Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA GÉNÉRALISATION ALGÉBRIQUE COMME ABSTRACTION D'INVARIANTS ESSENTIELS

Hassane SQUALLI*

Résumé - Cette étude s'inscrit dans les travaux de recherche portant sur le développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Nous proposons dans ce texte un modèle d'analyse du processus de généralisation algébrique chez les élèves. Nous présentons ensuite quelques résultats d'une recherche ayant porté sur le rôle de la validation dans la construction de généralisations et leurs justifications.

Mots-clefs : (Pensée algébrique, généralisation, algèbre, early algebra)

Abstract - This study is part of a research on the development of algebraic thinking in elementary and middle school. In this paper, a framework for analysing the algebraic generalization's process is presented, along with a few results of a research examining the role of validation in the construction of generalizations and their justifications.

Keywords: (algebraic thinking, early algebra, generalization)

I. INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans les travaux actuels menés par un groupe de chercheurs visant le développement d'un observatoire international de la pensée algébrique, dont les missions sont les suivantes :

- Favoriser la mise en réseau des chercheurs sur le thème de l'entrée dans l'algèbre et former de nouveaux chercheurs ;
- Constituer un lieu virtuel international d'archivage, d'échange et de diffusion des connaissances dans le domaine concerné, des données sur les pratiques enseignantes, et un lieu de mise en réseau en matière de développement de la pensée algébrique ;
- Être un lieu de veille à l'affut des questions vives intéressant l'OIPA ;
- Documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, les pratiques professionnelles en enseignement, les ressources en lien avec le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

Par ailleurs, ces travaux s'inscrivent dans le courant Early Algebra, courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, une approche curriculaire et un domaine de formation des

* Université de Sherbrooke – QC, Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

Squalli H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Cette stratégie a été implantée dans divers pays anglophones (Squalli, Suurtamm et Freiman, 2012; Squalli, Mary et Marchand, 2011). Au Québec, bien que le programme de formation n'intègre pas cette stratégie de manière explicite, différentes communautés de pratique travaillent dans ce sens, notamment dans le cadre de formations continues financées par le ministère d'éducation québécois (Squalli, Mary, Morin, 2010-2012; Mary, Squalli, Marchand, 2010-2012; Tremblay, Squalli, Adihou, Saboya, 2013-2015).

II. LE COURANT EARLY ALGEBRA

Early Algebra ne doit pas être perçue comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire ni comme une préparation à celle-ci, une préalgèbre. Elle est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certains notions et concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de propriété, de variable et de variation, entre autres). Cette stratégie nécessite une vision renouvelée de l'algèbre scolaire.
Bien qu'il n'y ait pas de consensus sur la signification de l'algèbre, il ressort des discussions plusieurs aspects partagés par une grande majorité de chercheurs et éducateurs de ce mouvement :

- L'algèbre peut être approchée selon deux points de vue complémentaires et indissociables : comme un ensemble d'activités mathématiques (résolution de problèmes, étude de structures, modélisation, étude de relations fonctionnelles, etc.) et comme une manière de penser (pensée algébrique), soit un ensemble de processus de pensée utiles dans ce type d'activités.

- l'algèbre possède de multiples aspects. Plusieurs approches didactiques de l'algèbre sont alors possibles : une approche généralisation, une approche résolution de problèmes, une approche fonction et modélisation, une approche langage[1]. Dans l'enseignement de l'algèbre, toutes ces approches doivent être considérées.

- l'enseignement de l'algèbre doit insister sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves. Deux composantes de la pensée algébrique sont particulièrement soulignées : 1) la tendance à généraliser; 2) la tendance à raisonner de manière analytique.

- Le développement de la pensée algébrique peut se faire sans l'utilisation du langage littéral de l'algèbre, il peut donc commencer dès le primaire.

Précisons que pour nous, une activité mathématique est algébrique si elle fait intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois. La pensée algébrique est une manière de penser que l'on peut mobiliser dans ce type d'activités. Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens; une tendance à symboliser et

[1] Pour une discussion de ces approches, voir par exemple (Bednarz, Kieran et Lee, 1996), (Squalli, 2000)

à opérer sur des symboles; une tendance à avoir une vision structurale[2] (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul)

Cette signification de l'algèbre inclut une grande part de l'arithmétique et intègre des éléments de l'analyse et de la géométrie. Pour sa part, van Reeuwijk (1998) adopte un point de vue proche du nôtre :

> From a mathematical point of view, algebra deals with systems in which operations play a role: addition (of numbers or other ''thing''), multiplication (numbers, other ''thing''), and the relations with the inverses. In others words, algebra deals with structure. Algebra is the study of operation structures. Following this point of view, arithmetic is a subdomain of algebra.
>
> (…)
>
> Calculus deals with change of magnitude and continuous and discrete changes. Very large and very small are important in calculus; grasping the infinite small and infinite large is a way to draw conclusions about the finite space in between.
>
> (…)
>
> When talking about school algebra, I mean something other than mathematical algebra. Algebra in the context of school algebra is a coherent integration of elements from the three domains: arithmetic, algebra, and calculus. (pp. 83-84)

Dans ce texte, nous présentons les deux composantes essentielles de la pensée algébrique : la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique.

III. LA GENERALISATION ALGEBRIQUE

1. *Introduction*

La généralisation peut être vue à la fois comme processus et comme produit. Pour faire une distinction entre ces deux aspects, nous parlerons de généralisation quand il s'agit du processus et de généralité quand il s'agit du produit.

Une généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles. La présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre fini est indispensable et assure le caractère algébrique de l'activité. Par contre, la présence des lettres n'y est pas indispensable. Nous rappelons qu'historiquement, l'algèbre, comme domaine scientifique bien définie, existe bien avant l'apparition du langage littérale de l'algèbre.

La généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et tout particulièrement en algèbre. Mason (1996) y voit même le cœur des mathématiques. En effet, la plupart des faits mathématiques sont de nature générale, comme :

- Le périmètre d'un carré est quatre fois la mesure de son côté.
- Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.
- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180 degrés.
- Si G est un groupe d'ordre n, l'ordre de tout sous-groupe de G est un diviseur de n.
- …

Pour sa part, Lee va jusqu'à penser qu'en algèbre les activités de généralisation sont les plus importantes et constituent les seuls moyens d'initier les élèves dans la culture algébrique. Elle

[2] Voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaine de calcul

ajoute : «Nor is it much of a challenge to demonstrate that functions, modeling, and problem solving are all types of generalizing activities, that algebra and indeed all of mathematics is about generalizing patterns.» (Lee, 1996, pp. 102-103).

2. *Quelques modèles du processus de généralisation*

Plusieurs auteurs proposent des modèles pour décrire le processus de généralisation en mathématiques. A l'image de celui de Dörfler, ces modèles s'inspirent souvent du modèle proposé par Piaget et Henriques.

1. La généralisation selon Piaget et Henriques

Comme pour l'abstraction, Piaget et Henriques distinguent deux formes de généralisation : la généralisation inductive et la généralisation constructive.

> [La généralisation inductive] part des observables attachés aux objets, donc d'abstractions empiriques, et s'en tient à eux pour vérifier la validité des relations observées, pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures (mais sans encore chercher d'explication ou de "raison" ce qui conduirait à dépasser les observables), est alors de nature essentiellement extensionnelle et consiste à procéder du «quelque» au «tous» ou du «jusqu'ici» au «toujours» (…).
>
> [La généralisation constructive] s'appuie ou porte sur les opérations du sujet ou leurs produits, elle est en ce cas de nature simultanément compréhensive et extensionnelle et aboutit donc à la production de nouvelles formes et parfois à de nouveaux contenus (…). Ces contenus sont alors engendrés par ces formes et non pas donnés dans des observables empiriques (…). (Piaget et Henriques, 1978b. p.6)

Pour illustrer ces deux processus, utilisons l'exemple de la commutativité de l'addition.

L'affirmation «l'addition de deux nombres naturels ne dépend pas de l'ordre des termes» est une proposition générale donc le produit d'une généralisation.

Cette proposition peut être induite à partir de l'examen de quelques cas spécifiques de couples d'entiers naturels (n , m) et du constat : les résultats des chaînes de calcul n + m et m + n sont identiques. Cette observation (la constance du résultat des comparaisons) peut alors être étendue à toutes les valeurs des variables m et n. Dans cette généralisation, l'extension se base sur les observables uniquement et non sur des arguments pouvant justifier la validité de la propriété. C'est donc une généralisation inductive.

La commutativité de l'addition peut être aussi le résultat d'une généralisation constructive. Par exemple, étant données deux collections d'objets A et B de cardinal n et m, respectivement. Calculer n + m revient à ajouter m objets de la collection B aux n objets de la collection A et à dénombrer le tout. Calculer n + m revient à ajouter les n objets de la collection A aux m objets de la collection B et à dénombrer le tout. On s'aperçoit que les deux opérations de réunion des deux collections forment le même tout. Une réflexion sur ces opérations - sans effectuation des dénombrements - conduirait à comprendre que ces opérations ne dépendent pas des cardinaux des deux collections. Le cas de ces deux collections devient alors *prototypique* de toutes les paires de collections possibles. La généralisation s'appuie alors sur les opérations du sujet et non uniquement sur les observables. Remarquons que le domaine de cette généralité est restreint au domaine des entiers naturels. Son extension au domaine d'une autre catégorie de nombres nécessite une généralisation constructive différente s'appuyant sur des arguments différents.

2. La généralisation selon Dörfler

Selon cet auteur, la généralisation est à la fois un objet et un moyen de la pensée et de la communication (1991). Selon lui, généraliser est un processus socio-cognitif qui conduit à quelque chose de général (ou de plus général) et dont le produit réfère à une multiplicité potentielle ou actuelle. Généraliser peut être vu comme un processus psychologique dans la cognition des individus, dont les produits sont alors les construits cognitifs correspondants (schèmes, formes). Cependant, les processus individuels sont toujours conditionnés et médiatisés socialement, puisqu'ils exploitent et dépendent des moyens préparés et mis en place par la société, comme le langage. On peut difficilement avoir accès directement à ces processus sauf ce qu'on peut observer au cours d'une communication sociale.

Dörfler distingue deux types de généralisation : la généralisation empirique et la généralisation théorique.

La généralisation empirique s'apparente à la généralisation inductive de Piaget et Henriques.

La généralisation théorique, quant à elle, réfère à un système d'actions dans lequel des invariants essentiels sont identifiés et remplacés par des prototypes. La généralité est construite à travers l'abstraction des invariants essentiels. Les qualités abstraites sont des relations entre les objets, plutôt que d'être elles-mêmes des objets. Attardons-nous à présenter de manière détaillée le modèle de la généralisation théorique de Dörfler. Ce modèle possède plusieurs ressemblances avec l'abstraction réfléchissante de Piaget. Un des points communs est de considérer les actions du sujet comme le point de départ de la genèse des conceptualisations mathématiques.

La figure 1, schématise une version simplifiée du modèle de généralisation théorique de Dörfler, qui est adaptée aux situations de généralisations algébriques mettant en jeu des concepts de l'algèbre élémentaire.

Détachement des invariants de leur véhicule original

↑

Les invariants comme prototypes- Extension du domaine de référence

↑

Formulation d'invariants - Description symbolique des invariants

↑

Réflexion sur le système d'actions

↑

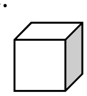
Système d'actions à partir d'une situation

***Figure 1** – Modèle simplifié de généralisation théorique de Dörfler (1991*

Pour rendre claire la présentation de ce modèle, nous l'illustrons au moyen de la résolution du problème suivant.

<u>Le problème des chaînes de cubes peints</u>

> *On crée une chaîne de cubes collés bout à bout et on se propose de les peindre. Trouver un moyen pour prédire le nombre de surfaces peintes en fonction du nombre de cubes de la chaîne.*



Le point de départ est une action ou un système d'actions. Les actions peuvent être physiques, imaginées ou symboliques, ce sont toujours des actions concrètes. Les buts des actions, les moyens utilisés ainsi que le cours des actions orientent l'attention du sujet vers certaines relations et connexions entre les objets sur lesquels portent ces actions.

Dans la situation des cubes peints, les objets sur lesquels portent les actions sont les chaînes de cubes, les faces des cubes, le nombre de ces cubes, la forme de la configuration géométrique formant la chaîne de cubes. Le but du système d'actions est décrit par la consigne du problème. Les actions sont ici imaginées, puisque les cubes sont dessinés.

Un système initial d'actions peut être le suivant : calculer combien de faces peuvent être peintes pour un cube, ensuite pour une chaîne formée de deux cubes, de trois cubes et ainsi de suite.

La répétition de ces actions conduit le sujet à une certaine constance dans les actions. Dörfler parle dans ce cas des invariants des actions. Dans notre exemple, les invariants des actions sont par exemple, « pour chacun des cubes du centre, deux faces ne peuvent être peintes» alors que «pour les deux cubes extrêmes, une seule face ne peut être peinte» ou encore, « quand on rallonge une chaîne de cubes d'un cube on augmente le nombre de faces qui peuvent être peintes de 4 (6 – 2).

Ces systèmes d'actions s'articulent alors autour de schémas d'actions, ou protocoles, qui sont ici la suite organisée d'actions que réalise le sujet pour calculer le nombre de surfaces peintes d'une chaîne donnée de cubes. Par exemple, un premier protocole consiste à déterminer le nombre de faces peintes d'une chaîne en calculant successivement le nombre de faces peintes des chaines de longueur 1, 2, 3 et ainsi de suite. Ce protocole bien qu'il puisse résoudre le problème pour une chaîne de n'importe quelle longueur, n'est pas pratique dans le cas des chaînes très longues, et nécessite une reconfiguration pour aboutir à une règle générale. Un autre protocole est de considérer que dans les chaînes de cubes expérimentés, il faut compter «2 fois 5 faces» pour les deux cubes extrêmes et «le nombre de cubes du centre fois 4 faces».

Comme nous venons de le faire, la formulation des invariants et des schémas d'actions nécessite une description symbolique, parce qu'il est nécessaire d'utiliser des symboles pour décrire les objets sur lesquels portent les actions (les cubes, les faces des cubes) ou pour décrire les transformations subies par le nombre de faces visibles lorsqu'on fait varier le nombre de cubes. Ces symboles peuvent être de nature verbale, iconique, géométrique ou algébrique. Les invariants sont potentiellement plus généraux que les actions elles-mêmes, ils peuvent être appliqués à n'importe quelle chaîne de cubes.

Un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand ces invariants sont remplacés par des *prototypes*. C'est-à-dire quand la formulation des protocoles ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés, mais aussi à envisager les cas potentiels. Ainsi, le schéma d'actions précédent, compter 2 fois 5 faces pour les deux cubes extrêmes et le nombre de cubes du centre fois 4 faces s'applique au cas de la chaîne de cubes sur laquelle a porté le système d'actions initial, mais aussi à n'importe quelle autre chaine de cubes (ayant plus de 3 cubes). Le fait que les invariants soient devenus prototypes, ou que le cas spécifique objet de l'activité du sujet soit devenue prototypique, est un changement qui s'effectue chez le sujet et non dans les objets. Le mouvement de pensée du sujet n'est plus *rétrospectif*, servant à décrire les actions et les invariants à partir des constances des actions, mais *prospectif*, les invariants ne couvrent plus seulement les cas examinés, mais aussi les cas potentiels. Ce changement est le fruit de l'expérience qu'a eu le sujet avec les différents cas spécifiques. Dörfler précise qu'un objet matériel, incluant les symboles n'est pas un *prototype* en soi. Il acquiert cette qualité en vertu d'une vision particulière qu'en a un sujet, vision qui est construite au cours d'une activité du sujet avec cet objet. En conséquence, un *prototype* ne peut pas être «passivement» perçu ou montré. En outre, les termes «cubes extrêmes» «cubes du centre» sont vus comme des variables qui varient. Notons que ce qu'on appelle exemple générique est un cas spécifique qui devient prototype pour un sujet. La généricité d'un exemple est une caractéristique émergente chez le sujet, non une propriété de l'exemple, elle ne se transmet pas, elle se construit.

Les invariants et leurs formulations symboliques sont alors détachés des actions originales. Dans notre exemple, le schéma d'actions peut dès lors être formulé de la manière suivante : le nombre de faces peintes d'une chaîne de cubes est : «2 fois 5 plus le nombre de cubes de la chaîne moins 2, fois 4», ou encore en langage numéro-littéral, $2 \times 5 + (n - 2) \times 4$ où n est le nombre de cubes dans la chaîne».

Dès le départ, les symboles possèdent un certain domaine de référence et ce domaine est étendu graduellement. Ce domaine se limitait d'abord aux cas spécifiques examinés. Il a été ensuite étendu aux cas potentiels générés par les prototypes; autrement dit, les cas pour lesquels on peut appliquer le même schéma d'actions tout en gardant stables les mêmes invariants. Dans notre exemple, la description symbolique de notre schéma d'actions s'applique à toute chaîne de cubes possédant deux cubes extrêmes et des cubes centraux, soit aux chaînes qui ont 3 cubes et plus.

En réfléchissant sur la description symbolique des invariants, les symboles utilisés commencent à se substituer graduellement aux éléments des actions et de leurs transformations. Cette réflexion peut permettre une autre extension du domaine de validité de la généralité. Dans notre exemple, par construction, notre formule $2 \times 5 + (n - 2) \times 4$ n'est valide que pour, $n \geq 3$. Mais on peut vérifier que cette formule marche aussi pour les cas $n = 1$ et $n = 2$. Bien que le système d'actions initial ne peut s'appliquer aux chaînes formées d'un ou de deux cubes.

Les symboles acquièrent les caractéristiques d'objets; ils deviennent eux-mêmes les objets des actions et, en tant que tels, ils deviennent les véhicules de différentes relations entre les invariants. Ces symboles sont alors de nouveaux objets de la pensée, des objets mathématiques, dont les significations résident dans les invariants. Le détachement total des actions originales permet d'écrire notre règle comme $4n + 6$, où n est un entier naturel non nul représentant le nombre de cubes dans la chaîne.

Cet objet mental est une généralité, parce qu'il a le potentiel d'un domaine de référence non limité. La réification des variables et des symboles complète le processus d'abstraction qui a commencé par fixer les invariants. Dans ce sens les invariants sont détachés de leur véhicule original, ils acquièrent une indépendance et forment la généralité abstraite.

3. *Quelques échos d'expérimentations auprès d'élèves*

Le modèle de Dörfler que nous venons de présenter s'est avéré fécond dans l'analyse fine du processus de généralisation chez les élèves. Voici quelques résultats tirés d'une recherche rapportée dans (Mary, Squalli, Schmidt, 2008). L'expérimentation didactique de la situation *Pentamino*[3] a eu lieu dans une école secondaire dite spéciale recevant des élèves en difficulté grave d'apprentissage puisqu'ils avaient au moins deux ans de retard sur le plan académique.

[3] Le matériel des *pentaminos* est tiré d'une activité présentée par Ralph Mason (2000) lors d'un Colloque du groupe canadien d'études en didactique des mathématiques.

Leur niveau scolaire en mathématique est variable, mais ne dépasse pas le niveau de secondaire 1 (grade 7).

Pour l'activité elle-même, on utilise une grille numérique formée de 7 lignes et 10 colonnes, contenant la suite des nombres de 1 à 80 (figure 2); sur laquelle on place une forme (constituée de cinq rectangles opaques sauf deux, voir figure 3) selon une orientation fixée. Le but de l'activité est de construire une stratégie gagnante pour une forme donnée, c'est-à-dire permettant de prédire, sans le support de la grille numérique, le nombre apparaissant dans la case nommée sortie ou case Arrivée (case bleu) étant donné un nombre initial connu dans la case nommée entrée ou case Entrée (case rouge).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33				37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

***Figure 2** – Grille numérique*

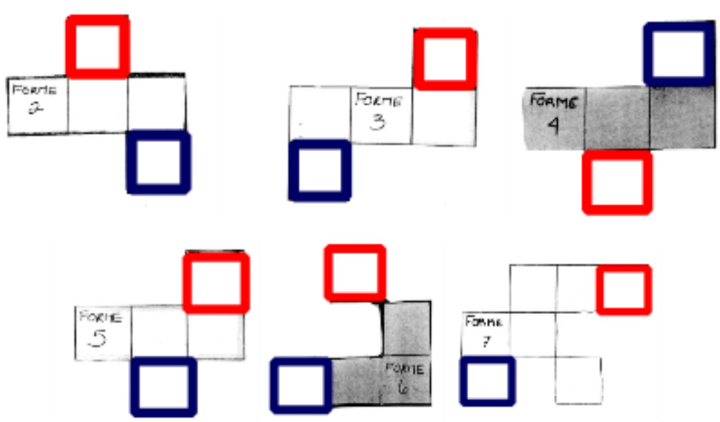


***Figure 3** – Différentes formes utilisées*

D'un point de vue mathématique, chaque forme est reliée à la règle d'une relation fonctionnelle affine qu'il s'agit de trouver. Une telle règle peut s'écrire en notation conventionnelle: $y = x + k$ où x représente le nombre de la case de départ, y celui de la case d'arrivée et k une constante. La régularité réside dans la constance des écarts $y - x$. La situation présentée aux élèves comporte trois tâches : 1) pour une forme donnée et sans la grille, prédire le nombre qui va apparaître dans la case d'arrivée (carré bleu) connaissant le nombre de la case de départ (carré rouge) ; 2) comparer des formes proposées par l'enseignant pour déterminer celle qui est la plus difficile pour réaliser la tâche de prédiction ; 3) construire la forme la plus difficile. La première tâche consiste en un jeu où les élèves doivent prédire le résultat sans la grille. Ceci vise la formulation d'une règle générale pour une forme donnée. Les deuxième et troisième tâches ont comme objectif d'amener les élèves à se détacher de la répétition des expériences puis à envisager une règle générale pour l'ensemble des formes présentées.

Les élèves ont utilisé différents systèmes d'actions qui peuvent être configurés en 3 grandes familles. Une famille étant une classe constituée des systèmes d'actions portants sur les mêmes objets des actions. Voici les familles identifiées dans la situation *Pentamino*.

F1: Cette famille regroupe les systèmes d'actions basées sur des déplacements horizontaux et verticaux sur la grille au voisinage de la forme. Les stratégies des élèves sont alors décrites sous forme d'une chaîne d'opérateurs: - 2, + 10, + 10, comme le cas d'Ulysse[4] par exemple pour la forme 3. Dans cette famille, le véhicule des actions est constitué par la forme du *pentamino*. Les invariants sont liés à la structure de la grille numérique et à la forme du *pentamino*.

F2: Cette famille repose sur le calcul du nombre de cases entre la case de départ et la case d'arrivée, une fois la forme posée sur la grille numérique. L'invariant mathématique est décrit sous forme d'un seul opérateur + 21, par exemple pour la forme 2, comme dans le cas de Cléopâtre :

> Quand elle me le donne, moi je regarde bien la forme. Là j'imagine, j'imagine le chiffre dans l'arrivée. Et là je compte les nombres qui sont dans l'autre et là, quand j'arrive dans ma case de départ, je le sais.

Dans cette famille, le véhicule des actions n'est pas la forme du *pentamino,* mais les positions relatives des nombres des cases de départ et d'arrivée dans la grille. Les invariants mathématiques sont liés à la constance de l'écart entre ces deux nombres quelle que soit la position de la forme sur la grille.

F3: Cette famille contient les systèmes d'actions reposant sur la comparaison des chiffres des unités et des chiffres des dizaines du nombre de départ et du nombre d'arrivée. L'invariant mathématique est décrit comme un couple d'opérateurs (- n, + m) que l'on applique respectivement au chiffre des unités et au chiffre des dizaines du nombre de la case d'entrée. Voici comment David détermine le nombre de la case de sortie quand on applique la forme 2 au nombre 25 :

> Moi j'ai trouvé de faire (inaudible). Tu as deux [le chiffre des dizaines de 25], tu rajoutes deux : 3, 4. OK. Pis ici [chiffre des unités de 25] tu en rajoutes juste un, ça va faire 6. Alors 4 et là 6 : 46.

Le tableau suivant présente la distribution des systèmes d'actions initiaux des élèves selon les familles.

Famille 1	Famille 2	Famille 3	Total
8 **73 %**	**2** **18 %**	**1** **9 %**	**11** **100%**

Figure 4 *- Répartition des systèmes d'actions initiaux sur les 3 familles*

[4] Tous les noms d'élèves sont des noms fictifs.

Comme attendu par l'équipe de recherche, la majorité des élèves ont utilisé les systèmes d'action de la famille 1. Compte tenu de la nature des médiations potentielles que permet la situation, les formes se prêtaient naturellement à être le véhicule des actions des élèves. Les invariants construits sont justifiés par la structure de la grille numérique. Les systèmes d'actions de cette famille ont permis des généralisations de nature théorique. Nous y reviendrons plus loin.

En revanche, les généralisations des familles 2 et 3 sont des généralisations empiriques. En effet, la régularité est dégagée à partir de la constance des résultats de quelques cas. C'est le schéma classique d'une généralisation empirique. Le domaine de validité du résultat est étendu sans une réflexion sur les raisons de la validité du résultat. Un des enjeux du développement de la généralisation algébrique chez les élèves consiste justement à les amener à s'éloigner d'une généralisation empirique et de tendre vers l'utilisation de généralisations théoriques.

Cette étude confirme le rôle essentiel que jouent les systèmes d'actions initiaux dans le processus de généralisation. Les généralités construites par les élèves sont empreintes des actions qui ont mené à leur formulation. Le système d'actions initial détermine d'une certaine façon la direction et le contenu de la généralisation (les invariants) dont la pertinence relève de l'activité du sujet. De plus, il détermine le registre sémiotique pour décrire les actions, les opérations sur ces actions, les invariants ainsi que les explications. Au début de l'activité, Ulysse décrit sa stratégie pour la forme 2 ainsi «Augmente de un, puis descend de un, puis descend encore de un parce que chaque ligne c'est dix». Cette description, porte sur trois objets : les actions réelles (par exemple, «descends de un»), les invariants mathématiques («augmente de 1») ainsi que la justification d'un invariant («parce que chaque ligne c'est dix» à propos de l'invariant implicite : «quand tu descends de 1 ajoute 10»). Plus tard, Ulysse décrit sa stratégie pour la forme 3 en une chaîne d'opérateurs «-2, +10, +10». Bien que cette description soit symbolique, elle tire son sens et son caractère opératoire du système d'actions initial («avancer de deux cases à droite, descendre d'une case, descendre encore d'une case»).

En outre, les systèmes d'actions initiaux sont déterminants dans la négociation de sens au cours des interactions. En effet, pour comprendre la stratégie d'un autre, il faut être capable de lier sa formulation au système d'actions qui lui donne sens ou de pouvoir l'interpréter dans son propre schème des actions. Cela paraît relativement facile quand les systèmes d'actions sont de la même famille. En effet, en utilisant des systèmes d'actions de la même famille, les élèves exploitent les mêmes véhicules des actions, arrivent aux mêmes invariants, partagent le même registre sémiotique pour décrire les invariants et leurs justifications. En revanche, l'adoption de la stratégie d'un élève qui se base sur un système d'actions d'une autre famille est plus difficile cognitivement. Elle nécessite un détachement de son propre système des actions. Un tel détachement est difficile quand le processus de généralisation n'a pas encore atteint ce niveau. Dans ce cas, l'élève doit changer de point de vue, abandonner son propre système d'actions et orienter l'attention vers un système d'actions d'une famille différente.

Finalement, l'analyse des processus de généralisation des élèves a mis en évidence le rôle de la validation dans la construction des généralités et de leur justification. Balacheff (1988) définit le processus de validation comme une activité de raisonnement dont la finalité est de s'assurer de la validité d'une proposition et éventuellement de produire une explication, une argumentation ou une démonstration. Cela suppose que le sujet a émis une telle proposition, ou que celle-ci est portée à sa connaissance par une tierce personne. Quand l'enjeu de la validation est le caractère général de la proposition, la généralité est donnée ou a déjà été produite. Nous sommes donc à la fin du processus de généralisation. La validation porte ainsi sur le produit de la généralisation. Elle ne peut donc être concomitante à la construction de la généralisation, car elle vient en aval de celle-ci. Au cours d'une activité de généralisation, les deux processus peuvent se chevaucher sans avoir lieu en même temps. En effet, le processus de généralisation passe par une série d'abstractions d'invariants essentiels; une fois que ces invariants sont formulés, un processus de validation peut s'enclencher pour en éprouver la validité. Mais dans une telle activité, c'est la généralisation qui conduirait l'élan de pensée du sujet. La généralisation est de nature prospective (ou extensionnelle selon Piaget), puisqu'elle est orientée vers le dépassement du spécifique, en anticipant le général. La validation, quant à elle, est rétroactive, puisqu'elle opère sur le produit de la généralisation.

REFERENCES

Balacheff N. (1988) *Une étude épistémologique du processus de preuve en mathématiques au collège*. Thèse présentée à l'Université National Polytechnique, Grenoble.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Boston: Kluwer Academic Publishers

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp.63-85). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Lee L. (1996) An initiation into algebraic culture trough generalization activities. In *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Piaget P., Henriques G. (1978) *Recherches sur la généralisation*. Paris : Presses Universitaires de France.

Mary C., Squalli H., Schmidt, S. (2008) Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. In Bisaillon J.-M., Rousseau N. (Eds.) *Les contextes d'intervention favorables aux jeunes en grandes difficultés* (pp.167-192). Montréal : Presses de l'université du Québec.

Mason J. (1996). Expressions of generality and roots of algebra. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.), *Approches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reeuwijk V.M. (1998) Structure in school algebra. In the *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 83-85). Washington, D.C.: National Academy Press.

Squalli H., Suurtaam C., Freiman V. (2012) Rapport du groupe de travail F : Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Actes de la 36e rencontre annuelle groupe canadien d'études en didactique des mathématiques. Université Laval, Québec : 25 -29 mai 2012.

Squalli H., Mary C., Marchand, P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Lebeaume J., Hasni A., Isabelle Harlé I. (Eds). *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie*. Bruxelles : DeBoeke.

Squalli, H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Québec, Université Laval.