Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PREMIÈRE RENCONTRE AVEC L'ALGÈBRE

Mirène LARGUIER*

Résumé – Une comparaison entre les programmes du Québec et de la France pour des élèves entre 10 et 12 ans, a mis en lumière l'intérêt des problèmes de généralisation mis en œuvre dans des classes au Québec. Ce type de problème semble permettre une entrée vers l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique en comparaison avec une pensée arithmétique. Les analyses a priori et a posteriori de quelques problèmes de généralisation typiques testés en France ont pour objectif de tester la solidité de l'hypothèse concernant l'intérêt des problèmes de généralisation.

Mots-clefs : algèbre – pensée algébrique – problèmes de généralisation

Abstract – A comparison between programs of Quebec and France for pupils between 10 and 12 years, revealed the interest for problems of generalization implemented in classes in Quebec. This type of problem seems to allow an entrance towards the algebra and the development of an algebraic thinking to comparison with an arithmetical thinking. Analyses of some typical problems of generalization tested in France have for objective to test the solidity of the hypothesis concerning the interest of the problems of generalization.

Keywords: Algebra - algebraic thinking - problems of generalization

I. UNE ÉTUDE DANS LE CADRE DE L'OBSERVATOIRE INTERNATIONAL DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

Cet article est une contribution dans le cadre d'un projet de grande envergure qui est le développement de l'OIPA : Observatoire International de la Pensée Algébrique. Ce projet est coordonné par Alain Bronner en France et Hassane Squalli au Québec. Il s'appuie sur de nombreux résultats de la recherche résumés ci-dessous.

L'enseignement de l'algèbre, plus particulièrement lors de l'entrée dans l'algèbre, est un *problème de la profession*, au sens de Chevallard (2006). Pour répondre en partie à ce problème, dans les recherches menées par Squalli et al. au Québec, l'accent est mis sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre (Squalli, Mary & Marchand 2011). En France, plusieurs travaux de recherche ont souligné les difficultés de la construction de la pensée algébrique (rapport sur le calcul de la commission Kahane 2002 ; numéro spécial de la revue Recherche en Didactique des Mathématiques 2012). Quant à Bronner (2007), il a montré la difficulté de circonscrire la frontière entre numérique et algébrique. Il est à l'origine de l'idée d'un observatoire du numérique et de l'algébrique et plusieurs travaux de doctorat qu'il a encadrés portent

* Université de Montpellier – France – mirene.larguier@fde.univ-montp2.fr

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 313-333.

directement sur des thématiques de ce futur observatoire (Larguier 2009 ; Marcio Santos Farias 2010 ; Andwandter 2012 ; Briant 2013).

Au Québec comme en France, l'articulation entre les domaines numérique et algébrique constitue l'un des aspects du *problème de la profession* cité précédemment. Toutefois cette question ne se pose pas de la même façon dans les deux pays comme l'a souligné Artigue (2012) lors d'une Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques à l'IFÉ. Elle distingue trois voies d'entrée[1] suivant les pays et les cultures :

- la voie classique pour nous [en France] des équations,
- la voie de la reconnaissance de structures (patterns) et de la généralisation [voie choisie par les pays anglo-saxons].
- la voie de la modélisation et des fonctions.

> […] ces différentes routes ne posent pas dans les mêmes termes la question des discontinuités entre arithmétique et algèbre.

Cet article présente des éléments d'une recherche en lien avec l'une des questions vives travaillées dans l'OIPA à savoir : quelle entrée dans l'algèbre privilégier et quelles situations proposer aux élèves pour développer une pensée algébrique ? Une hypothèse retenue par l'équipe au Québec et soutenue également par l'équipe française, est de proposer des situations de généralisation comme porte d'entrée vers l'algèbre. Dans cet article il s'agit d'analyser une situation de généralisation avec la perspective de repérer la qualification de la pensée des élèves comme étant de nature arithmétique ou bien de nature algébrique. Il s'agit donc de délimiter d'une part la frontière entre les domaines numériques et algébriques considérés comme cadres mathématiques (au sens de Douady 1984), et d'autre part la frontière entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique, deux frontières qui ne se recouvrent pas toujours.

Après avoir comparé le *savoir à enseigner* (au sens de la transposition didactique définie par Chevallard 1985) dans les programmes du Québec et de la France relativement au début de l'algèbre, l'article présentera trois exemples de situations de généralisation et s'attachera à faire l'analyse de productions d'élèves concernant l'un de ces problèmes : les maisons en allumettes. Cette situation testée en France en classe de 5^{e} sera utilisée pour dégager une série de critères afin de décrire la genèse de la pensée algébrique chez les élèves. La question essentielle est : quels sont les indicateurs qui permettent de diagnostiquer chez un élève une pensée algébrique naissante ? Cette question va de pair avec cette autre question qui ne sera pas traitée dans cet article : ces problèmes de généralisation sont-ils véritablement une réponse pertinente pour signifier l'entrée dans l'algèbre ?

II. COMPARAISON DES PROGRAMMES DU QUÉBEC ET DE LA FRANCE

La comparaison des institutions scolaires québécoises et françaises n'est pas facile, car l'enseignement secondaire commence en classe de 6^{e} en France pour des élèves qui ont normalement 11 à 12 ans, alors qu'au même âge au Québec ces élèves sont en sixième année de l'enseignement primaire (Cf. tableau 1). Aussi l'analyse comparée des programmes de fin de primaire et du début du secondaire dans les deux pays, montre des différences notoires relatives à l'entrée dans l'algèbre et plus spécifiquement l'entrée dans la pensée algébrique.

[1] Citation extraite du diaporama, consulté sur Internet le 20 février 2015 : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/12_bull_le_calcul_de_l_ecole_au_college_vers_le_calcul_algebrique.8596

Concernant le domaine numérique, le programme du Québec le dénomme *arithmétique* alors qu'en France il apparait sous la dénomination *nombres et calcul*. Par ailleurs le programme du Québec comporte des expressions inconnues en France comme *nombre composé* et *nombre carré*[2] avec les définitions suivantes[3] :

- « Un **nombre composé** est un nombre qui a 3 facteurs ou plus. »
- « Un **nombre carré** est un nombre pouvant s'exprimer sous la forme de n^2, où *n* est un nombre naturel. »

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Enseignement pré-scolaire</td><td colspan="6">Enseignement primaire au Québec</td><td colspan="2">Enseignement secondaire au Québec</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Maternelle</td><td>1e</td><td>2e</td><td></td><td>Maternelle</td><td>1e</td><td>2e</td><td></td><td>Maternelle</td></tr>
<tr><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td><td>6 - 7</td><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td><td>6 - 7</td><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td></tr>
<tr><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td><td>CP</td><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td><td>CP</td><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Maternelle</td><td colspan="5">Enseignement élémentaire</td><td colspan="3">Collège</td></tr>
<tr><td colspan="8">Enseignement primaire en France</td><td colspan="3">Enseignement secondaire en France</td></tr>
</table>

Tableau 1 - *comparaison des institutions scolaires au Québec et en France*

Concernant les contenus en terme d'objets mathématiques numériques, les programmes des deux pays se ressemblent, si ce n'est que dans les programmes du Québec les nombres décimaux - ainsi que les nombres carrés, premiers ou composés - sont abordés dès la 4e du primaire (correspondant au CM1 en France), et les puissances sont abordées en 5e du primaire (correspondant au CM2 en France). Le tableau 2 précise cette comparaison et révèle qu'en France l'étude des entiers naturels est plus succincte qu'au Québec. Un exemple illustre bien cette comparaison : il faut arriver en classe de terminale scientifique (17-18 ans) pour que soit abordée la notion de nombre premier dans le cadre d'une partie optionnelle de ce programme (enseignement de spécialité, partie dénommée *arithmétique*).

Première apparition dans les programmes	Au Québec	En France	Remarque
Nombre premier	4e primaire (9-10 ans)	Terminale S enseignement de spécialité	Nombres premiers entre eux : abordé en classe de 3e du collège (14-15 ans)
Nombre composé	4e primaire	N'apparait pas	
Nombre carré	4e primaire	N'apparait pas	
Puissance	5e primaire	4e (13-14 ans)	
Nombre décimal	4e primaire	CM1 (9-10 ans)	

Tableau 2 - *étude comparée du numérique dans les programmes du Québec et de la France*

Concernant l'entrée dans la pensée algébrique et les problèmes de généralisation, on trouve au Québec cette préconisation[4] qui concerne tout le primaire :

[2] En France cela correspond à la dénomination suivante : nombre carré parfait
[3] Définitions issues de ce site : http://bv.alloprof.qc.ca
[4] La référence de la citation se trouve dans la « progression des apprentissages au primaire » consulté sur le site : http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionPrimaire/mathematique/. Sauf avis contraire, toutes les citations de l'article relatives au Québec sont extraites de ce document qui fixe le *savoir à enseigner*.

> Décrire dans ses mots et avec un vocabulaire mathématique approprié des régularités numériques (ex. : nombres pairs, nombres impairs, nombres carrés, nombres triangulaires, nombres premiers, nombres composés).

Les élèves sont donc invités à repérer et à décrire des structures à travers des *régularités numériques*, ce qui peut constituer un pas vers l'expression d'une généralisation inductive (Piaget & Henriques 1978). Ce type de compétence n'est pas du tout signalé dans le programme français. Par ailleurs, au Québec, le travail sur les nombres carrés ou triangulaires favorise une conception géométrique des nombres entiers et l'émergence de concepts et de théorèmes en acte favorisant la généralisation. Par exemple : pour passer du nombre carré n^2 au nombre carré $(n+1)^2$, il suffit d'ajouter $2n+1$ à n^2 en visualisant les éléments à ajouter au bord du premier carré pour obtenir le second (Cf. figure 1).

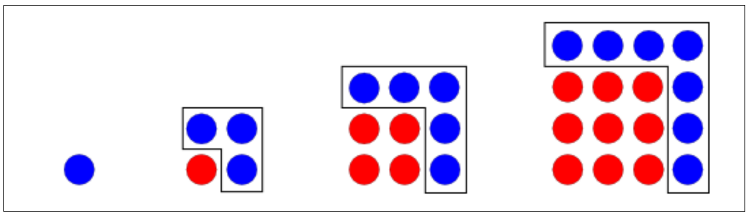


***Figure 3** - les nombres carrés (http://images.math.cnrs.fr)*

Le terme équation apparait une fois dès le primaire dans le programme québécois. Voici ce qui est demandé au Québec pour tout le primaire concernant le travail en arithmétique :

> Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'équations et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition et de la soustraction).

Ce travail relatif aux équations est précisé en lien avec des situations additives :

> Déterminer un terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) : $a + b = \square$, $a + \square = c$, $\square + b = c$, $a - b = \square$, $a - \square = c$, $\square - b = c$

Il est également précisé dans des situations multiplicatives :

> Déterminer un terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) : $a \times b = \square$, $a \times \square = c$, $\square \times b = c$, $a \div b = \square$, $a \div \square = c$, $\square \div b = c$

Ce travail sur ces équations qui peuvent se résoudre arithmétiquement vise leur résolution mais aussi vise à faire émerger les liens entre d'une part addition et soustraction et d'autre part entre multiplication et division ce qui peut être vu comme une initiation à l'algèbre en tant qu'étude des structures des ensembles de nombres.

Dans les termes à retenir, se trouvent : « Égalité, inégalité, équation », égalité et équation ne sont donc pas des synonymes malgré leurs signifiants identiques, et les élèves doivent connaitre ces termes dès la 3[e] (correspondant au CE2 en France).

Toujours au Québec, un autre élément qui prépare les élèves à l'entrée dans l'algèbre est la préconisation suivante dès le début du primaire : « Établir la relation d'égalité entre des expressions numériques (ex. : 3 + 2 = 6 – 1). » Effectivement, ce type de tâches permet de mieux construire le concept d'égalité ; cela contribue au dépassement de l'obstacle qui consiste à connaitre l'égalité comme une relation qui n'est pas symétrique et qui remplace l'expression « ça fait ». Cette nouvelle conception de l'égalité permet de concevoir deux noms propres d'un même objet qui dénotent le même nombre (Frege 1892). Dès le début du primaire il est demandé également dans le programme québécois de « Déterminer des équivalences numériques à l'aide de relations entre les opérations » en utilisant en acte la commutativité et l'associativité (ces termes utilisés dans le texte du programme n'ont pas à être connus par les élèves). Cette demande renforce encore la solidité du concept d'égalité dans son acception d'équivalence.

Les termes *régularité* et *suite* doivent être connus par les élèves dès le début du primaire (ils figurent explicitement dans le vocabulaire à institutionnaliser), soit dès 6 ans, et voici encore ce qui est dicté par le programme québécois :

> Les situations qui lui sont proposées doivent comporter des régularités numériques ou non numériques (couleurs, formes, sons, etc.). Elles lui permettront d'observer et de décrire diverses régularités, des suites de nombres et d'opérations telles que la suite des nombres pairs, la suite des multiples de 5, la suite des nombres triangulaires. Elles le conduiront ainsi à ajouter des termes à une suite, à énoncer des règles générales ou à construire des modèles. Il pourra alors énoncer ou déduire des définitions, des propriétés et des règles. (Progression des apprentissages au primaire).

Concernant l'entrée dans l'algèbre, il y a incontestablement une grande différence avec les programmes français du primaire, ces derniers n'invitant pas explicitement les professeurs des écoles à faire découvrir à leurs élèves des régularités. D'autre part, en France, le terme d'équation n'intervient pas dans les programmes de primaire et le terme d'égalité n'apparait que dans l'expression « égalité de longueurs ». Dans les programmes français apparait une insistance pour le calcul sous toutes ses formes et pour la résolution de problèmes. Dans ce cadre, il s'agit de travailler les objets des différents domaines et de développer le raisonnement logique, mais sans préciser ce que recouvre le raisonnement en mathématiques : « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. ». Ainsi le programme en France est davantage axé sur des activités numériques alors que pour le Québec, outre les aspects calculatoires et la résolution de problèmes qui sont également au cœur de l'activité mathématique, le programme ouvre explicitement une fenêtre vers le développement d'une pensée algébrique qui se traduit par des problèmes de généralisation et des études de suites.

Concernant le collège en France, dont la première année correspond à la dernière année du primaire au Québec, les termes égalité et équation apparaissent et le préambule du programme de collège précise que les élèves doivent « assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation). » (BO spécial n° 6 du 28 août 2008, p.10). L'algèbre est donc présentée comme un langage avec des objets particuliers qui doivent être distingués, mais aucune autre précision n'est donnée.

Dans le programme français de la classe de sixième, dans le domaine dénommé « nombres et calculs » la préoccupation essentielle est le développement de techniques de calcul. Le terme « égalité » n'apparait même pas. Aucune proposition du programme ne permet de l'interpréter comme un pas vers l'algèbre si ce n'est le travail relatif aux formules : « À travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, les élèves peuvent se construire et utiliser un premier répertoire de formules » (ibid., p.17).

Le premier contact avec la lettre est donc permis par l'usage des formules, ce qui confère à la lettre un statut de marque place, et pour les élèves la lettre apparait comme l'initiale d'un mot (r pour rayon, l pour largeur, etc.) ce qui peut constituer un obstacle didactique au sens de Brousseau (1998). C'est également en cinquième qu'apparait le terme d'équation. « L'initiation à la notion d'équation » apparait à travers ce type de tâches : « Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques » (Ibid.) et c'est assorti de ce commentaire :

> Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique.

> Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.
>
> La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. (ibid., p. 23).

Ainsi les programmes alertent les professeurs sur la difficulté de l'entrée dans l'algèbre qui se traduit tout d'abord par l'usage de la lettre et aussi par un changement conceptuel concernant l'objet égalité. Un type de tâches motivant l'entrée dans l'algèbre est implicitement préconisé, à savoir proposer « des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique ». Une raison d'être de l'algèbre apparait donc là comme étant un raisonnement nécessité par des situations dans lesquelles le raisonnement arithmétique n'est plus efficace. L'opposition entre arithmétique et algébrique est donc implicitement exprimée.

Pour trouver une allusion aux problèmes de généralisation – problèmes qui apparaissent dès l'âge de 6 ans au Québec à travers l'étude de régularités – il faut regarder le programme français de la classe de quatrième (élèves de 13 à 14 ans). Effectivement on trouve une indication discrète sur des situations de généralisation, mais ce n'est vraiment pas mis en relief. C'est en lien avec le thème « calcul littéral » assorti du commentaire suivant :

> Le travail proposé [avec le calcul littéral] s'articule autour de trois axes :
>
> - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;
>
> - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
>
> - utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). (Ibid, p. 29)

En conclusion, les instructions officielles au Québec et en France décrivent deux curricula officiels très différents en ce qui concerne l'entrée dans l'algèbre. Cependant des recherches en didactique au Québec comme en France postulent que les problèmes de généralisation sont de bons candidats pour permettre le développement d'une pensée algébrique. Dans la suite de cet article, l'analyse de productions d'élèves à propos de l'un de ces problèmes en France montrera comment peut s'opérer l'articulation entre le numérique et l'algébrique.

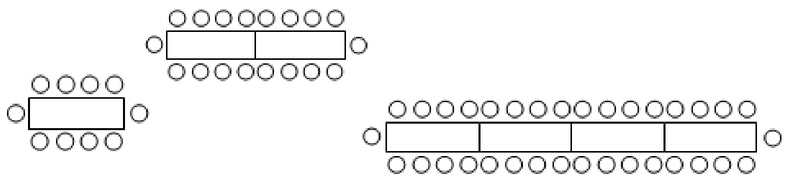
III. PRESENTATION D'EXEMPLES DE PROBLÈMES DE GENERALISATION

Dans cette partie je présente en tant qu'exemples trois problèmes de généralisation. Il s'agit en fait dans ces trois cas de problèmes dont le modèle mathématique est une suite arithmétique. L'analyse a posteriori permet de mettre au jour les réponses possibles de la part d'élèves ainsi que les indicateurs d'une pensée algébrique émergente. Dans le cadre de cet article, cette analyse ne sera réalisée que pour le problème des maisons en allumettes.

1. Les tables de la cafeteria

<u>Les tables de la cafétéria</u>

Dans une cafétéria d'école, le cuisinier dispose de petites tables rectangulaires qu'il faut mettre bout à bout pour former de plus grandes tables. Voici quelques dispositions possibles.



a) Donne une manière de trouver rapidement le nombre de chaises placées autour d'une grande table, peu importe la longueur de celle-ci.

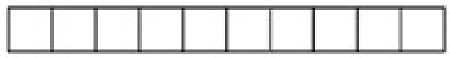
b) Si une grande table est entourée de 234 chaises, combien de petites tables ont été nécessaires à sa formation ?

Figure 4 - *énoncé donné aux élèves du problème « les tables de la cafeteria »*

Un problème similaire a été proposé par Vlassis et Demonty (2002). Le problème tel qu'il est présenté dans la figure 2 a été testé et analysé au Québec. Il a été repris en France dans le cadre de la recherche OIPA au début du collège, en 6^{e} et en 5^{e}. Contrairement aux élèves du même âge au Québec, en France les élèves ont été totalement déconcertés par ce type de problème en rupture avec les problèmes donnés habituellement et ont en général rendu feuille blanche ou alors ils ont donné le nombre de chaises pour le dessin représentant les quatre tables.

2. Les chaînes du bijoutier

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 5 **-** *énoncé du problème du bijoutier*

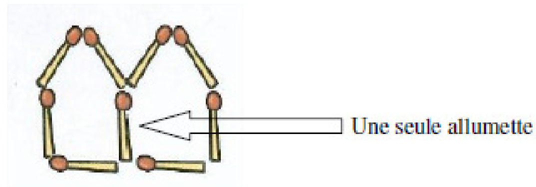
Ce problème a été travaillé au Québec dans le cadre de recherches collaboratives :

> Dans le cadre d'une rencontre sur le sujet [du passage de l'arithmétique vers l'algèbre] tenue à l'université de Sherbrooke au printemps 2013, une collaboration entre des didacticiens et des didacticiennes d'universités québécoises, le MELS (Directions des programmes pour la mathématique) et des conseillers pédagogiques permit l'émergence d'un groupe. Ce dernier se donne comme objectif de soutenir le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le moyen choisi par le groupe est la mise en œuvre d'un dispositif de formation-action permettant à des conseillers pédagogiques ainsi qu'à des enseignants du primaire et du secondaire des commissions scolaires de la province, de perfectionner leurs compétences professionnelles à intégrer dans leur pratique d'enseignement des mathématiques des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique. (http://mathematiqueps.blogspot.fr/)

Ce problème n'a pas encore été testé en France, mais en revanche une vidéo prise dans une classe de 6e québécoise et issue de la recherche citée précédemment, a été analysée par les chercheurs français dans le cadre de l'OIPA (Cf. article de Bronner pour EMF 2015). Un problème similaire a également été proposé par Krysinska et al. (2009) sans le contexte de la bijouterie mais uniquement dans le cadre géométrique dans lequel on cherche le nombre de côtés de carrés accolés.

3. *Les maisons en allumettes*

Avec des allumettes, on veut construire une succession de maisons comme ci-dessous:



Arthur dit qu'il est capable de trouver la quantité d'allumettes nécessaires à la construction de n'importe quel nombre de maisons. Trouver comment fait Arthur.

Figure 6 - *énoncé du problème « les maisons en allumettes »*

L'énoncé tel qu'il est proposé dans la figure 4 a été donné en France à des élèves de 5[e] par une étudiante de master 2 lors de son stage en responsabilité[5] (Massare 2011). Les productions d'élèves étudiées dans la section suivante proviennent de ce mémoire de master. Ce problème figure également dans l'article de Krysinska et al. (2009) comme étant un bon candidat pour introduire une pensée fonctionnelle mais aussi pour permettre l'entrée dans l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique.

IV. ANALYSE DU PROBLÈME DES ALLUMETTES

1. *Pensée arithmétique et pensée algébrique*

La pensée arithmétique correspond à un raisonnement qui ne s'appuie que sur des données numériques connues présentes dans l'énoncé ainsi que sur les opérateurs numériques usuels pour obtenir le résultat recherché. Ce résultat *r* peut donc s'écrire comme une expression numérique mobilisant les données de l'énoncé et des opérateurs. Cette expression numérique qui modélise le problème peut être écrite dans le registre (Duval 1995) des écritures mathématiques ou dans le registre du langage naturel, cela ne modifie pas la nature du raisonnement. Si *r* est le résultat recherché et a_1, a_2 … a_n les données numériques connues de l'énoncé alors il existe une fonction définie dans R formulée dans le registre du langage naturel ou du langage mathématique telle que :

$$f\ (a_1, a_2 \ldots a_n) = r$$

La pensée algébrique a contrario, s'exprime par un raisonnement qui mobilise au moins une donnée inconnue en opérant sur elle comme si elle était connue. Ce type de raisonnement nécessite une fiction : *faire comme si* ce nombre était connu et calculer avec lui comme avec les nombres connus. En supposant qu'il n'y ait qu'un seul nombre inconnu *x* dans le problème, si a_1, a_2 … a_n sont les nombres donnés dans l'énoncé, la modélisation de ce nouveau problème peut être exprimée par :

il existe une fonction f définie dans R telle que $f\ (a_1, a_2 \ldots a_n, r, x) = 0$

[5] Les fonctionnaires stagiaires, futurs enseignants de mathématiques de collège et de lycée, ont un stage en responsabilité dans un établissement qui fait partie intégrante de la deuxième année de master.

Dans le cas du problème des allumettes, la modélisation du problème sous sa forme réduite conduit à cette réponse avec n qui est le nombre d'allumettes pour un nombre entier m de maisons :

$$n = 4m+1$$

Dans cette égalité, qui est la modélisation d'une suite arithmétique, le nombre m peut être vu comme une variable si on adopte un point de vue dans le cadre des fonctions, ou n et m peuvent être vus comme des nombres indéterminés si on regarde cette égalité dans le cadre numérique comme étant une identité c'est à dire l'équivalence entre deux signes qui dénotent le même nombre (Frege 1892). Comme précédemment cette modélisation peut tout aussi bien être exprimée dans le registre du langage naturel : « le nombre total d'allumettes est égal au nombre de maisons multiplié par 4 auquel on ajoute 1 » (d'autres expressions sont possibles).

2. *Un axe et des critères pour identifier un type de pensée*

J'utilise un axe qui relie à gauche la pensée arithmétique et à droite la pensée algébrique telles qu'elles peuvent être définies comme précédemment dans le savoir de référence. Le raisonnement mis en œuvre par un élève pour résoudre le problème peut être interprété comme étant représenté par un point sur cet axe.

pensée arithmétique pensée algébrique

Pour interpréter le raisonnement d'un élève pour le positionner sur cet axe, la typologie des preuves décrite par Balacheff (1987) est un outil utile. En effet pour exprimer la généralité et en conséquence le modèle algébrique correspondant à la situation des maisons en allumettes, l'élève doit convoquer d'une part l'objet « nombre total d'allumettes » et d'autre part l'objet « nombre de maisons » (ou l'objet « nombre d'étapes » ou encore « numéro de l'étape ») à travers des ostensifs. Ces derniers peuvent être le langage naturel, ou des abréviations ou encore des lettres sans rapport avec les mots du langage courant, mais aussi des dessins comme celui d'une maison ou d'une allumette. La convocation de ces objets est alors un marqueur de cette pensée algébrique naissante. Dans le cas d'une suite arithmétique comme dans celui d'une suite géométrique, Krysinska et al. (2009) précisent ce qui suit :

> les modèles fonctionnels $a+bn$ et ab^n jouissent de propriétés intéressantes dont ils ont le monopole : non seulement, ils se prêtent à une double lecture [itérative et fonctionnelle], mais ils constituent aussi des modèles dont l'expression rend compte et valide à la fois la régularité itérative et le principe de la construction du tableau numérique. Nous en tirerons l'hypothèse qu'ils constituent des modèles fonctionnels sans doute plus accessibles que d'autres lors d'une première approche des problèmes de dénombrement. (Op. cité, p. 13)

Ainsi l'expression du modèle constitue le processus de généralisation. La preuve mathématique dans le savoir de référence, à savoir la démonstration, n'est pas à la portée des élèves car elle suppose une démonstration par récurrence de la validité de l'énoncé : quel que soit l'entier m, le nombre d'allumettes n est donné par $n = 4m+1$. Evidemment des élèves de début de collège ne se posent pas la question de la démonstration, cependant il leur est possible :

- de tester la validité du modèle produit à l'aide de quelques exemples vérifiables grâce à des dessins ;
- de justifier le modèle produit en montrant son adéquation avec le processus permettant de construire la suite des maisons.

Ainsi l'analyse des productions d'élèves selon la typologie de Balacheff pour caractériser le type de preuve permet de mettre au jour des indicateurs de la genèse d'une pensée algébrique.

3. Preuves pragmatiques mais des pensées différentes

La typologie de Balacheff permet de différencier des élèves qui n'utilisent que des nombres connus mais avec des fonctions différentes. Ainsi dans la catégorie des *preuves pragmatiques* :

- ✓ des élèves peuvent utiliser uniquement des cas particuliers en appui sur les dessins correspondants des maisons et traduire ainsi une pensée strictement arithmétique, il s'agit de l'*empirisme naïf*. Dans ce cas de figure, l'élève ne pourra pas exprimer la généralité ;
- ✓ des élèves peuvent utiliser un cas particulier comme *exemple générique*, c'est-à-dire que le nombre de maisons est supposé pouvoir être remplacé par n'importe quel autre. Bien que les objets utilisés soient des objets du domaine numérique, la pensée exprime un raisonnement générique reproductible avec n'importe quel nombre et elle dit la généralisation. Ce type de raisonnement signe une entrée dans la pensée algébrique avec en implicite le concept en acte de quantification universelle de l'énoncé produit. C'est comme si l'élève disait : « quel que soit le nombre pris à la place de l'exemple présenté pour indiquer le nombre de maisons, cela conduira à cette procédure de calcul pour donner le nombre d'allumettes ».

4. Preuves intellectuelles

L'expression de la généralité peut être exprimée dans le registre du langage naturel sans aucun appui sur des données numériques. Cela correspond alors à l'*expérience mentale* qui est une forme de *preuve intellectuelle* et qui exprime une pensée algébrique. L'élève peut fonder ce raisonnement :

- ✓ en exprimant le nombre d'allumettes en fonction du nombre de maisons à partir de l'observation des dessins des maisons ce qui l'amène à s'appuyer sur le contexte. La modélisation est alors complètement dépendante du milieu matériel ;
- ✓ en observant un invariant dans le cadre numérique qui est la relation qui lie le nombre de maisons et le nombre d'allumettes ce qui le conduit à faire abstraction du contexte. La relation exprimée est alors sous la forme d'un opérateur dans un tableau de nombres. Il y a un détachement du milieu matériel pour faire confiance aux nombres.

La généralité itérative peut exprimer également la relation entre le nombre d'allumettes pour un certain nombre de maisons et le nombre d'allumettes pour une maison supplémentaire. Autrement dit l'élève a compris que pour une maison de plus il faut ajouter 4 allumettes. Ce raisonnement général n'est pas suffisant pour exprimer le nombre d'allumettes pour m maisons, il dénote cependant que l'élève est capable d'exprimer une généralité, ce qui est un pas vers la pensée algébrique. Si la suite u_n exprime le nombre d'allumettes pour n maisons, l'élève a identifié en actes un invariant opératoire qui est : $u_{n+1} = u_n + 4$ (Dans ce cas Krysinska et al. (2009) parlent de régularité itérative qu'ils opposent à une régularité fonctionnelle).

L'*expérience mentale* peut conduire l'élève à modéliser la situation dans un registre proche de celui du langage algébrique dans le savoir de référence. L'élève produit alors un calcul qui fait intervenir des nombres connus, des opérateurs arithmétiques et aussi des signes qui désignent les variables. Voici des variantes pour les signifiants non langagiers qui expriment ces variables :

- ✓ des dessins, par exemple celui d'une allumette ;
- ✓ des mots du langage naturel ;
- ✓ des abréviations de mots ;
- ✓ des pointillés ;
- ✓ des lettres comme dans le registre algébrique.

5. Synthèse

Ces différentes réponses sont résumées dans le schéma ci-dessous.

Pensée arithmétique ⟷ Pensée algébrique

A	B	C	D	E	F	G
Cas particuliers pris comme exemples	Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	Exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres

Il faut remarquer que ce qui est attendu de la part d'élèves de cinquième, c'est essentiellement une conjecture qui est l'expression du nombre d'allumettes pour un nombre de maisons donné et la justification de cette conjecture en appui sur la situation concrète.

V. ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ELEVES

Je rappelle que ces productions ont été recueillies dans une classe de 5^{e} (12- 13 ans) en France (Massare 2011). Les élèves ont travaillé individuellement avant d'être mis en groupe de 4 à 5 élèves qui ont travaillé de façon autonome. Les écrits que je vais analyser sont ceux qui émanent de ce travail de groupe.

En synthèse, chaque production sera caractérisée en reprenant les 7 niveaux (de A à G) représentés sur le schéma de la partie IV – 5.

1. Groupe 1

Les élèves de ce groupe s'appuient sur la relation numérique repérée dans le cadre numérique « avec ces chiffres » entre les nombres des couples (1 ; 5), (2 ; 9), (3 ; 13) pour établir la conjecture générale (appelée hypothèse finale) sur le nombre d'allumettes (Cf. figure 5). La généralité, qui est ici une généralité fonctionnelle, est exprimée dans le registre du langage naturel. Où repérer ces élèves sur l'axe pensée arithmétique/pensée algébrique ? Ils ne sont pas loin de l'*empirisme naïf* avec leur appui sur 3 exemples, mais ils sont capables d'inférer à partir de là une conjecture relative à une règle générale exprimant la relation entre le nombre de maisons et le nombre d'allumettes.

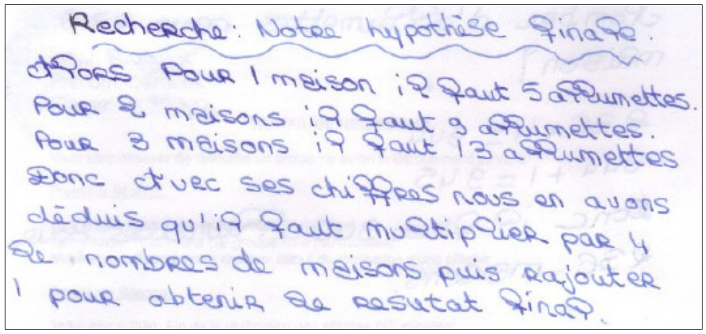

Recherche : Notre hypothèse finale.
alors pour 1 maison il faut 5 allumettes.
pour 2 maisons il faut 9 allumettes.
pour 3 maisons il faut 13 allumettes
Donc avec ses chiffres nous en avons
déduis qu'il faut multiplier par 4
le nombres de maisons puis rajouter
1 pour obtenir le resutat final.

Figure 7 **-** *groupe 1*

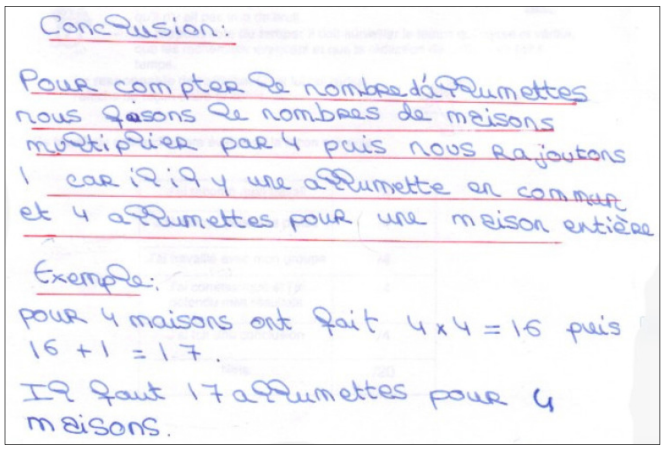

Conclusion :
Pour compter le nombre d'allumettes
nous faisons le nombres de maisons
multiplier par 4 puis nous rajoutons
1 car il il y une allumette en commun
et 4 allumettes pour une maison entière
Exemple :
pour 4 maisons ont fait 4 x 4 = 16 puis
16 + 1 = 17.
Il faut 17 allumettes pour 4
maisons.

Figure 8 **-** *groupe 1 : fin de leur rédaction*

Sur la figure 6, nous voyons que les élèves tentent de justifier leur règle générale, leur hypothèse finale, et nous pouvons qualifier cela d'expérience mentale. Les élèves expriment qu'en général une maison entière ne comprend que 4 allumettes (et en sous-entendu : non pas 5 allumettes par maison entière car il y a une allumette en commun). La justification de l'ajout de 1 est toutefois erronée. La tentative de validation et de mise en cohérence de la règle obtenue dans le cadre numérique avec le milieu matériel échoue. Les élèves finissent par un travail par ostension en utilisant un exemple générique en montrant comment fonctionne leur formule à laquelle ils font confiance dans le cadre numérique.

2. *Groupe 2*

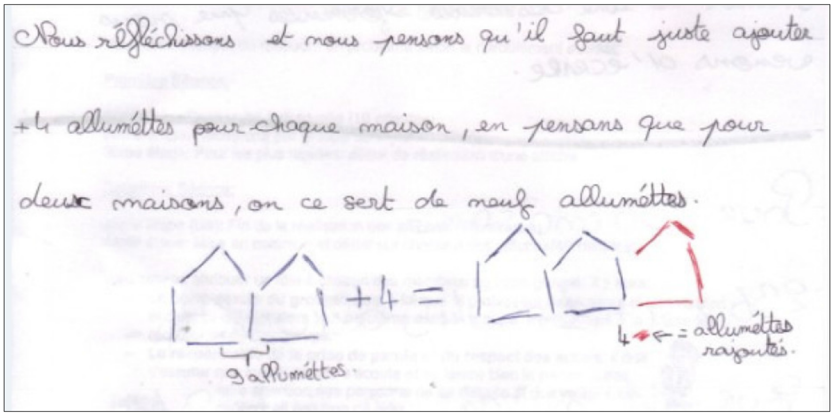


Figure 9 - *groupe 2*

Ce groupe explicite la relation entre u_n et u_{n+1} de manière générale et en particulier dans le cas où n est égal à 2. La généralité itérative est exprimée par les 4 allumettes dessinées en rouge avec la mention explicite « allumettes rajoutées ».

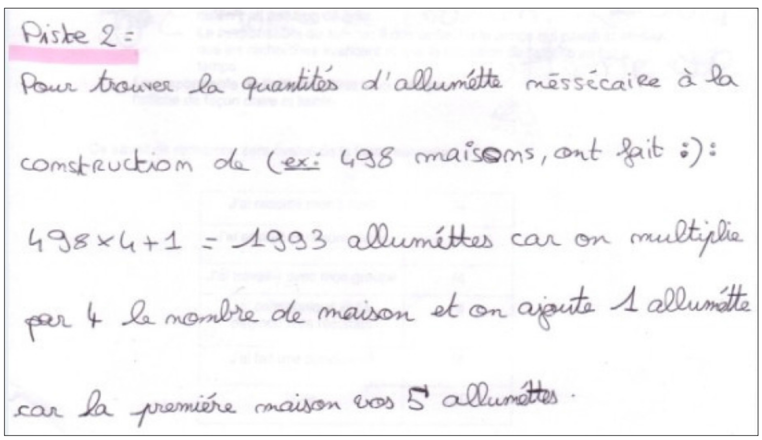


Figure 10 - *groupe 2 : fin de leur rédaction*

Dans cette deuxième partie, le groupe propose un prototype d'*exemple générique*. Le grand nombre de maisons, 498, est pris pour montrer qu'il s'agit de n'importe quel nombre, et même un grand nombre ! La généralisation s'exprime donc à travers cet exemple, elle est même justifiée car il faut compléter les 4 allumettes de la première maison par une allumette. L'exemple générique est donc justifié par l'énoncé en langage naturel qui correspond à l'*expérience mentale*.

3. Groupe 3

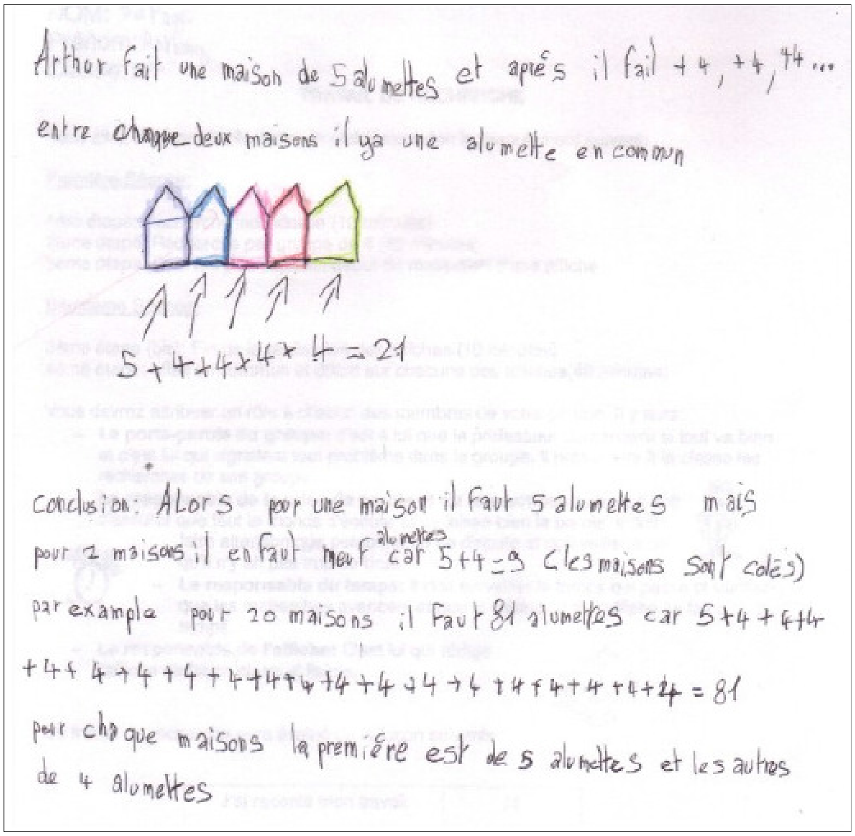


Figure 11 - *groupe 3*

Ce groupe exprime la généralité avec l'*exemple générique* relatif à 20 maisons étayé sur l'exemple dessiné de 5 maisons. Les registres du dessin graphique et des écritures mathématiques restent congruents (au sens de Duval) : chaque maison correspond soit au nombre 5 pour la première, soit au nombre 4 pour les suivantes. Les élèves n'ont pas transformé la somme réitérée en produit ce qui ne leur permet pas d'avoir une formule générale pour exprimer le nombre total d'allumettes en fonction du nombre de maisons. Dans l'expression de l'exemple générique un sous-entendu est qu'il faut écrire dans la somme autant de termes que le nombre total de maisons. Les élèves de ce groupe parviennent à exprimer la généralité en restant étroitement liés au contexte et en donnant une méthode pour calculer le nombre d'allumettes. Cependant un début de pensée algébrique est présent par le fait qu'ils ont compris des éléments invariants de la situation : la première maison a 5 allumettes et les suivantes uniquement 4. En revanche ils n'ont pas su exprimer le modèle mathématique correspondant dans sa forme de généralité fonctionnelle. Est-ce qu'ils ne se sont pas autorisés à s'éloigner du milieu matériel en transformant la somme réitérée en produit dans le cadre numérique ? Est-ce qu'une interprétation dynamique des ajouts des maisons les unes après les autres a empêché les élèves de percevoir la grandeur « nombre de maisons » ?

4. *Groupe 4*

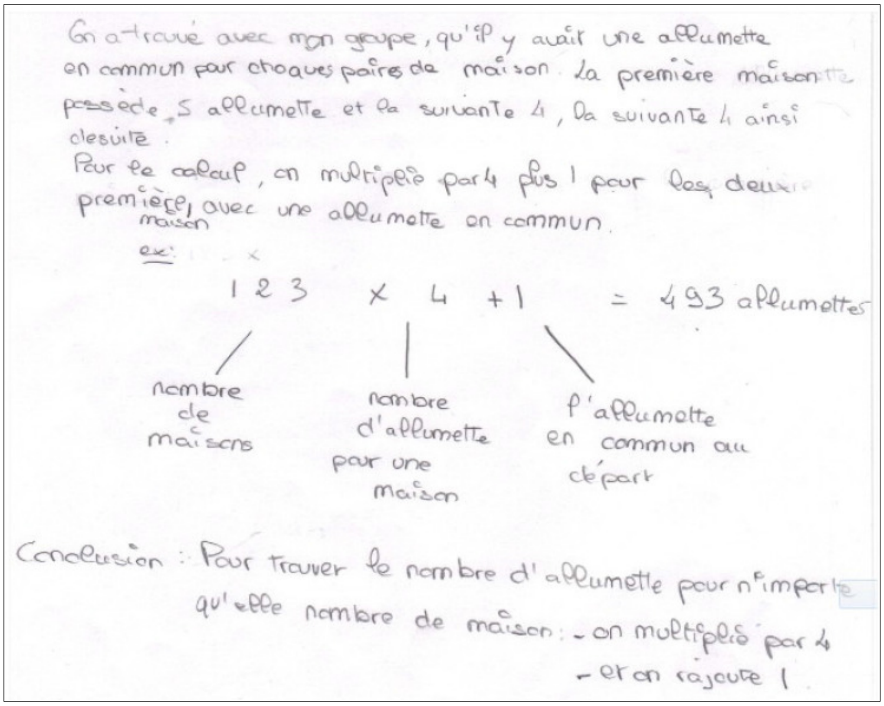

On a trouvé avec mon groupe, qu'il y avait une allumette en commun pour chaques paires de maison. La première maison possède 5 allumette et la suivante 4, la suivante 4 ainsi desuite.
Pour le calcul, on multiplie par 4 plus 1 pour les deux premières maison avec une allumette en commun.
ex :
123 × 4 + 1 = 493 allumettes
nombre de maisons
nombre d'allumette pour une maison
l'allumette en commun au départ
Conclusion : Pour trouver le nombre d'allumette pour n'importe qu'elle nombre de maison : - on multiplie par 4
- et on rajoute 1

Figure 12 - *groupe 4*

On retrouve dans ce groupe, comme pour le groupe précédent, la description du processus itératif : une première maison de 5 allumettes, et 4 allumettes pour chacune des suivantes. La difficulté relative à l'explication du 1 qui correspondrait « pour les deux premières maisons avec une allumette en commun » se repère également. Il semblerait que cette expression conserve le souvenir de la génération de la suite des maisons et des différentes étapes comme le tableau 3 en rend compte.

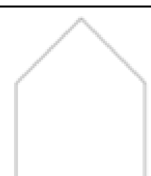
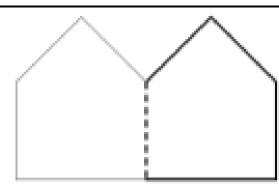
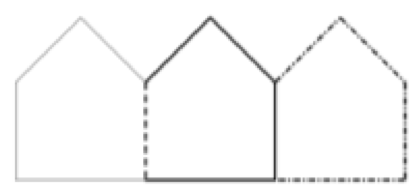
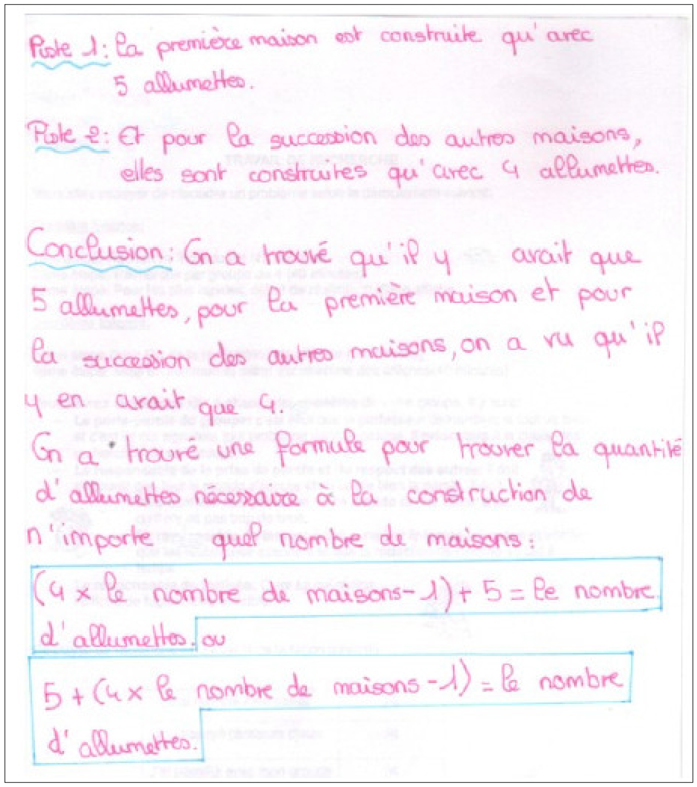
Première étape	**Deuxième étape**	**Troisième étape**
		
Première maison : 5 allumettes	Deuxième maison : 4 allumettes (et 1 allumette déjà présente) En tout : 5 + 4 ou 4 + 4 + 1 (cette unité représente l'allumette en pointillé commune aux deux premières maisons)	Troisième maison : 4 allumettes En tout : 5 + 4 + 4 Ou 4 + 4 + 4 + 1 (cette unité représente l'allumette en pointillé commune aux deux premières maisons)

Tableau 3 : méthode pour générer la suite des maisons étape par étape

Cependant ce groupe réussit à exprimer la généralité fonctionnelle, il utilise lui aussi l'*exemple générique* en faisant un pas supplémentaire vers la pensée algébrique car chaque nombre donné comme exemple est utilisé comme signe pour désigner en fait une variable ou une constante. Ainsi là où est écrit « 123 » il faut voir que c'est le « nombre de maisons » et que c'est donc une variable, en revanche 4 et 1 sont des invariants dans l'expression numérique. La conclusion ne laisse pas de doute sur le fait que les élèves ont réussi à exprimer la généralisation et même la quantification universelle avec « pour n'importe quel nombre de maisons ». La décontextualisation est alors aboutie dans cette expression dans le registre du langage naturel.

5. *Groupe 5*


Piste 1: La première maison est construite qu'avec 5 allumettes.

Piste 2: Et pour la succession des autres maisons, elles sont construites qu'avec 4 allumettes.

Conclusion: On a trouvé qu'il y avait que 5 allumettes, pour la première maison et pour la succession des autres maisons, on a vu qu'il y en avait que 4.
On a trouvé une formule pour trouver la quantité d'allumettes nécessaire à la construction de n'importe quel nombre de maisons:
(4 x le nombre de maisons-1) + 5 = le nombre d'allumettes. ou
5 + (4 x le nombre de maisons -1) = le nombre d'allumettes.

***Figure 13** - groupe 5*

Ce groupe résout le problème de l'allumette en commun en mettant à part la première maison avec ses 5 allumettes et « pour la succession des autres maisons » seulement 4 allumettes. Ils expriment directement la généralité par une « formule », ce qui est en accord complet avec le programme français qui relie l'entrée dans l'algèbre avec le travail relatif aux formules. Le registre algébrique encore personnalisé, est un amalgame d'éléments du registre algébrique conventionnel et du registre du langage naturel. Il est à noter une erreur concernant l'absence de parenthèses pourtant nécessaires dans l'usage des règles de formation. Mais ce groupe donne la preuve qu'ils sont capables de se passer d'exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre très proche du registre algébrique.

Une question demeure : pourquoi le groupe a-t-il écrit deux formules différentes en inversant l'ordre des facteurs du produit ? Est-ce que cela correspond à deux façons différentes d'appréhender le dénombrement en mettant la maison avec 5 allumettes soit au début soit à la fin ? Est-ce que les élèves savent que ces deux expressions différentes ont la même dénotation ?

6. Groupe 6

Le groupe 6 est le seul qui ait utilisé une lettre, cependant ce groupe produit une réponse erronée. Le raisonnement prend en compte l'assemblage de deux maisons qui ont une allumette en commun et qui comptabilise au total 5×2-1 allumettes. Il faut donc enlever l'allumette dessinée en rouge, ce qui se traduit dans l'expression numérique par la partie « - 1 ». Cela amène les élèves à produire une expression qui exprime la généralité fonctionnelle mais qui n'est vraie que pour y égal à 2.

Les élèves de ce groupe ont été capables de produire un signe, la lettre y, qui rend compte de la variable « nombre de maisons », mais ils n'ont pas su mettre leur formule à l'épreuve en la testant sur des exemples différents du nombre 2, cas où il n'y a que 2 maisons et pour lequel le dessin sert de preuve. La pensée algébrique est présente dans le sens où les élèves ont compris qu'il fallait une généralisation et une entrée dans le langage algébrique a été amorcée, mais ce langage produit un énoncé qui reste obscur pour les élèves qui ne perçoivent pas qu'il ne modélise pas le problème posé même dans des cas simples (une maison ou trois maisons par exemple).

Les élèves auraient pu mettre à l'épreuve leur formule grâce au cas dessiné de 3 maisons. Mais il semble que ce dessin ait un autre but : mettre en évidence qu'à chaque fois qu'on ajoute une maison réalisée avec 5 allumettes il est nécessaire **d'enlever 1 allumette** correspondant au trait rouge. « Enlever une allumette » est donc un invariant qui est exprimé dans la formule par la partie « - 1 ».

Il est possible de faire l'hypothèse que dans le cas des allumettes ajoutés les élèves sont capables de les traduire par y×5 mais dans le cas des allumettes enlevées « il faut en enlever une » résume toutes les allumettes enlevées et les élèves ne perçoivent pas qu'il faut faire cela y-1 fois. Les élèves terminent par un exemple générique en prenant un grand nombre de maisons, soit 150, et font confiance à leur formule. Nous pouvons noter une erreur très classique dans le maniement des égalités où le signe égal est un signe d'effectuation signifiant « ça fait ».

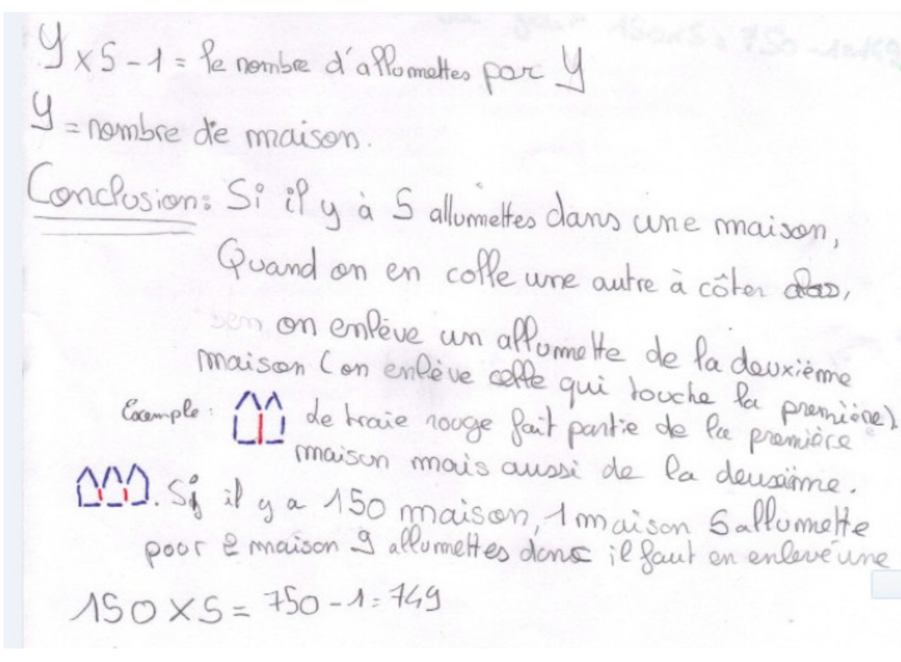

y × 5 - 1 = le nombre d'allumettes par y
y = nombre de maison.
Conclusion: Si il y à 5 allumettes dans une maison,
Quand on en colle une autre à côter ~~das~~,
on enlève un allumette de la deuxième
maison (on enlève celle qui touche la première)
Exemple: le traie rouge fait partie de la première
maison mais aussi de la deuxième.
Si il y a 150 maison, 1 maison 5 allumette
pour 2 maison 9 allumettes donc il faut en enleve une
150 × 5 = 750 - 1 = 749

Figure 14 - *groupe 6*

7. *Reprise des analyses précédentes*

Le tableau 4 reprend les critères établis dans le schéma donné en conclusion de la section IV. Il montre que la généralité itérative est exprimée par 4 groupes sur les 6. La généralité fonctionnelle est exprimée par tous les groupes de différentes façons :

- Le groupe 6 dans un langage algébrique mais de façon erronée ;
- Les groupes 1 et 4 en langage naturel ;
- Le groupe 5 en produisant une formule contenant du langage naturel.

L'exemple générique est utilisé par 4 groupes sur les 6. Pour deux de ces groupes, groupes 4 et 6, cet exemple vient en complément de l'expression de la généralité fonctionnelle.

A Cas particuliers pris comme exemples	B Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	C Exemple générique	D Expression de la généralité en langage naturel	E Justification juste de la généralité	F Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	G Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres
1 – 2	2 – 3 – 4 – 5	2 – 3 (sans recours au produit) – 4 – 6 (avec erreur)	1 – 4	2 – 4 – 5	5	6 (avec erreur)

Tableau 3 - *synthèse des analyses des productions d'élèves*

VI. CONCLUSION

L'analyse des productions de ces élèves de collège confirme l'intérêt de ce type de problèmes :

- Les élèves produisent tous des réponses et la dévolution du problème est réussie ;
- Tous les groupes expriment à travers leurs réponses un déplacement d'une pensée arithmétique vers une pensée algébrique.

Ces élèves montrent aussi que ce n'est pas nécessairement l'usage de la lettre qui signe le développement d'une pensée algébrique. Á ce propos la typologie des preuves de Balacheff permet de repérer des preuves de type *exemple générique* ou encore *expérience mentale* qui signent une entrée dans l'algèbre avant la lettre en permettant l'expression implicite d'un énoncé universellement quantifié.

En France ce type de situation de généralisation pour développer la pensée algébrique et permettre une entrée dans le domaine algébrique, est méconnu par les enseignants en général et n'est pas souligné comme étant pertinent dans les programmes. Ainsi une modification du curriculum en fin de primaire et en collège apparait souhaitable.

Pour conclure cet article et reprendre la question posée au début : « quels sont les indicateurs qui permettent de diagnostiquer chez un élève une pensée algébrique naissante ? », voici une liste de ces indicateurs révélés par cette étude.

Pensée strictement arithmétique

- Le résultat est uniquement fonction des données connues.
    - Le nombre d'allumettes ne peut être obtenu que grâce au dessin correspondant au nombre de maisons (aucun des 6 groupes n'en est resté qu'à ce stade).

Indicateurs d'une pensée algébrique

- Repérage de régularités
    - Chaque fois que l'on ajoute une maison on ajoute 4 allumettes ce qui exprime la généralité itérative ;
    - Chaque fois que 2 maisons de 5 allumettes chacune se touchent il y a une allumette en trop pour la cloison commune.
- Utilisation d'un exemple générique pour exprimer la généralité.
- Le résultat utilise des grandeurs non données : comme si elles l'étaient, il y a une fiction
    - Le nombre d'allumettes est exprimé en fonction du nombre de maisons qui apparait ainsi comme une variable
    - Utilisation de l'objet nombre de maison
        - avec le langage naturel ;
        - avec une abréviation ;
        - avec un dessin ;
        - avec une lettre sans lien direct avec le contexte du problème.
- Écart avec le contexte, voire oubli du contexte pour transformer l'expression de la généralité grâce aux règles du calcul algébrique
    - Par exemple transformer une somme réitérée en produit (à ce propos le groupe 3 ne fait pas cette transformation).
- Validation de l'expression exprimant la généralité
    - Test de la validité de la formule trouvée avec des valeurs numériques connues grâce à des dessins ce qui suppose de revenir au cadre numérique et de savoir articuler les domaines numérique et algébrique (le groupe 6 n'a pas su mettre à l'épreuve sa formule par un test numérique).

REFERENCES

Andwandter N. (2012) *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Balacheff N., (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Briant N. (2013) *Etude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Bronner A. (2007) La question du numérique : le numérique en question ? Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2.

Brousseau G. (1998) *Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique.* In Théorie des situations didactiques 115-160. Grenoble, la pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble (126 p.). Deuxième édition augmentée 1991.

Chevallard Y. (2006) Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation – Section des sciences de l'éducation 17 mai 2006 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Coulange L., Drouhard J-P. et al. (2012) *Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives*. Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série. La pensée sauvage.

Douady R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 17/2, 5-31.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine , Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Peter Lang SA

Frege G. (1892) *Sens et dénotation, in Écrits logiques et philosophiques*, trad., Seuil, 1971, pp. 102-126.

Kahane J.P., (2002) L'enseignement des sciences mathématiques, Paris, Odile Jacob.

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009) Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(3), 247 – 304.

Larguier M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Luiz Marcio Santos Farias. (2010) *Etude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire : Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Massare C. (2011) Les problèmes de recherche à la conquête des apprentissages du collège. Master 2 Enseignement et Diffusion des Mathématiques. Université Montpellier 2.

Piaget P., Henriques G. (1978) *Recherches sur la généralisation*. Paris : Presses Universitaires de France.

Squalli H., MarY C., Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Lebeaume J., Hasni A., Isabelle Harlé I. (Eds.) *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie. Bruxelles : De Boeke*. (14 pages).

Vlassis J., Demonty I. (2002) *L'algèbre par des situations-problèmes : au début du secondaire*. Bruxelles : De Boeck.