Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGEBRIQUE AVANT LA LETTRE APPORT DES PROBLÈMES DE GENERALISATION ET D'UNE ANALYSE PRAXÉOLOGIQUE

Alain BRONNER [*]

Résumé – Nous cherchons les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Dans cette perspective nous étudions les potentialités de certaines classes de situations. Comment peuvent-elles favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Nous proposons un travail exploratoire relativement à la question précédente. Ce travail a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe de 6e du Québec[1]. Dans cet article nous montrons l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

Mots-clefs : pensée, algébrique, numérique, généralisation, praxéologie

Abstract – In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis to these situations by analyzing a situation of generalization in a 6th grade class in Quebec. We search the conditions for introducing "algebra prior to letter" with generalized problems. In this perspective we study the potential of certain categories of situations. How can they promote algebraic thinking in elementary and junior high school classes before the introduction of algebraic symbolism? We offer exploratory work in relation to the previous question. In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis for this type of situations.

Keywords: thinking, algebraic, numeric, generalization, praxeology

I. INTRODUCTION

La recherche présentée ici s'inscrit dans un projet visant le développement d'un observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) dans la continuité de plusieurs actions conjointes, initialisées lors de rencontres des universités de Montpellier et de Sherbrooke en 2008 et 2010. Les missions principales sont de constituer un lieu virtuel international d'archivage, d'échange et de diffusion des connaissances, et de documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, relativement à la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

L'entrée dans l'algèbre se résume souvent à un « coup de force » du professeur à partir de problèmes dont il suggèrera aux élèves à un moment plus ou moins opportun qu'il est « utile » voire « nécessaire » d'utiliser une « lettre » pour pouvoir traiter ou démontrer une

[*] Université de Montpellier – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

[1] Élèves de 12 ans.

Bronner A., (2015) Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 247-264.

propriété numérique dans toute sa généralité ou pour chercher un nombre inconnu satisfaisant un système de contraintes numériques. Ce coup de force où la formule ou l'équation avec une lettre « x » jaillissent alors dans la classe pourrait nous faire oublier la longue marche vers le symbolisme algébrique introduit, notamment par Viète, puis prolongé par Descartes, pour développer sa nouvelle algèbre en vue de résoudre des problèmes de la géométrie.

Mais c'est aussi oublier que la pensée algébrique peut se voir à l'œuvre chez de nombreux mathématiciens avant eux et avant la disponibilité de ces outils extra-numériques. Sans vouloir la rejouer, cette scène historique originale nous amène à l'hypothèse que nous pouvons faire entrer les élèves dans une nouvelle pensée algébrique avant « la lettre » les préparant ainsi au calcul littéral et à l'algèbre outil dès la fin de l'école élémentaire et au début du collège en France. Ce travail s'inscrit en fait dans une articulation *numérique – algébrique* où le passage du *numérique* vers *l'algébrique* est posé depuis fort longtemps mais reste encore une question d'enseignement et de recherche (Booth 1984 ; Vergnaud 1987 ; Chevallard 1989 et 1990; Kieran 1990). De nombreux courants institutionnels ont émergé comme celui *d'Early Algebra* qui fut impulsé au travers des « Principles and Standards for School Mathematics » du NCTM (2000). Cette question a été étudiée au Québec (Marchand & Bednarz 1999, Squalli, Mary & Marchand 2011, Squalli, Suurtamm & Freiman 2012). En France, plusieurs travaux de recherche soulignent aussi les difficultés de la construction de la pensée algébrique (rapport sur le calcul de la commission Kahane 2001; numéro spécial de la revue internationale Recherche en Didactique des Mathématiques 2012).

Dans cette perspective, de nombreux chercheurs et enseignants se sont tournés vers les problèmes dits de généralisation. Squalli (2000) souligne que la généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et en particulier en algèbre. Il va même plus loin en avançant que cette activité est caractéristique d'une pensée algébrique. Ces recherches conduisent à des expérimentations de situations de généralisation s'appuyant sur divers supports et problèmes. Au Québec, depuis plusieurs années les programmes vont même dans ce sens comme l'indiquent Marchand et Bednarz (1999, p. 31) : « Ce programme, tout au moins dans ses intentions, cherche à faire en sorte que les élèves voient la pertinence de l'algèbre, accordent un sens au symbolisme algébrique, avant de s'engager plus à fond dans sa manipulation. » Ce programme s'inscrirait ainsi dans la perspective de faire apparaître le symbolisme comme un moyen d'exprimer la généralité. De plus, cette perspective serait développée dans des situations numériques pour généraliser des propriétés et des règles (ibid).

En France aussi des chercheurs ont souligné l'intérêt pour des problèmes de généralisation comme Grugeon (1995) dans sa caractérisation de la *compétence algébrique* :

> La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser …De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. L'algèbre peut jouer un rôle essentiel pour engager les élèves dans leur construction de la rationalité mathématique.

Notre travail s'inscrit dans ces perspectives de recherche et cherche à étudier les potentialités de certaines classes de problèmes et situations de généralisation. Nous cherchons notamment à trouver les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Quels sont les contextes, supports, cadres, formulations de ces problèmes à privilégier ? Comment peuvent-ils favoriser une pensée algébrique et l'émergence de généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Quels rôles jouent les manipulations, actions, formulations, argumentations ? Quelles validations peuvent être mises en place ? Ces situations permettraient-elles d'introduire le formalisme à un moment adéquat et de rentrer dans une pensée analytique pour manipuler ces formalismes ? Plus généralement quelles sont les conditions sur l'élaboration et la gestion des situations didactiques s'appuyant sur ces types de problèmes ?

Nous proposons un travail exploratoire relativement aux questions précédentes dans le cadre de nos collaborations au sein de l'OIPA avec des chercheurs du Québec. Ce travail a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe de 6^e du Québec[2]. Dans cet article nous présentons notre méthodologie, nos analyses et résultats pour cette situation en montrant l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

II. METHODOLOGIE

Nous avons développé depuis une vingtaine d'année une méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes et des situations d'enseignement dans le cadre d'un observatoire du numérique que nous étendons ici à l'algébrique dans le cadre de l'OIPA.

Notre cadre théorique est constitué de la Théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992, 1999) et de la Théorie des situations didactiques (Brousseau 1986) pour l'étude générale des situations et de la transposition didactique des objets mathématiques. La prise en compte des processus langagiers et sémiotiques étant essentielle dans notre approche, elle est complétée par les notions de dénotation empruntée à Frege, de la théorie des registres de représentations sémiotiques (Duval 1993).

Notre méthodologie s'inscrit dans la didactique française de confrontation entre une *analyse a priori* et une *analyse a posteriori*, et est articulée en cinq grandes étapes non indépendantes (Bronner 2006) : l'analyse a priori, la trame de la séance observée, la description et l'analyse des organisations mathématiques selon l'approche anthropologique, l'analyse de l'organisation didactique selon la méthodologie dite des quatre composantes, et le repérage de gestes d'étude d'élèves et de gestes professionnels de l'enseignant, des évènements et des ajustements. Nous présenterons la méthodologie au fur et à mesure de chaque étape avec les analyses correspondantes, mais dans cet article nous nous limiterons aux trois premières étapes.

III. L'ANALYSE A PRIORI

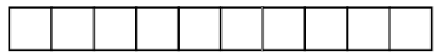
Le professeur a choisi de commencer sa séquence par une première situation basée sur des chaines carrées comme ci-dessous en demandant d'examiner tout d'abord les premiers cas pour 1, 2, 3, 5 et pour 9 mailles. Puis, il propose aux élèves d'étudier le cas de chaines triangulaires. Ensuite les élèves inventeront des formes, en fait pentagonales et hexagonales. Enfin le professeur demande aux élèves de généraliser le travail à n'importe quelle forme de mailles. Dans la fin de la séquence le professeur lance un exercice qu'il appelle « défi » et qui consiste, dans le cas de la maille carrée, à trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée de 121 tiges.

[2] Élèves de 12 ans.

Les chaines du joaillier

Mise en situation

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Nous utilisons ici la modélisation de l'activité mathématique développée par Chevallard (1999) avec la notion de praxéologie constituée de 4 dimensions articulées (*type de tâches, techniques, technologies, théorie*) pour analyser les démarches possibles.

La situation concerne le type de tâches : « Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaine à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles ». Certains élèves peuvent ne pas comprendre qu'il s'agit de déterminer une expression ou une méthode permettant de calculer le nombre de tiges pour n'importe quel nombre de mailles ou être bloqués pour le faire et se limiter à donner des quantités de tiges pour quelques nombres déterminés de mailles, pour les premiers cas 2, 3, 4 ou 5 par exemple.

Les types de tâches appellent des techniques de résolution (des manières de faire pour résoudre les tâches particulières) dont nous dégageons les grandes catégories à ce niveau d'étude.

1. *Les techniques σ_1 basées sur des technologies numériques :*

On peut dégager une première catégorie de techniques σ1 associées à ce type de tâches dans le cas d'un petit nombre déterminé de mailles, dont on peut en donner la mise en œuvre générique suivante, de manière plus ou moins complète et dans un ordre divers :

- Identifier les composants élémentaires : triangle, quadrilatère, pentagone, … ;
- Prendre en compte le caractère régulier en dimension 2 : des polygones réguliers ;
- Voir qu'ils sont superposables ;
- Commencer à en assembler 1, 2, puis 3 ensuite ; …
- S'assurer d'avoir un début, une fin, le nombre de mailles qu'il faut ;
- Dénombrer les tiges : Le dénombrement peut de se faire de manière désorganisée ou en suivant une réorganisation spatiale, et dans ce dernier cas plusieurs procédures sont à envisager.
  - Par exemple, on peut d'abord compter toutes les tiges horizontales (soit deux par deux, soit celles toutes celles du haut puis celles du bas, …), puis les tiges verticales.

- Un élève peut aussi voir la répétition des composants et identifier le nombre de tiges ajoutés par composants (3 dans le cas de mailles carrées) puis multiplier ce nombre par le nombre de mailles en n'oubliant pas d'ajouter 1 pour la première maille.
- Une autre procédure est de compter selon un principe de récurrence : on peut compter tout d'abord les tiges de la première maille (4), puis on compte les tiges de la maille suivante soit en énumérant soit en ajoutant 3 d'un coup (7), et ainsi de suite (10) ...

On voit que même dans le cas d'un dénombrement pour un nombre fini déterminé de mailles de nombreuses techniques peuvent être mobilisées et que certaines procédures peuvent se généraliser.

Dans la suite nous nous intéressons aux raisonnements des élèves ayant compris le type de problèmes et entrant dans la tâche de généralisation : « Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaine ». Les stratégies des élèves par rapport à la généralisation peuvent se répartir en trois grandes catégories de raisonnements.

2. *Les techniques τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite*

Ces techniques commencent en général par la mise en œuvre de techniques τ_1 en examinant le cas d'un petit nombre de mailles 1, 2, 3 et éventuellement un nombre un peu plus grand. Une première étape consiste ainsi tout d'abord à examiner les premiers cas de nombre de mailles n = 2, 3, 4, … puis à comprendre que la manière de dénombrer peut se généraliser en considérant un nombre de mailles quelconque, même si on ne connaît pas ce nombre de mailles ou si on ne sait pas vraiment exprimer ce nombre indéterminé. Ici la généralisation porte sur une procédure de dénombrement mettant en relation la quantité cherchée avec la variable du problème, autrement-dit le nombre de mailles, en se basant comme dans le cas déterminé sur une réorganisation spatiale.

Par exemple, l'élève se base sur une décomposition du motif en distinguant les tiges horizontales et verticales. Ainsi, quand on a une quantité de mailles on prend 2 fois plus de tiges horizontales et on ajoute encore la même quantité de tiges que de mailles et encore une tige pour terminer le motif avec les tiges verticales. Cela conduit à des expressions conformes à M1 = 2n+(n+1). Mais, un élève de sixième année ne produira certainement pas une telle expression dans le registre (Duval, 1993) du langage algébrique. Par contre diverses expérimentations et travaux dans ce domaine suggèrent d'autres réponses dans un langage mixte qui associe langage mathématique et langage naturel. Les élèves peuvent ainsi produire des réponses comme : pour une quantité de mailles le nombre de tiges est 3 × mailles + 1. On peut s'attendre à une dénomination dans le registre verbal (comme « le nombre de tige est 2 fois le nombre de mailles plus le nombre de mailles plus un ») ou un code mixte verbal-numérique (comme « Nombre de tiges = 2xNombre de mailles + Nombre de mailles + 1 ») ou encore avec des abréviations.

Une autre forme de présentation peut être attendue en exposant une méthode générale sur l'exemple générique au sens de Balacheff (1987). Par exemple, pour 143 mailles, il faut 3 fois 143 tiges et une tige de plus ce qui fait en tout : 430 tiges. Même si l'élève fait montre d'une conception procédurale (Sfard 1991 ; Kieran 1992) dans laquelle l'expression décrit un processus de calcul sur un cas déterminé, il est ici pour nous dans une procédure généralisatrice.

D'autres techniques τ_2 sont à envisager en utilisant des décompositions spatiales différentes pour produire des ostensifs équivalents à M1. Par exemple, l'élève peut remarquer que si on a une quantité de mailles, on prend trois fois plus de tiges et on en ajoute une pour obtenir le dénombrement et proposer ainsi une expression M2 = 3n+1. En synthèse, pour n mailles, plusieurs modélisations sont possibles, produites par un dénombrement conforme à une configuration spatiale :

M1 = 2n+(n+1) en considérant le nombre de tiges horizontales d'une part et celui des tiges verticales d'autre part ;
M2 = 3n+1 en considérant le nombre de mailles avec 3 tiges et en ajoutant une tige pour commencer ou terminer la chaîne ;
M3 = 4n-(n-1) en considérant le nombre de mailles à 4 tiges et en retranchant les tiges mises en double ;
M4 = 4+3(n-1) en considérant une première maille à 4 tiges et les tiges correspondant aux mailles suivantes à 3 tiges.

Les modélisations précédentes portent en elles-mêmes le principe de certaines procédures possibles par une méthode de dénombrement correspondant à une analyse de configurations spatiales. Ces techniques τ_2 portent en elles-mêmes la validation, autrement dit une validation interne, basée sur l'analyse de la configuration spatiale. Une validation partielle sous forme de vérification avec les premiers cas est possible et peut paraître suffisante aux yeux des élèves.

La théorie algébrique élémentaire permet de démontrer que ces diverses expressions algébriques représentent un même nombre que dénote (Drouhard, 1997) l'expression simplifiée 3n+1.

3. *Les techniques σ_3 basées sur des technologies de généralisation implicite*

Ici c'est la méthode générale pour passer d'une quantité de mailles à la suivante qui est mis en avant. Elle est associée aussi sur le principe de récurrence que nous avons vu avec les techniques numériques. Par exemple, les élèves peuvent faire des dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles et compter les tiges sur les dessins. La généralisation pourrait se traduire de cette façon : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. L'invariant se focalise sur le passage de la quantité de mailles à celle augmentée de une unité (de mailles). Elle pourrait se traduire par un opérateur du type : Pour trouver le nombre de tiges pour n + 1 mailles, j'ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Ici aussi un langage mixte devrait être utilisé dans ce type de procédure. Cette généralisation demande de calculer au fur et à mesure les quantités obtenues à partir du premier cas et se trouve rapidement limitée pour un nombre de mailles assez grand. On notera quand même qu'un invariant est avancée mais n'est pas opératoire. Ici aussi le recours spontané à l'usage d'une lettre parait peu probable, mais cela dépendra de la mémoire didactique de la classe.

4. *Les techniques σ_4 basées sur des technologies de généralisation par investigation et induction*

Les élèves déterminent les quantités de tiges des premiers cas en faisant plusieurs dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles ou un dessin qu'ils complètent au fur et à mesure. Ils observent les quantités obtenues et conjecturent une relation générale par induction. Par exemple, ils obtiennent des résultats du type :

Mailles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiges	4	7	10	13	16	19	22	25

L'élève généralise les résultats sur les petits nombres en faisant apparaitre une relation numérique liée au nombre de mailles de départ. Ils peuvent ainsi remarquer la récurrence indiquée précédemment T(x+1) = T(x) + 3 mais cette fois-ci en observant les quantités numériques et en faisant une induction numérique et non sur la configuration spatiale comme dans la catégorie précédente.

Ils peuvent aussi remarquer que les résultats obtenus pour la deuxième ligne sont des multiples de 3 augmentés d'une unité. Cela peut conduire à des expressions conforme à M2 = 3n+1 mais encore une fois cette conjecture est obtenue par observation et induction des expressions numériques. Il sera sûrement plus difficile d'induire des expressions conformes à M1 = 2n+(n+1) ou M3 = 4n-(n-1) ou encore M4 = 4+3(n-1).

5. *Extension du type de problème et analyse des variables didactiques*

Même si on peut aussi penser que l'histoire dans laquelle est inséré le problème peut être un facteur intéressant, son influence est difficile à apprécier et demanderait une étude à elle seule. Nous ne regardons pas des macros variables comme le contexte, ici le choix d'un dénombrement d'objets relativement familiers (les bijoux) présentés sous forme schématiques de dessins. Nous nous intéressons aux variables didactiques principales[3] dans le cadre du contexte choisi.

- La variable « nombre de maille » : L'examen des cas particuliers et le nombre N de mailles à étudier au début peuvent jouer un rôle sur la procédure des élèves. Ainsi on peut distinguer plusieurs domaines relativement à cette variable pour une forme donnée :

- N non fixé : L'élève examine les premiers cas de sa propre initiative et rentre dans les catégories suivantes ou essaie de généraliser directement.
- N petit (< 10 en général) : une procédure de dénombrement systématique peut être envisagée. Ensuite là aussi les différentes catégories peuvent être envisagées.
- N grand (43 ou 44) : ici la procédure précédente doit être abandonnée mais les élèves peuvent peut-être mimer les procédure de dénombrement direct et aller vers les procédures de généralisation explicite.
- N très grand (200, 1000, …). L'élève doit déjà se projeter vers la généralité pour pouvoir répondre à la question et entrer dans l'une des procédures proposées.

- La variable « Forme de la maille » : Comme indiqué plus haut, le problème proposé sera étendu à d'autres formes, une variable didactique importante sera donc la forme F de la maille de la chaine ; triangulaire, carré, pentagonale, … Cette variable conduit évidemment à des expressions différentes en lien avec le nombre de tiges de la maille mais peut jouer un rôle sur le raisonnement même d'analyse et de dénombrement d'une formule générale pour un type donné.

Deux grands types de raisonnements peuvent être anticipés. Les élèves recommencent sur chaque forme la procédure sur les premières formes de manière quasi-indépendante même si

[3] D'autres variables peuvent jouer un rôle comme le type de support de présentation et de manipulation (support évoqué, mobile, dessiné, …) en facilitant ou bloquant certaines procédures. Par exemple, des tiges effectives peuvent être distribuées aux élèves.

on peut penser que l'expérience et la familiarisation avec le type de problèmes conduisent à faire évoluer le raisonnement. Ou alors ils peuvent induire une formule ou une expression en la modifiant en prenant en compte les variations sur la forme. Par exemple, pour le facteur 3 qui apparaît pour la forme triangle les élèves pourraient induire qu'ils doivent maintenant considérer un facteur 5 pour des formes pentagonales. Les élèves pourraient se convaincre en testant avec un cas au sens de l'exemple crucial de Balacheff (1987). Il se pose ainsi un problème de validation à étudier dans les réalisations didactiques.

IV. LA TRAME DE LA SEANCE OBSERVEE

Il s'agit ici d'identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé de la séance. La trame correspond à un premier découpage en grandes unités intelligibles de la séance et définies par les fonctions habituellement utilisées en classe (recherche ou mise au travail sur des exercices, mises en commun, bilans, cours, …) et les tâches proposées aux élèves. Elle est construite à partir de toutes les données, notamment pour nous, une vidéo et une narration de la séance (sous forme d'un document écrit). Ainsi dans le tableau 1 chaque phase est indiquée par le repérage des instants relativement aux deux données précédentes (sous la forme Instant de la narration/Instant de la vidéo), sa fonction a priori et les tâches repérées des élèves ainsi que la modalité de travail (individuel, en groupe ou collective). Les deux données utilisées n'ont pas été synchronisées, d'autant que nous ne disposons pas de la vidéo complète sur toute la séance. Nous utilisons comme repérage temporel principal les instants de la narration qui semblent plus conforme au déroulement effectif de la séance. Ainsi la séance comporte deux parties avant et après la récréation, et le minutage de la séance est réinitialisé à partir de la phase 8 correspondant à la reprise après la récréation.

Phases	**Instants Narration/ instants Vidéo**	**(Fonctions de la phase et) tâches du professeur et des élèves**	**Modalités de travail**
1	0 à 16min11 / 0 à 2min45 (puis coupure de la vidéo)	Présentation de la situation générale, de la chaine à mailles carrées et calcul du nombre de tiges pour 1, 2, 3, 5 / Calcul pour 9 mailles	Collective / Groupe pour le cas de 9 mailles (2 min environ)
2	16min11 à 40min15/ (pas de vidéo)	Calcul du nombre de tiges pour 45, puis 44, mailles et explicitation du programme de calcul général (cas des chaines à mailles carrées)	Groupe (appelé équipe au Québec)
3	40min15 à 49min43 / 2min45 à 10min	Retour sur la chaîne à mailles carrées : Bilan et débat	Collective
4	49min43 à 57min40 / (pas de vidéo)	Présentation de la chaine à mailles triangulaires, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
5	57min40 à 1h04min42 /10min à 14min30	Retour sur la chaîne à mailles triangulaires : Bilan des réponses du problème	Collective
6	1h04min42 à	Présentation de la chaine à mailles	Collective /

	1h08min59 / (pas de vidéo)	hexagonales, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Groupe
7	1h08min59 à 1h14min05 / 14min40 à 16min40	Retour sur la chaine à mailles hexagonales : Bilan du travail des élèves	Collective
	Récréation		
8	4 min à 11min 23 / (pas de vidéo)	Créer sa propre chaine à mailles différentes, calcul du Nb de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
9	11min 23 à 17min04 /16min40 à 19min55	Retour sur les propres chaînes octogonale et pentagonale : Bilan du travail des élèves	Collective
10	17min04 à 25min30 /19min55 à 21 min04	Rechercher une expression commune dans tous les cas de formes de chaîne	Collective / Groupe
11	25min30 à 31min36 / 21min04 à 26min07	Retour sur la généralisation : Bilan	Collective
12	31min36 à 43min15 / (pas de vidéo)	Phase appelée « Défi » : Dans le cas de la maille carrée, trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée de 121 tiges.	Collective / Groupe
13	43min15 à 49 min / (pas de vidéo)	Retour sur le Défi : Bilan et conclusion	Collective

***Tableau 1** – Trame de la séquence « Bijoutier »*

Nous nous intéressons maintenant aux mathématiques développées dans cette séance à travers la deuxième étape de notre méthodologie.

V. LA DESCRIPTION ET L'ANALYSE DES ORGANISATIONS MATHEMATIQUES SELON L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Nous utilisons ici encore la modélisation de l'activité mathématique par la notion de praxéologie constituée de 4 dimensions articulées (*type de tâches, techniques, technologies, théorie*) et la grille d'organisations mathématiques que nous avons mise en évidence dans l'analyse a priori (partie III).

1. Les types de tâches

Nous allons montrer que plusieurs types de tâches sont enchâssés dans cette séance et que ce choix est important pour le développement des processus de généralisation.

Les élèves sont confrontés dans les 3 premières phases à un premier *type de tâches ponctuel*, puis à une première tâche de généralisation. Ainsi ils doivent tout d'abord dans les phases 1 et 2 travailler sur le type de tâches déjà repéré :

Tcn : Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaine à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles.

Pour ce type, le professeur propose aux élèves différents spécimens en jouant sur la variable N du nombre de mailles de la chaine :

- Calcul pour 1, 2, 3, 5 mailles
- Calcul pour 9 mailles
- Calcul pour 45 puis 44 mailles.

La fin de la phase 2 et la phase 3 se concentrent sur la tâche de généralisation évoquée dans l'analyse a priori :

tca : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Précisons nos notations : la 1ère lettre est T pour Type ou t pour tâche, la 2^{e} lettre désigne la forme, ici c pour carrée, la 3^{e} lettre donne n pour numérique et a pour algébrique (nous poursuivons dans la suite la même logique de notation dans la suite).

Les phases 4 et 5 amènent à jouer sur la variable forme et le professeur propose maintenant des tâches analogues avec le cas d'une chaine à mailles triangulaires. Les élèves étudient ainsi le type de tâches :

Ttn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles triangulaires connaissant le nombre de mailles ;
et les différents cas suivants pour la variable N nombre de mailles :

- Calcul pour 1, 2, 3, 4, 5 mailles
- Calcul pour 44 mailles.

Puis les élèves travaillent sur la tâche de généralisation :

tta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles triangulaires pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Le scenario se poursuit de manière analogue avec le cas d'une maille hexagonale dans les phases 6 et 7, faisant rencontrer le type de tâches Thn à travers le calcul pour 44 mailles

Thn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles hexagonales connaissant le nombre de mailles.
Puis la tâche de généralisation :

tha : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles hexagonales pour n'importe quelle longueur de la chaine

Dans les phases 8 et 9 le professeur demande aux élèves de choisir leurs propres formes de mailles avec la contrainte suivante : la forme doit être différente des précédentes. En plus de la consigne « trouver une phrase mathématique pour calculer le nombre de tiges pour une chaîne de 44 mailles » (document Narration), il précise aussi à la suite d'une question d'un élève à propos de la longueur des tiges : « les tiges doivent être toutes égales et les mailles, elles sont toutes de la même forme. C'est pourquoi je te demande de dessiner une maille et toutes tes mailles vont être identiques. Et elles vont s'attacher par un côté. 4 minutes. »

Cela amène les élèves, selon les groupes, à deux tâches de généralisation de même type :

toa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles octogonales pour n'importe quelle longueur de la chaine ;

tpa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pentagonales pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Le professeur demande ensuite de trouver une phrase mathématique à envoyer au bijoutier qui permettra de calculer le nombre de tiges pour n'importe quelle chaîne. Les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa vont en fait alimenter le travail des phases 10 et 11, qui les font alors apparaître comme des spécimens d'un nouveau type de tâches :

Ta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaine.

La séance se termine par un « défi » dans les dernières phases 12 et 13, en considérant un problème inverse des précédents dans le cas de la maille carrée, à travers le type de tâches et le cas de 121 tiges suivant

Tmn : Dans le cas de la maille carrée, trouver le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée d'un certain nombre de tiges ;
et le processus de généralisation s'arrêtera ici à la tâche

tma : Dans le cas de la maille carrée, trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée d'un certain nombre de tiges.

La succession des tâches et types de tâches fait apparaître la structure d'enseignement de cette séance comme un réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série, pourrait-on dire. Ainsi, après avoir fait travailler les élèves, dans chaque cas de forme de mailles, sur un type de tâches ponctuelles du type Tcn, Ttn Thn à travers différents spécimens le professeur les amène à se placer sur les tâches respectives de généralisation tca, tta tha. Même si la réalisation des différentes tâches est proposée successivement, nous analysons le début de la structure comme parallèle dans la mesure où il y a une répétition en jouant sur la forme de la maille (carrée, triangulaire et hexagonale) avec la même structuration (étude sur les premiers termes au niveau du nombre de mailles 1, 2, 3 et 5, puis 44 et 45, puis cas général) . Ce premier réseau parallèle peut être schématisé ainsi :

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

Nous observons que l'étude commence par des types de tâches Tfn (f comme forme et n comme numérique) que nous qualifions de numérique dans la mesure où il s'agit tout d'abord de considérer un nombre déterminé de mailles et de produire la quantité de tiges correspondante. Mais à chaque fois, le contrat conduit, pour chaque forme f, à terminer l'étude avec une tâche de généralisation tfa (a ici comme algébrique).

La structure parallèle aurait pu se poursuivre strictement sur les phases suivantes, avec un choix de la forme a priori réservé aux élèves, mais pour la suite l'étude se réalise directement sur les tâches de généralisation toa et tpa à propos des formes octogonale (o) et pentagonale (p) comme le précise le professeur à un élève : « il doit faire une phrase mathématique plus générale, pas seulement pour le cas de 44 mailles » (Tour 37, Document Narration, instant 0 :09 :55 d'après récréation). Le nouveau réseau peut être schématisé ainsi avec cet ajout en série laissant en vide les types de tâches numériques :

N → A → A

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

} → **… → toa**

… → tpa

Dans les phases 10 et 11, les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa apparaissent alors comme de simples spécimens d'un nouveau type de tâches de généralisation Ta avec la recherche d'une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pour n'importe quel forme et pour n'importe quelle longueur de la chaine. Le réseau se complexifie ainsi en série en le schéma suivant :

N → A → A → A

Généralisation du 1er degré (1 variable) — **Généralisation du 2e degré (2 variables)**

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

… → toa

… → tpa

} → **Ta**

Il s'agit ainsi d'engager les élèves dans un processus de généralisation de degré encore supérieur en considérant les deux variables forme de la maille (F) et nombre de mailles (N). Cette première analyse montre que les praxéologies ponctuelles s'agrègent en des praxéologies locales, voire régionales, emboitées autour du type de tâches Ta et permet de mettre au jour une structuration mathématique complexes et emboitée. Nous poursuivons la caractérisation de l'organisation mathématique construite en analysant les techniques et technologies associes aux différents types de tâches identifiés.

2. *Les organisations mathématiques produites par les élèves*

Les tâches isolées et les types de tâches sont réalisés par des techniques de résolution souvent au début embryonnaires ou en voie de constitution dans un processus d'enseignement-apprentissage. Nous décrivons les éléments de techniques élaborées par les élèves et repérables dans les données de la séquence « bijoutier ».

- *Techniques associées aux types de tâches Tcn, Ttn Thn*

Dans le cas des calculs sur un petit nombre de mailles carrées (1 à 5, puis 9 parfois) en début de séquence, les élèves utilisent certainement des techniques conformes à σ_1 basées sur des technologies numériques comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori (section III). Le professeur ne demande pas la procédure des élèves et la classe se met rapidement d'accord sur le nombre de tiges pour 1, 2 et 3, puis 5 : « Il compte avec les élèves, les tiges qui composent une maille, deux mailles et trois mailles. Puis il ajoute deux mailles de plus (5 mailles) sans les afficher sur l'écran. … Il demande à une élève le nombre de tiges obtenues. Elle dit 16 et il vérifie que tous sont d'accord. »Visiblement on n'est pas dans une tâche problématique, comme on peut encore le voir avec la construction d'une chaîne de 9 mailles : « Il suit en particulier l'équipe 4 : ils en comptent 22. Il leur demande de vérifier. Ils recomptent et obtiennent 28. Il fait le tour des équipes, revient ensuite en grand groupe et demande si quelqu'un a autre chose que 28. Aucun. Il leur fait constater que c'est facile si l'on peut les compter. »

Dans le cas d'un calcul pour un grand nombre de mailles carrées (le professeur propose au début 45 mailles), les élèves commencent à expliciter leur technique, comme dans l'équipe 4 « E[4.3] explique que pour 2 mailles, il faut faire 2×3+1, pour 3 mailles 3×3+1, pour 5 mailles… E[4.4] trouve que c'est compliqué alors que E[4.1] suggère que pour 45 mailles, il faut faire 45×3 et que le terme +1 est pour commencer la chaîne, car la première maille comprend 4 tiges. » On est déjà ici sur des techniques τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite, la généralité dans la constitution spéciale de la chaîne est perçue et utilisée pour exprimer la réponse dans le cas d'un grand nombre déterminé de mailles.

L'équipe 3 envisage une autre décomposition : « E[3.1] explique à E[3.3] qu'elle a calculé 1 fois 4, et pour les autres mailles 1 fois 3 et donc … E[3.2] récapitule : 1×4 + 44×3 ». Puis quelques minutes après que le professeur demande de travailler sur 44 au lieu de 45, l'équipe confirme sa procédure : « E[3.1] dit encore 1 fois 4 est égale à 4, et 43 fois 3 …». On note ici encore comment cette équipe évolue d'une technique de dénombrement de type σ_1 basées sur des technologies numériques vers une technique de type τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite consistant à voir la configuration comme un carré avec 4 tiges, puis un nombre (ici 43) de composants de 3 tiges.

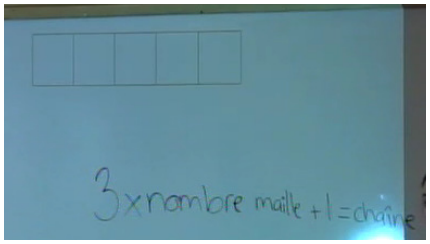
L'équipe 6 explicite une procédure pour 45 mailles, qu'on pourrait qualifier de proportionnalité : « 3 des élèves s'entendent pour dire au bijoutier de faire 5 fois la commande pour 9 mailles, soit 5×28 tiges. E[1.2] fait remarquer que ce ne sont pas tous les nombres de mailles qui sont multiples de 9. » L'erreur ne sera pas relevé lors du travail de groupe.

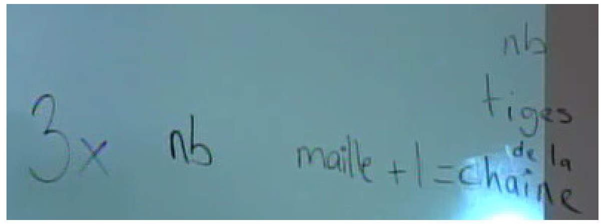
- *Techniques associées aux tâches tca, tta, tha, toa et tpa*

Le professeur précise à plusieurs moments « qu'il veut un message à dire au bijoutier, pour qu'il sache comment trouver le nombre de tiges, et ce, pour n'importe quelle longueur de chaîne à mailles carrées » ou « il ne veut pas seulement le nombre de tiges, mais aussi le message mathématique pour aider le bijoutier à trouver le nombre de tiges à commander pour d'autres longueurs de chaînes » et encore il rappelle qu'après avoir trouvé la réponse pour 44 mailles, ils doivent écrire un message pour tout nombre de mailles. On note ainsi ce geste du professeur, vraisemblablement, pour faire entrer les élèves dans les tâches de généralisation *tca, tta, tha, toa et tpa*.

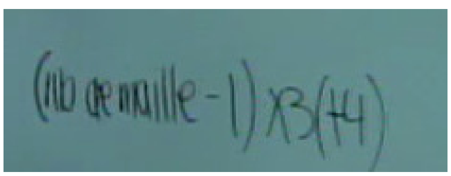
Dans le premier travail de groupes à propos des mailles carrées et d'un nombre, considéré comme déjà grand, 44 ou 45, on a vu que certains élèves avaient compris qu'il fallait décrire la procédure de calcul effective, et non pas se limiter à donner la quantité de tiges nécessaire.

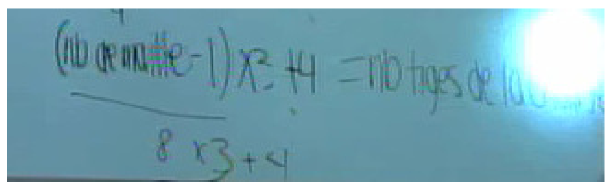
Pour cette tâche, au niveau de l'équipe 4 : « E[4.4] explique qu'il lui dirait qu'à chaque maille il faut 3 tiges, mais qu'il faut en ajouter une pour la première. » Cet élève n'arrive pas à entrer, du moins au début de la phase 2 de la séance, à produire une technique de généralisation explicite. Il associe bien la correspondance sans pouvoir exprimer globalement la quantité nécessaire. Vers la fin de cette phase, l'élève débouche sur cette généralisation explicite en oralisant « multiplier nombre de mailles par trois plus un pour le premier ». La généralisation explicite, signe d'une pensée algébrique, semble en route dans cette équipe. Finalement il va modifier son message sous la demande du professeur de griffonner ce message sur sa feuille pour produire « × nombre de m. par 3 et + 1 pour 1^er^ » puis, après une remarque du professeur à propos du terme « 1er », l'élève finit par formuler : « trois fois nombre de mailles plus un ». Cette généralisation est passée par l'abstraction d'une configuration générale où le « plus un » avait encore la signification de la 1ère tige. Finalement, dans la phase 3 où un bilan est proposé, cette équipe produit au tableau le message « 3xnombre maille + 1 =chaîne » qui sera transformé par le professeur en « 3×nb mailles +1 = nb tiges de la chaîne », qui propose que « nombre dorénavant on va le simplifier nb ».





Dans la phase 2, l'équipe 2 entre aussi dans une généralisation explicite conforme à la modélisation M4 = 4+3(n-1), du moins pour l'élève E[2.4], qui dit à voix haute « 3× nombre de mailles -1 +4 ». Il s'ensuit un échange fourni avec le professeur pour amener l'élève à écrire le message en tenant compte des priorités des opérations. Dans le bilan collectif de la phase 3 l'élève E[2.4] de cette équipe ira écrire son message au tableau sous la forme (nb mailles-1)×3(+4)= nb de tiges de la chaîne qui sera corrigée par le professeur.





Une élève d'un autre groupe n'arrive pas à comprendre le message, elle ne semble pas entrer dans cette pensée algébrique qui demandait de décontextualiser l'écriture et de ne plus se focaliser à interpréter ce « moins une maille » comme elle le répète en exprimant son incompréhension pour ce message.

L'équipe 5 semble voir le processus opératoire général mais bute sur l'expression de cette généralité en se demandant « comment exprimer ce (le nombre de mailles) qui est multiplié par 3 ».

Les deux messages précédents, conformes aux modélisations M2 = 3n+1 et M4 = 4+3(n-1), sont validés par le professeur et la classe par retour aux premiers cas numériques, constituent alors une référence pour la suite.

Ainsi dans la phase 4, à propos des mailles triangulaires, la dévolution sur la tâche de généralisation tta est réussi et les élèves essaient d'élaborer un message général. L'élève E[1.1] explicite l'élaboration de la technique en expliquant qu'elle se base sur l'adéquation numérique avec les premiers cas : « … si tu fais deux fois le nombre de mailles plus un, car 2×2, 4, +1, 5 ». Mais surtout l'idée lui est venue du message de l'équipe 4 à propos des mailles carrées : « L'autre chaîne avait 4 côtés, ils ont enlevé 1 et ils ont mis 3, alors moi, vu qu'il y a 3 côtés, j'ai enlevé 1 et ça m'a fait 2. » On a ici une démarche par analogie validée numériquement. Le professeur l'invite même à expliciter cette démarche dans la phase 5 de bilan à partir du 1er message pour le calcul des mailles carrées (3×nb de mailles+1) : « soustraire 1 au nombre de côtés d'une maille ». Nous reviendrons sur l'attention du professeur à propos de cette élaboration qui conduit au message : « 2×nb de mailles+1=nb de tiges » de même type de modélisation que M2.

Dans ce bilan, nous trouvons aussi une modélisation du type M4 proposée à la classe par l'équipe 3 par l'élève E[3.2]: « (nb mailles -1)×2+3=nb de tiges dans la chaîne ». Ce message est validé par le professeur et les élèves par un essai pour les cas 3 et 5.

Les deux premières tâches de généralisation *tca* et *tta* (mailles carrées et triangulaires) sellent le scenario et les 3 autres tâches *tha, toa* et *tpa* (mailles hexagonales, octogonales et pentagonales) se déroulent de la même manière de la phase 6 à la phase 9 avec des messages du même type que les modélisations M2 et M4 des chaines à mailles carrées. Par exemple pour l'octogone, des groupes donnent le message « (nb de mailles-1)×7+8=nb de tiges », tandis que pour les pentagones des groupes c'est le message « (nb de mailles-1)×4+5=nb de tiges » qui est avancé.

- *Techniques associées au type de tâches Ta*

Comme déjà indiqué, dans les phases 10 et 11 le professeur propose aux élèves de se situer au niveau du type de tâches de généralisation Ta pour lequel les tâches précédentes (*tca, tta, tha, toa et tpa*) ne sont des spécimens. Le professeur présente ainsi le travail demandé :

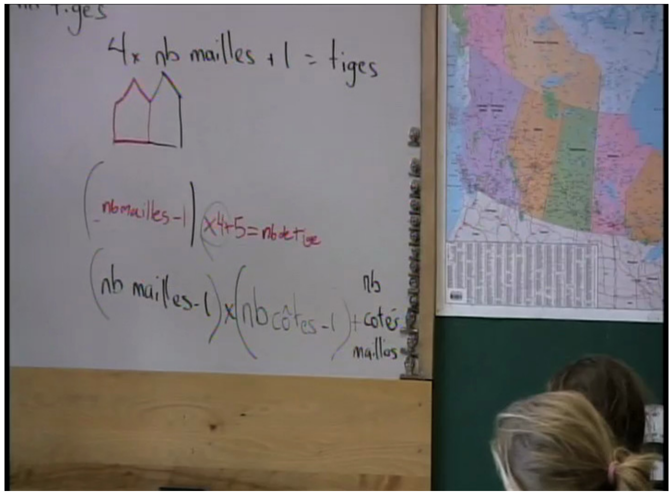
> A chaque coup on a trouvé **une phrase mathématique** qui permettait de trouver le nombre de tiges. Maintenant ce que je veux que vous me trouviez, je veux avoir une phrase mathématique qu'on va pouvoir envoyer au bijoutier et dans cette phrase peu importe la commande du client, c'est-à-dire que le client qu'il décide que sa maille est triangulaire, carrée qu'elle est de forme hexagonale, pentagonale, octogonale, peu importe la forme de sa maille, le bijoutier va pouvoir prendre cette **formule** là et dire ah là parfait j'aurai besoin de tant de tiges.

Après un travail de groupes de huit minutes environ dans la phase 10, les élèves livrent leurs « phrases mathématiques » demandées par le professeur. On retrouve ici deux types de formules généralisant les formes M2 et M4 vues dans les cas particuliers de formes :

- G2 : (nb côtés de la maille - 1) × nb de mailles + 1 = nb de tiges
- G4 : (nb de mailles -1) × (nb côtés – 1) + nb côtés = nb de tiges

Pour la formule G1, une élève explique qu'ils ont observé que, dans la formule « 2×nb de mailles+1=nb de tiges » du cas triangulaire, le « 2 » représente le nombre côtés de la maille moins 1. Le professeur pousse un peu le raisonnement en disant « donc vous avez remplacé votre 2 … d'où il vient ce 2 là … c'est justement le nombre de côté de la maille moins 1 ».

Le professeur poursuit la demande de l'explicitation du raisonnement pour la formule G2 en mettant en parallèle au tableau (voir figure ci-dessous) la formule pour le pentagone pour bien faire ressortir le rôle joué par les différentes variables et explicite lui-même le raisonnement supposé des élèves : « on part de la formule précise pour ce type de mailles là et puis on généralise avec une formule qui va nous permettre de trouver ». Et il compare les deux formules en précisant que la deuxième est un peu moins évidente à voir.



Nous laissons de côté l'analyse du type de tâches Tmn et de la tâche tma (phase 12 et 13) qui amènent à s'intéresser à la dépendance inverse entre le nombre de mailles et le nombre de tiges pour la forme carrée.

- *Technologies associées aux différents types de tâches de généralisation*

Nous rappelons que nous utilisons le concept de technologie au sens de Chevallard (1 999), autrement le discours sur la technique qui permet de la justifier, éclairer, produire, …

En dehors des connaissances liées au choix du contexte géométrique constitué essentiellement des polygones et des méthodes élémentaires de dénombrement, les élèves doivent avoir une idée intuitive des notions de suites et d'algorithmes. Ils doivent aussi maîtriser les connaissances sur le numérique, notamment sur les nombres entiers et les opérations de l'arithmétique avec le vocabulaire et les différents registres sémiotiques permettant de manipuler et traiter les calculs sur ces nombres.

Les notions de variable et de dépendance entre variables peuvent aussi émerger de ce travail sans qu'une formalisation soit possible. Ces situations font ressortir le besoin d'utiliser un langage intermédiaire entre le langage formalisé de l'algèbre et le langage numérique sur les nombres. Ce langage est parfois introduit par le professeur comme « Nb » pour désigner une variable numérique.

Les connaissances et outils précédemment indiqués vont fournir des ressources aux élèves pour entrer dans un processus de généralisation, favorisé par la situation.

VI. SITUATIONS DE GENERALISATION : PRAXEOLOGIES ET PENSEE ALGEBRIQUE

Nous avons déjà souligné la structure complexe de la situation proposée avec la succession des tâches et types de tâches numériques et de généralisation que nous avons qualifié de réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série. Cette structure a permis à une classe et sûrement à de nombreux élèves de cette classe d'entrer dans un processus de généralisation qui est un des aspects spécifiques de la pensée algébrique.

La situation permet une dévolution de ce processus en commençant par des types de tâches numériques (Tcn et Ttn) et en mobilisant des techniques σ_1 basées sur des technologies numériques. Les productions des élèves attestent une articulation numérique-algébrique bien ajustée en jouant sur la taille de la variable nombre de mailles. Ainsi le passage de l'étude des premiers cas du nombre de mails (entre 1 et 9) à celui d'un nombres comme 44 ou 45 force les élèves à faire évoluer leurs procédures vers des techniques de généralisation explicite. Ce saut informationnel fait ainsi fonctionner ces valeurs numériques comme des exemples génériques au sens de Balacheff (1987) et ne plus considérer ce cas comme un cas déterminé mais comme un représentant d'une variable, montrant ainsi un aspect de la compétence et pensée algébrique.

Dès les premières tâches, le langage et divers registres sémiotiques sont sollicités pour dire cette généralisation, l'aspect sémiotique fort de cette situation fait ainsi apparaître une caractéristique du travail algébrique.

Le numérique va encore être un appui dans cette situation comme moyen de validation mais aussi provoque de futurs obstacles didactiques car les élèves peuvent considérer les vérifications de formules avec les premiers cas numériques comme une preuve. Conception qu'il faudra prendre en compte à propos de l'apprentissage de la démonstration au collège en France.

Pour terminer, si la situation a permis à des élèves de traiter une situation de généralisation à deux variables, comme on l'a vu avec le type de tâches *Ta* où les élèves devaient faire un message pour n'importe quelle forme et taille de chaînes, on peut être plus réservé sur la forte mise en évidence du raisonnement analogique par le professeur.

REFERENCES

Balacheff N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18.12.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bednarz N., Dufour-Janvier, B. (1996) Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Booth L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, Vol 5.*

Bronner A. (1997) Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, *Thèse de doctorat*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bronner A. (2006) « Installation et régulation par l'enseignant de l'espace parole-pensée-actions-relations. Gestes d'étude, Gestes professionnels, évènements et ajustements ». *Journées d'études IVDA* 2005. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Bronner A., (2007) La question du numérique : Le numérique en questions, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Montpellier 2.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2. La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, n°23, 5-38.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg.

Grugeon B. (1995) *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Kieran C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons, in Ponte J. P., Matos J. F. (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1, 157-175.

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In Grouws D. A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Marchand P., Bednarz N. (1999) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ* XXXIX(4), 30-42.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Squalli H., Suurtamm C., Freiman, V. (2012) *Preparing Teachers to Develop Algebraic Thinking in Primary and Secondary School / Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire.* Canadian Mathematics Education Study Group 2012.

Vergnaud G. (1986) Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*. Éditions La Pensée Sauvage.

Squalli H., Mary C., Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique. Technologie - Sciences – Mathématiques*. Editions Deboeck.