Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

# LES PROCESSUS ABSTRAIRE ET GÉNÉRALISER CONCEPTUALISÉS DANS UNE PERSPECTIVE COMMOGNITIVE

Doris JEANNOTTE*

**Résumé –** Ce texte présente une exploration théorique des termes généralisation et abstraction en tant que processus de pensée mathématique. Après la présentation d'un survol de la littérature en didactique des mathématiques sur généralisation et abstraction, les principales caractéristiques de ces deux processus sont présentées. Basé sur une perspective commognitive, généraliser et abstraire sont défini comme des processus discursifs. Le premier génère des énoncés qui étendent un discours existant. Le second crée un nouveau discours avec ses propres règles et ses nouveaux objets. En conclusion, ces deux processus sont mis en relation avec le raisonnement mathématique et il est proposé que l'abstraction ne soit pas considérée comme un processus de raisonnement mathématique.

**Mots-clés** : Pensée mathématique, abstraire, généraliser, raisonnement mathématique, commognition

**Abstract** – This paper presents a theoretical exploration of generalization and abstraction as processes of mathematical thinking. After presenting an overview of the mathematics education literature on generalization and abstraction, we highlight the principal characteristics of these two processes. Based on the commognitive framework, we situate generalization and abstraction as discursive processes. The first generates new utterances that extend an existing discourse. The second creates a new discourse with its own rules and new objects that are not coherent with the old ones. We conclude with how they might be related to mathematical reasoning, and thereby propose that abstraction not be considered a process of mathematical reasoning.

**Keywords**: Mathematical thinking, abstracting, generalizing, mathematical reasoning, commognition

Favoriser le développement de la pensée mathématique et plus particulièrement du raisonnement mathématique (RM) est un objectif de plusieurs curriculums à travers le monde. La mise de l'avant du RM par les politiques éducationnelles et les recherches sur les RM sont souvent justifiées par sa relation avec la compréhension et le sens (donner du sens au monde qui nous entoure). C'est par l'utilisation de différents RM que les élèves donnent du sens aux contenus mathématiques rencontrés en classe et aux processus mathématiques nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques.

Ainsi, ces curriculums sont parfois influencés par des recherches en didactique des mathématiques et :

> The aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts (Reid 2002, p. 7).

* Université du Québec à Montréal – Canada - jeannotte.doris@uqam.ca

Jeannotte D. (2015) Les processus abstraire et généraliser conceptualisés dans une perspective commognitive. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 280-289.

C’est donc dans le but d’éclairer le champ conceptuel du RM que le présent écrit cherche à définir d’un point de vue théorique deux processus de pensée mathématique liés au RM dans la littérature en didactique des mathématiques.

Lors d’un projet portant sur la conceptualisation du RM pour l’enseignement et l’apprentissage du RM en classe (Jeannotte 2015), l’analyse de la littérature scientifique en didactique des mathématiques a permis de mettre en lumière différents processus liés au RM. Un de ceux-ci est le processus généraliser. Généraliser est lié à conjecturer, prouver et justifier (Mason et al. 1994). L’exploration de la littérature afin de caractériser le terme généraliser de façon cohérente avec le RM a rapidement mené au processus d’abstraction (voir p. ex. Pedemonte 2002 ; Dreyfus 1991 ; ou encore Piaget 1977). Le développement de ces deux processus en classe du primaire et du secondaire est étudié par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques. Toutefois, malgré la pléthore de recherches en didactique des mathématiques sur la généralisation et l’abstraction, le sens de ces deux processus et leurs liens conceptuels avec le RM restent ambigus. Comme il a été souligné par Davis et Hersh (1981) et White (1993), l’abstraction et la généralisation sont même parfois utilisées comme synonymes. Pour mieux comprendre le sens de ces deux processus et leur relation au RM, une recherche théorique supportée par l’anasynthèse (Legendre 2005) a été entreprise afin de proposer une conceptualisation de ces deux termes.

J’ai structuré ce texte en cinq sections. Dans un premier temps, je présente les assises méthodologiques qui ont guidé cette recherche théorique. Dans un second temps, j’élabore autour des assises théoriques sur lesquelles s’appuit la synthèse pour en aboutir à l’objectif de ce texte qui est d’explorer conceptuellement les processus généraliser et abstraire. Dans un troisième temps, l’analyse de la littérature autour de généraliser et abstraire est exposée. Dans un quatrième temps, je partage la réponse à l’objectif de ce projet, la synthèse théorique qui positionne ces deux termes (généraliser et abstraire) dans une perspective commognitive. Enfin, en conclusion, je discute de certaines implications.

## I. L’ANASYNTHESE EN TANT QU’ASSISES METHODOLOGIQUES

La démarche méthodologique qui supporte cette théorisation est l’anasynthèse (Legendre 2005, voir figure 1). L’anasynthèse est un néologisme formé des mots analyse et synthèse.

> [Elle] est un cadre général qui permet de baliser l’analyse et la synthèse d’une pluralité de données conceptuelles ou empiriques pour la conceptualisation de modèles théoriques (Guay 2004, p. 19).

Premièrement, un corpus a été circonscrit à partir de bases de données et de mots-clés liés au RM et plus particulièrement, dans le cas de cette réflexion, liés à la généralisation et à l’abstraction. Des textes d’auteurs majeurs dans le domaine ainsi que des textes cités par des auteurs qui se sont penchés sur la généralisation et l’abstraction ont aussi été ajoutés au corpus s’ils n’étaient pas présents dans la première revue de la littérature. Comme le but de l’analyse est de mettre en lumière les convergences, les divergences et les potentialités entre les différents auteurs dans la littérature, le processus de constitution du corpus s’est arrêté lorsqu’aucune nouvelle information n’émergeait de l’analyse des textes.

Deuxièmement, des informations reliées aux aspects théoriques, axiologiques, praxiques et explicatifs sont extraites du corpus. À partir de ces informations, une synthèse est ensuite écrite. Cette dernière met en évidence les convergences, les différences et les potentialités entre les différents auteurs. Enfin, un modèle est proposé qui met en lumière les différentes caractéristiques des termes généraliser et abstraire dans une perspective commognitive. Des boucles de rétroaction permettent d’éclairer l’élaboration du modèle tout au long de la démarche. Ces boucles sont déclenchées par, entre autres, l’émergence de nouvelles informations, les commentaires lors de la présentation du prototype, une mise à l'épreuve de l'argumentation.

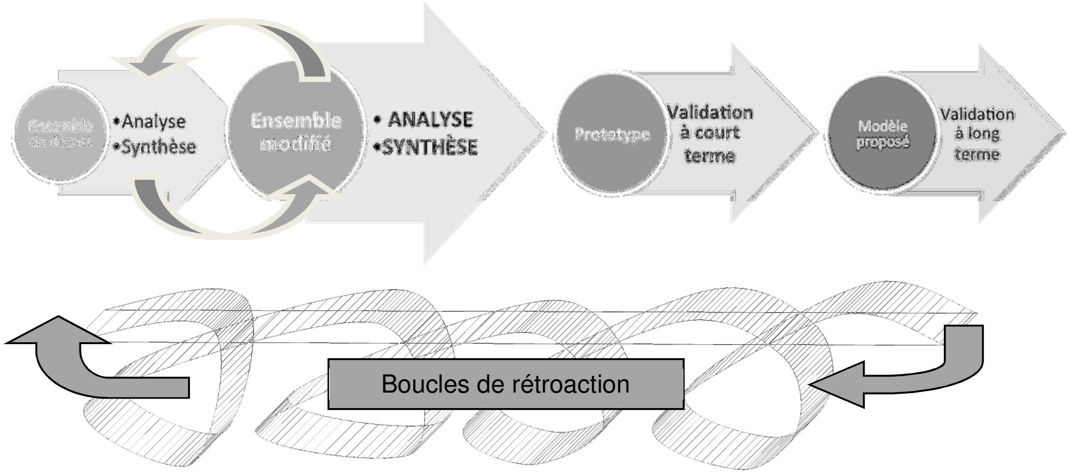


***Figure 1*** *- la démarche d'anasynthèse (tiré de Jeannotte 2015)*

## II. LA COMMOGNITION EN TANT QU'ASSISES THEORIQUES

Le cadre utilisé pour explorer les processus de généralisation et d'abstraction est la commognition développée par Sfard (2008, 2012). Ce choix a deux principales implications. Premièrement, pour un chercheur commognitif, le développement de la recherche est équivalent au développement du discours scientifique. Un chercheur doit construire à partir du travail d'autres chercheurs en visant le développement d'un discours commun. De ce fait, cette étude s'appuie sur la littérature en didactique des mathématiques qui s'intéressent à la généralisation et à l'abstraction. Ce corpus permet de construire à partir du discours scientifique déjà construire par la communauté de didactique des mathématiques. Il ne s'agit donc pas d'un modèle de ce qu'on retrouve comme différents sens dans cette communauté. Ainsi, le modèle proposé a ses propres assises théoriques (la commognition).

Deuxièmement, pour un chercheur commognitif, les mathématiques (ou la pensée mathématique) sont un discours, c'est-à-dire, un type particulier de communication. Cette communication ne se limite pas non plus aux interactions langagières. En fait, tout acte de communication est une composante du discours mathématique : langage corporel, indices contextuels, histoire des interlocuteurs. Il y a deux niveaux de discours, le niveau objet et le niveau méta. Le niveau objet est un discours qui porte sur les objets de ce discours. Le second type de discours est celui de niveau méta. Le discours dit « de niveau méta » est un discours qui porte sur un autre déjà existant. Par exemple, Sfard (2008) considère l'algèbre élémentaire comme un discours qui subsume l'arithmétique. L'algèbre élémentaire est alors vue comme un méta discours. Comme le discours est récursif, l'algèbre élémentaire devient ensuite un discours en soi sur lequel on peut de nouveau porter un regard méta, et ainsi de suite. Ce type de discours met en lumière le deuxième élément caractéristique du discours mathématique que Sfard (2002) souligne, c'est-à-dire, les règles métadiscursives qui le régissent. Ces règles métadiscursives sont ce qui permet qu'il y ait communication effective, et sont, selon Sfard (2002), le véhicule premier de la culture mathématique. Ces règles sont rarement explicitées. Sfard donne comme exemple, de ces règles métadiscursives, les façons dont on définit et prouve en mathématique.

Le développement d'un discours mathématique (donc des mathématiques) correspond à un changement de ce discours. Deux sortes de développement de discours sont possibles : le développement de niveau objet et le développement de niveau méta. D'un côté, le développement de niveau objet réfère à une extension du discours existant[1] à propos d'objets mathématiques déjà construit. De l'autre, le développement méta du discours réfère à la construction d'un nouveau discours en changeant les règles du jeu mathématique, construisant ainsi de nouveaux objets mathématiques. Cette distinction entre le développement de niveau objet et de niveau méta sera cruciale pour la distinction entre les processus généraliser et abstraire. Ceci demande un petit détour quant à ce qui est entendu par objet mathématique. Sfard définit l'objet discursif comme suit :

> The (discursive) objet signified by S (or simply object S) in a given discourse on S is the realization tree of S within this discourse » (Sfard, 2008, p.166).

Elle précise cette définition en 2012:

> a mathematical object can be defined as a mathematical signifier together with its realization tree, where the realization tree is a hierarchically organized set of all the realizations of the given signifier, together with the realizations of these realizations, as well as the realizations of these latter realizations, and so forth (Sfard 2012, p. 4).

Une autre distinction importante concerne ce qui est entendu ici par RM et par pensée mathématique. D'un point de vue commognitif, le RM est un processus métadiscursif qui dérive des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques en explorant les relations qui les unissent (Jeannotte 2014, 2015). Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingentée par des règles discursives partagées et est porteur d'une valeur épistémique. Le RM peut alors avoir une fonction de systématisation. Ainsi, le RM étend un discours à propos d'objets mathématiques déjà existant. Il permet donc un développement de niveau objet. Pour sa part, tel que stipulé précédemment, la pensée mathématique est synonyme de discours mathématique. La pensée mathématique est composée d'un vocabulaire particulier, de médiateurs, d'énoncés généralement acceptés, de routines. La pensée mathématique est davantage que le RM. Le RM est un type de processus de pensée mathématique contribuant au développement des mathématiques par l'inférence de nouveaux énoncés.

L'objectif est donc ici d'explorer les concepts de généralisation et d'abstraction dans la littérature en didactique des mathématiques et de les caractériser d'un point de vue commognitif ainsi qu'à la lumière de la définition de RM précédemment exposée afin d'éclairer les différents liens qu'ils entretiennent avec le RM.

## III. GENERALISATION ET ABSTRACTION DANS LA LITTERATURE

Malgré que ces deux processus sont souvent considérés comme interreliés, chacun est présenté séparément afin de souligner les caractéristiques de chacun.

### *1. La généralisation*

Pour G. J. Stylianides (2005) et Artzt (1999), raisonner mathématiquement, c'est généraliser et construire des conclusions valides. Généraliser est donc, pour ces deux auteurs, un processus central de RM et complémentaire à celui de construire des conclusions valides. Pour Mason (1996), la généralisation est « the heartbeat of mathematics, and appears in many forms » (p. 65). Elle peut mener à ce qui est plausible, pourquoi cela semble plausible et là où cela est plausible (Mason et al. 1994). Cette idée de plausibilité nous mène à Pólya (1968) et

[1] On peut ici distinguer développement de niveau objet (ou méta) de discours de niveau objet (ou méta). Par exemple, un discours de niveau méta peut permettre un développement de niveau objet. C'est le cas du raisonnement mathématique (voir Jeannotte 2015).

son livre sur le raisonnement plausible. Repris par plusieurs auteurs tels Pedemonte (2002) et Stylianides (2005), Pólya définit le processus généraliser comme « passing from the consideration of a given set of objects to that of a smaller set, contained in the given one » (1968 p. 13). Un élément qui apparait important dans cette définition est le terme passage. La définition de Pólya est similaire à celle de Dreyfus (1991) qui caractérise la généralisation comme un processus qui va plus loin que le particulier, qui identifie des similitudes et qui étend le domaine de validité d'un énoncé. White (1993) réfère à la recherche d'invariant, applicable à un ensemble d'objets. Similairement, Ellis (2007) définit la généralisation comme

> an activity in which people in specific socio-mathematical contexts engage in at least one of three actions: (a) identifying commonality across cases, (b) extending one's reasoning beyond the range in which it originated, or (c) deriving broader results from particular cases (p. 311).

Ellis élargit l'idée d'ensemble d'objets en incluant n'importe quelle extension d'une idée à un phénomène. Ellis (2011) considère que l'observation des interactions entre élèves, ou entre élèves et enseignants, permet d'étudier le développement du processus de généralisation puisque ce dernier se construit, selon elle, par le biais des interactions. Celui-ci, qui a un aspect dynamique et statique, serait fortement dépendant du contexte, de l'histoire des élèves, de leurs interactions et des artéfacts disponibles.

Pour Kaput (1999),

> generalization involves deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situations themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relations across and among them (which, in turn, become new, higher-level objects of reasoning or communication) (Op. cite, p. 136).

La première partie de la définition de Kaput fait référence à un processus qui étend les énoncés précédemment inférés à un plus grand domaine de validité, tout comme souligné par les autres auteurs cités, et ne nécessitent donc pas de construire de nouveaux objets au sens où cette structure, qui est mise au jour, table sur des objets mathématiques qui font déjà partie du discours. On pourra dès la prochaine section lier la seconde partie de la définition de Kaput à un processus d'abstraction.

Pour Cañadas et al. (2007),

> generalizing the conjecture involves a change in what Duval (1990) calls its 'epistemic value', from a possible conjecture to an accepted general rule. This is a change in what is believed about the statement (Op. cite, p. 64).

De l'analyse des textes portant sur la généralisation en didactique des mathématiques, plusieurs éléments peuvent être retenus pour caractériser « généraliser » en tant que processus de RM. Dans le corpus analysé[2], le processus de généralisation est parfois lié à l'expansion du domaine de validité d'un énoncé, parfois à la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas. De même, cette analyse illustre comment l'idée de transformation apparait sous différentes formes dans la littérature sur la généralisation à travers les expressions *passage, extension, going further, change*. Mais, on peut se demander en quoi une telle transformation est-elle liée à l'abstraction en particulier et au RM en général d'un point de vue commognitif.

[2] Il ne faut pas oublier que le corpus original est composé de textes intéressés au RM.

## 2. *L'abstraction*

Dans les textes sur le RM, des auteurs spécifient que le processus de RM se fait sur des objets abstraits, ou encore sur des concepts abstraits : « [M]athematical reasoning requires that young children recognize how a given term (or object or symbol) represents some abstract concept that is not directly conveyed » (English 2004, p. 16). Soulignons ici que le terme abstrait est associé à l'objet et non au processus en soi. Cet élément a une importance dans la définition de l'abstraction et, à certains moments, il est difficile de comprendre, comme dans la définition d'English (2004), si l'abstraction est un processus ou une qualité d'un objet mathématique. Le glissement entre ces deux sens de l'abstraction pourrait nuire à l'interprétation de certains résultats. Pour Duquesne (2003), les raisonnements se construisent à partir d'éléments familiers, mais ces éléments deviennent de plus en plus indépendants de la réalité, de *plus en plus abstraits*. Encore ici, l'abstraction est associée aux objets mathématiques. Toutefois, l'idée de processus (déroulement dans le temps) est présente. Pour Peressini et Webb (1999), l'abstraction est un mode de RM tout comme l'induction, la déduction, le raisonnement proportionnel et le raisonnement spatial. English (2004), pour sa part, mentionne que

> despite the definitional variations in the literature, there appear to be basic processes that underlie mathematical reasoning, as Dreyfus and Eisenberg (1996) posited. Those basics include quantification, patterning, abstraction and generalisation, and representation and translation (Op. cite, p. 35).

Ces différents auteurs associent clairement « abstraction » et « processus ». Mentionnons toutefois qu'English utilise, pour parler du RM, des propos qui sont plutôt liés à la pensée mathématique par Dreyfus et Eisenberg (1996). Même si certains auteurs associent RM et abstraction, très peu d'éléments théoriques sont fournis quant aux sens qui sont accordés à ce concept. Ceci a nécessité l'ouverture du corpus à une littérature plus large et hétéroclite. Dans ce nouveau corpus, l'abstraction est mise en relation, entre autres, avec les mathématiques ou la pensée mathématique.

L'abstraction est fréquemment associée à la création de concepts qui ne fait référence à aucun objet concret ou tangible (Sfard 2008). C'est aussi associé avec l'isolation d'attributs spécifiques dans le sens d'être en mesure de les considérer indépendamment d'autres attributs. Pour Mason (1989), l'abstraction est un « delicate shift of attention from seeing an expression as an expression of generality, to seeing the expression as an object or property » (p. 2). Mais ce déplacement n'est pas le passage dont fait mention Pólya (1968) dans le processus de généralisation. Mason situe l'abstraction dans la transition de l'action d'exprimer une généralisation à l'action d'utiliser et manipuler cette généralité pour construire un argument mathématique. Mason souligne l'importance d'ignorer certains éléments pour permettre de mettre la structure au jour et pouvoir la manipuler. Dans un même ordre d'idées, Dreyfus (1991) considère l'abstraction comme un processus mental qui permet d'isoler des relations entre les objets et les propriétés d'objets. D'un point de vue cognitiviste, Gray et Tall (2007) définissent l'abstraction comme un processus de création d'images mentales et mène à la création de concepts mathématiques. L'approche qui a été privilégiée ici est plutôt l'approche commognitive (Sfard 2008) et nécessite donc une nouvelle conceptualisation du concept d'abstraction se rapportant au RM qui prend en compte la nature commognitive de ce processus.

En fait, Noss et Hoyles (1996) qualifient ces visions de l'abstraction de classique,

> one of decontextualisation, a process of extricating the mathematics from the problem, removing it from action to cognition (op. cité, p. 19).

Ces derniers remettent cette vision en question.

> Where can meaning reside in a decontextualised world? If meanings reside only within the world of real objects, then mathematical abstraction involves mapping from one world to another, meaningless, world (Noss & Hoyles 1996, p. 21).

Ils proposent alors une vision où le processus d'abstraction est défini comme un processus de connexions plutôt que d'isolation et d'ascension. Le processus d'abstraction est un processus qui demande à l'élève de construire une multitude de liens entre différentes expériences similaires (Noss & Hoyles 1996). Enfin, tout processus d'abstraction est situé : « We intend by the term situated abstraction to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting which in turn, shapes the way the ideas are expressed » (p. 122). Déjà, la vision de Noss et Hoyles (1996) est plus compatible avec l'approche commognitive en prenant en compte l'aspect socioculturel du processus.

Même si le processus d'abstraction n'est pas encore compris selon eux, Ohlsson et Lehtinen (1997) soutiennent que ce n'est pas un processus qui classifie le monde selon des similitudes comme le fait le processus de généralisation. C'est un processus qui rend les connaissances davantage complexes. Dans le même sens, Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz (2009) ont développé le cadre *nested epistemic actions model of abstraction in context* pour étudier le développement du processus d'abstraction. Ils ont défini l'abstraction

> as an activity of vertically reorganizing previous mathematical constructs within mathematics and by mathematical means so as to lead to a construct that is new to the learner » (p. 24).

Dans ce cadre, l'abstraction amène une nouvelle cohérence dans l'organisation des connaissances. De même, le contexte (social, historique, ontologique) est un important aspect de leur cadre.

## IV. UNE PERSPECTIVE COMMOGNITIVE

### *1. La généralisation d'un point de vue commognitif*

Que peut-on tirer de cette synthèse ? L'idée de transformation apparait sous différentes formes dans la littérature sur la généralisation et ne semble pas nécessiter la création de nouveaux objets mathématiques. Les aspects « inférence » et « expansion » apparaissent comme importants dans la littérature. L'expansion du domaine de validité d'un énoncé et la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas sont souvent posées comme un résultat de ce processus. D'un point de vue commognitif, on peut lier le processus de généralisation au RM puisqu'il est clairement associé à l'inférence et au discours, sans qu'il y ait nécessairement création d'un nouveau discours incommensurable avec le premier. Étendre le domaine de validité d'un énoncé n'amène pas un changement au niveau des règles du discours. Les objets en jeu lors du processus de généralisation existent déjà, d'un point de vue commognitif. La généralisation est alors, d'un point de vue commognitif, un processus qui infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier. La généralisation est un processus discursif qui étend un discours mathématique sans en changer les règles. Il s'agit donc d'un discours de niveau méta qui permet un développement discursif de niveau objet. De même, contrairement à ce que soulignent Cañadas et al. (2007), il n'y a pas de changement de valeur épistémique associé au processus de généralisation. D'étendre une relation d'un cas à un ensemble plus large ne change pas la valeur épistémique de cette relation. Ce processus peut donc mener à un énoncé vraisemblable, mais aussi certain. La valeur épistémique de l'énoncé n'a pas à être nécessairement vraie. Enfin, soulignons que le terme « généraliser », lorsqu'utilisé en tant que processus de RM, n'est pas ce qui est entendu par Piaget (1977, "Fondation Jean Piaget",

2014) par généralisation constructive. On peut donc dire qu'un processus de généralisation est un processus de RM lorsqu'il n'y a pas construction d'un nouvel objet mathématique, puisqu'un processus de RM est posé ainsi.

*2. L'abstraction d'un point de vue commognitif*

L'idée de rendre les connaissances plus complexes, qui a émergé de l'analyse de la littérature en didactique des mathématiques, peut être liée à un développement de niveau méta du discours mathématique. Mais alors, comment parler d'abstraction dans une approche commognitive et comment situer ce processus dans un modèle de RM? Sfard (2008) circonscrit ces deux processus, raisonnement et abstraction, en les reliant à des objets commognitifs, c'est-à-dire l'ensemble des réalisations de cet objet dans un discours donné. En d'autres mots, l'abstraction est un processus commognitif de création de concepts. D'un point de vue commognitif, ceci demande de déritualiser et d'objectiver un discours qui existe déjà afin d'en créer un nouveau.

> L'objectivation est a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency (Sfard 2008, pp.51-52),

à savoir réifier et aliéner, éléments précédemment soulignés par Mason (1989). Ceci demande donc un va-et-vient entre le discours sur les objets et le discours sur le discours (métadiscours). On retrouve ici cette idée de changement, de passage présent chez d'autres auteurs. Comme Ohlsson et Lehtinen (1997) prétendent, le processus d'abstraction d'un point de vue commognitif mène au développement d'une structure de connaissances qui est plus complexe que l'ensemble de ses composantes, qui est donc incommensurable avec l'ancien discours. Ceci peut être traduit en terme commognitif comme un changement dans les règles du jeu et la construction de nouveaux objets mathématiques. Ceci demande des aller-retour entre des discours de niveau objet et des discours de niveau méta. L'objectification est

> a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency (Sfard 2008, pp. 51-52),

c'est-à-dire par réification et aliénation. Il y a donc ici une distinction importante entre le RM (et plus particulièrement, la généralisation) et l'abstraction en tant que processus qui pourrait permettre de mieux comprendre l'apprentissage des élèves.

## V. CONCLUSION

D'un point de vue commognitif, la principale différence entre le processus de généralisation et le processus d'abstraction en est une discursive. La généralisation mène à une extension du discours. Il y a une cohérence entre le discours existant et les énoncés développés par le processus de généralisation. Aucune règle du jeu n'est changée, uniquement de nouvelles informations à propos d'objets déjà construits sont inférées. Par exemple, on retrouve dans Kaput (1999) un exemple du processus (de RM) « généraliser ». Dans cet exemple, des élèves d'une classe du primaire ont observé que 3x12 = 12x3. Ils se demandent si 4x9 = 9x4 puis si cette relation est toujours vraie. Après avoir exploré d'autres cas et observé que cette relation est vraie pour plusieurs, ils étendent cette relation à tous les nombres. Si l'on se concentre sur le processus « généraliser » ici, c'est en inférant à partir de l'observation de cette relation sur plusieurs cas qu'ils sont en mesure d'étendre la relation à tous les nombres.

Le processus d'abstraction mène pour sa part à un nouveau discours, à de nouvelles règles du jeu. L'ancien discours semble limité, même désuet à partir de ce nouveau point de vue. Au cœur du questionnement, on peut se demander quel rôle est joué par le RM dans le processus d'abstraction. Évidemment, le processus d'abstraction peut impliquer à certains moments des processus de raisonnements, mais celui-ci sera local et ne pourrait à lui seul permettre de comprendre l'ensemble du processus d'abstraction, ce passage à un nouveau discours, avec de nouvelles règles et de nouveaux objets. L'abstraction peut être décrite comme un processus qui se développe par plusieurs cycles d'individualisation de discours interpersonnel et de (re)communication.

Parce que généralisation et abstraction sont liées au RM dans la littérature en didactique des mathématiques, la perspective commognitive adoptée pour cette théorisation peut avoir un impact sur le discours scientifique en lien avec le RM et la pensée mathématique. En effet, cette perspective mène à concevoir généraliser comme un processus de RM mais à rejeter abstraire comme processus deRM, l'abstraction menant à un développement de niveau méta. Bien que généraliser et abstraire puissent être considérés comme des processus de pensée mathématique et qu'un peut influencer l'autre, on ne peut subsumer l'un et l'autre.

## REFERENCES


Artzt A. F. (1999) Mathematical reasoning during small-group problem solving. In Stiff L. V., Curcio F. R. (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (p. 115–127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cañadas M. C., Deulofeu J., Figueiras L., Reid D. A., Yevdokimov O. (2007) The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning* 5(1), 55-72.

Davis P., Hersh R. (1981) *The mathematical experience.* Boston. MS: Birkhäuser

Dreyfus T. (1991) Advanced mathematical thinking processes. In Tall D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus T., Eisenberg T. (1996) On different facets of mathematical thinking. In Sternberg R. J., Ben Zeev T. (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duquesne F. (2003) *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège* (2e éd.). Suresnes, France: Éditions du Centre national d'études et de formation pour l'enfance inadaptée.

Ellis A. B. (2007) Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education* 38(3), 194-229.

English L. D. (2004) *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray E., Tall D. (2007) Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal* 19(2), 23-40.

Jeannotte D. (2014) Processes of mathematical reasoning : Framing from math educator discourses. In Liljedahl P., Nicol C., Oesterle S., Allan D. (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, p. 117). Vancouver, BC.

Jeannotte D. (2015) Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. (Thèse de doctorat non publié). Université du Québec à Montréal.

Legendre R. (2005) *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3d éd.). Montréal, QC: Guérin.

Mason J. (1989) Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 2-8.

Mason J. (1996) Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.), *Approches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). The Netherland: Kluwer.

Mason J., Burton L., Stacey K. (1994) *Thinking mathematically.* Essex, UK: Addison-Wesley.

Ohlsson S., Lehtinen E. (1997) Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research* 27(1), 37-48.

Piaget J. (1977) Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'abstraction des relations logico-arithmétiques. *Études d'Épistémologie Génétique* 34, 5-147.

Pólya G. (1968) *Mathematics and plausible reasoning* (2 ed. Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Noss R., Hoyles C. (1996) *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. The Netherland: Kluwer Academic.

Pedemonte B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Peressini D., Webb N. (1999) Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. In Stiff L. V., Curcio F. R. (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 156–174). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reid D. A. (2002) Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(1), 5–29.

Schwarz B., Dreyfus T., Hershkowitz R. (2009) The nested epistemic actions model for abstraction in context. In Schwarz B., Dreyfus T., Hershkowitz R. (Eds.) *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11-41). New York: Routledge.

Sfard A. (2002) There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* 46(1-3), 13–57.

Sfard A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard A. (2012) Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9.

Stylianides G. J. (2005) *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: A curricular perspective*. (Thèse de doctorat non publiée) University of Michigan.

White H. (1993) *Étude exploratoire relative à la "pensée mathématique" chez de futurs enseignants et enseignantes*.(Thèse de doctorat non publiée). Québec : Université Laval.