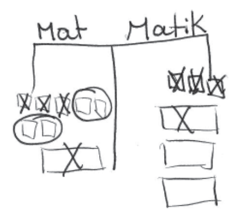
Activité 1 **Problème « Paulette et Richard »[2]**	**Activité 2** **Problème « Mat et Matik »[3]**	**Activité 3** **Problème « Mario et Chantal »[4]**
« On enlève 2 cartes à chaque enfant. Ensuite on enlève une enveloppe à chaque enfant. Finalement, on voit qu'une enveloppe comporte 5 cartes. »		$7+1n=3+3n$ $7^{-3}+1n=3^{-3}+3n$ $4+1n=3n$ $4+1n^{-1n}=3n^{-1n}$ $4=2n_{\div 2}$ $4\div 2=2n^{\div 2}$ $2=1n$

Figure 4 *- Illustration des symbolisations des problèmes (Radford et al. 2009, p. 35 et p.40).*

2. *Une vision sociale des apprentissages où les signes sont au cœur du débat mathématique.*

Le développement cognitif des élèves s'appuie, dans cette séquence, sur les interactions sociales, elles-mêmes instrumentées par des signes (objets concrets, dessins, symboles conventionnels et non conventionnels). Si les situations à résoudre sont finalement très semblables dans les trois activités (problèmes de partage de cartes), les signes utilisés pour les exploiter évoluent : au départ d'une résolution en actes, s'appuyant sur le langage courant et des objets concrets, les élèves sont amenés à enrichir ce discours oral par un système de

2 Cet exemple n'est pas repris tel quel de l'article de Radford et al. (2009) : il s'agit d'une reformulation d'un débat mené dans la classe lors de l'exploitation du problème « Paulette et Richard » (voir figure 8).

3 Ce problème, similaire au problème « Paulette et Richard », propose une répartition de cartes entre deux enfants : Mat et Matik. Il correspond à l'équation : x + 7 = 3x + 3. La symbolisation proposée a été élaborée progressivement lors d'échanges verbaux entre l'enseignante et les élèves (Radford et al. 2009, p. 35).

4 Ce problème est à nouveau très similaire au problème « Paulette et Richard ». Il correspond à l'équation 7 + n = 3 + 3n. La symbolisation du problème a à nouveau été réalisée de manière collective, à l'aide d'un débat entre l'enseignante et les élèves. (Radford et al. 2009, p. 40).

signes non conventionnels dans la deuxième activité avec un système composé de mots, de carrés, de rectangles et de barres pour modéliser les actions réalisées sur les deux membres de l'équation, puis conventionnels dans la troisième activité. Dans cette dernière activité, un signe particulier - une lettre - est donné au nombre inconnu du problème et aux opérations réalisées qui, dans les activités précédentes, consistaient en manipulations directes ou simulées d'objets.

Ce passage d'un système de signes à un autre a fait l'objet de nombreux débats au sein de la classe, débats orientés vers une meilleure compréhension du symbolisme algébrique et de la démarche algébrique de résolution des équations.

3. Développement d'une chaîne de significations

Nous proposons d'analyser la séquence présentée par Radford et al. (2009) à l'aide d'une chaîne de significations. La figure 5 ci-dessous présente cette analyse. Elle montre la manière dont les activités de symbolisations successives des problèmes soumis aux élèves permettent d'exprimer, à l'aide de trois types de signes, la démarche algébrique de résolution en passant d'une activité de manipulation de cartes et d'enveloppes à un système d'écritures symboliques.

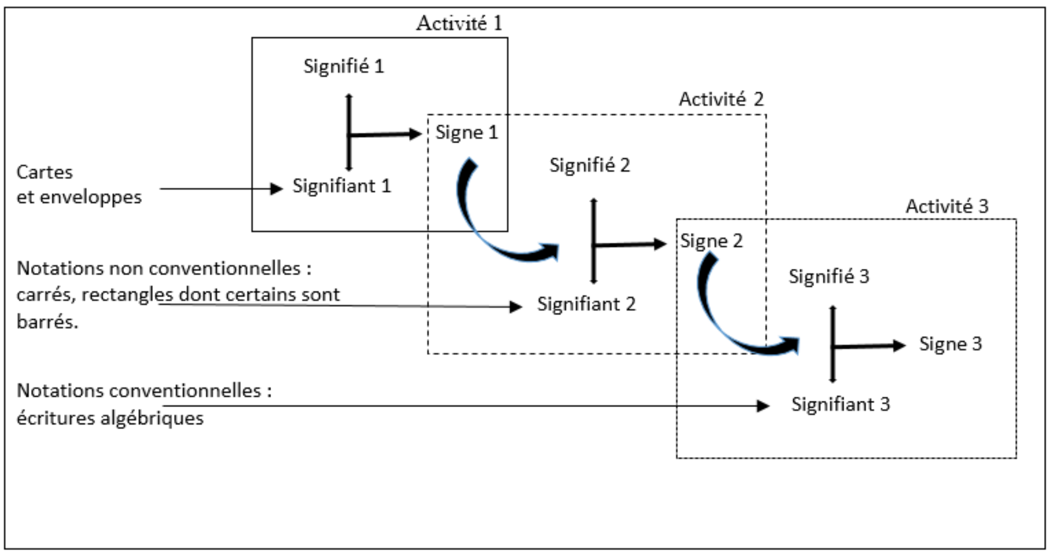


***Figure 5** – La chaîne de signification élaborée pour la séquence de Radford et al. (2009)*

Dans la figure 5, l'activité 1 confronte les élèves à du matériel concret (signe 1) : il s'agit de réaliser des opérations qui modifient le nombre de cartes de chaque enfant, mais pas le fait qu'ils en ont le même nombre de cartes[5]. Ces diverses manipulations sont orientées vers un même but : retrouver le nombre de cartes cachées dans une enveloppe. Les objets, ainsi que les opérations concrètes réalisées sur ces objets vont ensuite servir de point de départ à l'activité 2 : il s'agira cette fois de symboliser la situation à l'aide de notations non conventionnelles (signe 2), choisies par les élèves et qui rendent explicites les manipulations réalisées dans l'activité précédente. Au début de cette deuxième activité, le sens est

5 Illustrons cette idée au départ de la résolution du problème « Paulette et Richard » : selon l'exemple de résolution proposée dans la première colonne de la figure 3, on retire d'abord 2 cartes à chaque enfant : Paulette a donc des cartes en moins, de même que Richard. Toutefois, ce qui ne se modifie pas, c'est le fait qu'après cette suppression de cartes, les deux enfants conservent le même nombre de cartes (c'est-à-dire 2 de moins qu'au départ).

directement lié aux objets manipulés dans l'activité 1. Par la suite, au cours de l'activité 2, les élèves vont se détacher progressivement du contexte concret de la situation (partage de cartes entre deux enfants), pour se rapprocher d'un discours plus mathématique : on dispose au départ d'une répartition d'une même quantité de cartes en deux parts égales, certaines cartes étant cachées dans des enveloppes. Il s'agit d'effectuer des opérations de suppression (on barre des cartes ou des enveloppes des deux côtés de l'égalité) afin d'identifier, en fin de processus, le nombre de cartes correspondant à une enveloppe. Les élèves sont alors confrontés à l'activité 3 qui, bien qu'ancrée dans le même contexte, va les amener à modéliser le problème à l'aide de symbolisations algébriques conventionnelles (signe 3) et à revisiter, dans un contexte cette fois algébrique, les opérations de suppressions réalisées dans les deux activités précédentes, en vue de parvenir à résoudre une équation. Ainsi, le signifié évolue au fil de l'évolution des symbolisations. Au départ, les élèves parlent du nombre de cartes et du nombre d'enveloppes et des actions posées sur ce matériel, puis se détachant progressivement du contexte concret, ils focalisent leur attention sur les nombres de manière générale, en tant qu'objets mathématiques sur lesquels il s'agit d'opérer des opérations d'addition et de soustraction afin de retrouver un nombre inconnu. Le contexte concret est toujours présent en arrière fond mais ne se situe plus au cœur des réflexions. Il reste disponible dans la pensée des élèves si des problèmes de compréhension surviennent afin de rendre du sens aux différentes opérations formelles nécessaires pour résoudre le problème.

L'ancrage des trois activités dans un même contexte de partage équitable de cartes facilite la possibilité de revenir aux symbolisations réalisées à une étape antérieure pour donner sens à l'activité en cours.

La symbolisation présentée dans la figure 6 ci-dessous lors de l'activité 3 illustre la nécessité qu'ont ressentie certains élèves de proposer une écriture particulière pour identifier l'opération effectuée dans les deux membres de l'égalité. Cette opération est proposée en « exposant » pour la distinguer des autres opérations.

Le symbolisme garde trace de l'action de soustraction de 3 unités (-3) placée en exposant, effectuée dans chacun des deux membres de l'équation :

$$7 + 1n = 3 + 3n$$

$$7^{-3} + 1n = 3^{-3} + 3n$$

Figure 6 - *Symbolisation comportant des traces de transformations effectuées lors de la résolution d'une équation (Radford et al. 2009)*

Il semble encore important, à ce stade de l'apprentissage des élèves, de continuer à visualiser le fait que la résolution d'une équation implique des opérations (une soustraction dans l'exemple de la figure 6) qui doivent être effectuées simultanément dans les deux membres de l'équation pour conserver l'égalité de ceux-ci. Dans la suite des apprentissages, cette référence n'apparaîtra plus dans la symbolisation pour permettre de résoudre des équations de plus en plus complexes et abstraites.

V. EN GUISE DE CONCLUSION …

Les mathématiques sont bien connues pour présenter d'importantes difficultés aux élèves. La nature intangible et abstraite des objets mathématiques ne rend ceux-ci accessibles qu'à travers leurs diverses représentations. L'utilisation et la compréhension des symboles mathématiques jouent donc un rôle crucial dans les apprentissages. Or depuis longtemps, les recherches ont pointé de nombreux problèmes chez les élèves à ce sujet, notamment en algèbre où la compréhension des symboles tels que la lettre, le signe d'égalité, les expressions ou encore le signe « moins » représentent encore et toujours des obstacles régulièrement évoqués dans la littérature scientifique (Kieran 1992, 2007 ; Sfard & Linchevski 1994 ; Vlassis 2004, 2008, 2010).

Ces constats mettent plus que jamais en évidence la nécessité de développer des pratiques de classe centrées sur le symbolisme mathématique et envisageant la possibilité pour l'élève d'en construire le sens en étroite interaction avec les concepts. L'activité en algèbre qui vient d'être analysée, issue des approches socioculturelles, envisage une progression qui permet à l'élève d'ancrer les symbolisations formelles dans des activités utilisant dans un premier temps des notations informelles. Ces dernières évolueront selon une chaîne de significations, vers les symboles mathématiques usuels.

Cependant, nous tenons à souligner que ce type d'activités ne signifie pas que les symboles et les concepts émergeront « naturellement » des actions de symbolisations et des interactions sociales. Ainsi, le rôle de l'enseignant est déterminant et ne se limitera pas à planifier des activités adéquates et à faciliter les interactions entre élèves. Gravemeijer et al. (2000), et Radford (2008) partagent ce point de vue.

Les premiers (Gravemeijer et al. 2000) définissent en effet un rôle « proactif » pour l'enseignant. Cela signifie que celui-ci doit pouvoir tirer parti des contributions des élèves pour réaliser les finalités du curriculum. Il guide l'évolution de la classe tout en ne perdant pas de vue les objectifs mathématiques. Ce processus s'effectue à travers des négociations continuelles entre l'enseignant et les élèves, selon un processus de mathématisation progressive dans lequel le symbolisme et le raisonnement des élèves font l'objet d'une négociation explicite. Dans cette approche, l'enseignant est considéré comme le représentant de la culture mathématique et à ce titre, doit prendre part au discours de la classe, non seulement comme un guide lorsque le processus s'éloigne des intentions originales, mais aussi comme un véritable participant, suggérant des solutions possibles, des stratégies, des concepts, des questions et des objections. Il est en effet de la responsabilité de l'enseignant d'introduire dans le discours de nouveaux éléments mathématiques qui n'auraient jamais pu être découverts par les élèves eux-mêmes. Cela peut également se traduire par le fait de reformuler une idée ou de souligner davantage certaines contributions d'élèves indiquant par là que l'enseignant valorise certaines solutions plutôt que d'autres.

Pour Radford (2008), l'émergence, au cours des interactions enseignant-élèves, des connaissances mathématiques formelles, comme par exemple la méthode algébrique de résolution d'équations, représente plus qu'un échange de point de vue. Ce type de relation présente une profonde valeur épistémique. Il s'agit en effet d'un processus complexe et dialectique dans lequel le processus d'apprentissage est étroitement imbriqué dans celui d'enseignement. Pour Radford (2008), de la même manière que pour Gravemeijer et al. (2000), cela implique des interventions de l'enseignant comme reformuler, noter, interpréter, souligner, suggérer de nouveaux éléments, etc. Ces interventions permettent de « Parler les mathématiques » (Bednarz 2005) en utilisant divers types de signes, comme les représentations, les symboles conventionnels, les notations informelles, le langage verbal, les dessins, les gestes, les objets, etc.

En autorisant les élèves à mobiliser une large palette d'outils sémiotiques structurés en chaînes de significations, ces approches leur permettent d'attribuer du sens aux objets mathématiques mais aussi d'en élargir leur compréhension dans des contextes d'utilisation variés, favorisant ainsi la transition vers un usage formel détaché des environnements initiaux. En aucun cas, il ne s'agit de cantonner les élèves dans leurs démarches et symbolisations informelles. Au contraire, il s'agit bien d'utiliser celles-ci comme levier dans un processus progressif de conceptualisation-symbolisation en étroite interaction, semblable à celui qui s'est imposé dans l'histoire de la notation algébrique évoquée au début de ce chapitre.

REFERENCES

Bednarz N. (2005) Parler les mathématiques. *Vie pédagogique* 136, 20-23.

Booth L. R. (1984) *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Gravemeijer K. (2002) Preamble: from models to modeling. In Gravemeijer K., Lehrer R., van Oers B., Verschaffel L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer K., Stephan M. (2002) Emergent models as an instructional design heuristic. In Gravemeijer K., Lehrer R., van Oers B., Verschaffel L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer K., Cobb P., Bowers J., Whitenack J. (2000) Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. In Cobb P., Yackel E., McClain K. (Eds.) *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-274). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Harper E. (1987) Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics* 18(1), 75-90.

Ifrah G. (1994) *Histoire universelle des chiffres: l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul.* Paris : Robert Laffont.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra in the middle school through college levels. In Lester F. K. Jr (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). USA: National council of teachers of mathematics.

Kieran C. (1992) The learning and the teaching of school algebra. In Grouws D. (Ed.) *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Mac Millan.

Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics* 12(3), 317-326.

Küchemann D. (1978) Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school* 7(4), 23-26.

Presmeg N. (2006) Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61(1-2), 163-182.

Radford L., Miranda I., Demers S. (2009) *Processus d'abstraction en mathématiques.* Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Radford L. (2008) Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education* 40(1), 83-96.

Radford L. (2002) Algebra as tekhne. Artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 1(1), 31-56.

Radford L. (1998) On signs and representations, a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis* 1, 277-302.

Radford L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17(1), 26-33

Radford L. (1992) Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec* 6(1), 73-80.

Sfard A., Linchevski L. (1994) The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Theis L. (2005) L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics* 25(3), 7-12.

Vlassis J. (2010) *Sens et symboles en mathématiques : étude de l'utilisation du signe" moins" dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Berne : Peter Lang.

Vlassis J. (2008) The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology* 21(4), 555-570.

Vlassis J. (2004) *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. Learning and Instruction* 14(5), 469-484.

Vygostsky L. (1997) *Pensée et langage.* Paris : La Dispute.