Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ANALYSE DES RAISONNEMENTS D'ÉLÈVES À TRAVERS DES RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES DE COMPARAISON

Adolphe ADIHOU* – Hassane SQUALLI** - Mireille SABOYA*** – Mélanie TREMBLAY****
Annick LAPOINTE*****

Résumé – Nous exposons quelques résultats d'une recherche conduite auprès d'élèves du premier cycle du secondaire au Québec (12-14 ans) visant à documenter les raisonnements algébriques et arithmétiques mobilisés par ces élèves dans la résolution de problèmes écrits de type comparaison, généralement utilisés à l'entrée du secondaire. L'analyse amène à constater une cohabitation, des allers-retours entre les pensées arithmétique et algébrique.

Mots-clefs : algèbre, arithmétique, structure, résolution de problèmes, raisonnements

Abstract - We present some results of a research conducted with junior high school students in Quebec (12- 14 years) to document the algebraic and arithmetic reasoning mobilized by these students in solving word problems type comparison, typically used at the entrance of the school. The analysis leads to the recognition of cohabitation, back and forth between arithmetic and algebraic thinking.

Keywords: algebra, arithmetic, structure, problem solving, reasoning

I. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

L'étude s'inscrit dans la continuité de deux recherches québécoises ; celle de Bednarz et Janvier (1992), réalisée après la réforme des années 1980 et celle de Marchand (1998) réalisée après la réforme des années 1990 (Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli, Tremblay 2014). Comme ces deux recherches notre étude vise à éclairer le travail fait dans la résolution de problèmes de comparaison en algèbre après les changements mis sur pied dans le curriculum des mathématiques au secondaire dans les années 2000. Par ailleurs, Oliveira et Camara (2011) ont mené une étude qui brosse le portrait de la résolution de ces problèmes pour les élèves de 6e année primaire et du premier cycle du secondaire au Brésil et au Québec. Dans la recherche dont nous faisons état dans cette contribution, et dans une perspective du développement de la pensée algébrique, nous avons conçu et soumis des

* Université Sherbrooke – Canada - Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
** Université Sherbrooke– Canada - Hassane.Squalli@USherbrooke.ca
*** Université du Québec à Montréal – Canada - Saboya.Mireille@uqam.ca
**** Université du Québec à Rimouski – Canada - Melanie_Tremblay@uqar.ca
***** Université Sherbrooke – Canada - Annick.Lapointe@USherbrooke.ca

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

problèmes qui valorisent des raisonnements algébriques chez les élèves du 1er cycle du secondaire (1re année : 12/13 ans et 2e année : 13/14 ans) (Saboya et al. 2014).

II. ÉLEMENTS DE PROBLÉMATIQUE

Les recherches sur le recours aux problèmes à texte dans l'enseignement de l'algèbre sont très variées : celles qui étudient la place et le rôle des problèmes dans le curriculum de l'enseignement secondaire, celles qui étudient les difficultés liées à leur résolution, celles qui étudient le contenu qu'ils véhiculent et celles qui se focalisent sur les problèmes pour étudier le passage de l'arithmétique vers l'algèbre. Ainsi, les années 90 ont vu la réalisation d'une variété de recherches sur l'enseignement et l'introduction de l'algèbre par le biais de la résolution de problèmes. C'est le cas de Bednarz et Janvier (1996) qui soulignent dans leur introduction « For many reasons, we must consider problem solving as a significant perspective through which to introduce students to algebra » (p.115). Dans leurs études, elles mettent en évidence les différentes perspectives d'introduction de l'algèbre entre autres le développement des habiletés à généraliser et à raisonner de manière analytique qui sont deux composantes essentielles de la pensée algébrique (Squalli 2000), et a fortiori, deux enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au moment de son introduction.

De nombreuses recherches empiriques ont montré qu'au lieu de stratégies algébriques de résolution de problèmes, un grand nombre d'élèves préfèrent utiliser des stratégies arithmétiques. Ces recherches ont mis en évidence le fait que lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, plusieurs ont de la difficulté à opérer sur l'inconnue et utilisent plutôt la méthode par essais et erreurs, qui est souvent efficace dans certains problèmes scolaires. Filloy et Rojano (1984) considèrent que dans de tels cas il existe une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique chez l'élève. A l'instar de ces recherches, Marchand (1998) a travaillé spécifiquement sur l'aspect analytique de l'introduction à l'algèbre. Elle a montré qu'il existait des discontinuités dans la nature et la complexité des problèmes proposés aux élèves d'un niveau scolaire à un autre dans le cadre du programme de 1993. Elle a constaté que peu d'élèves du premier cycle du secondaire effectuait le passage à un raisonnement algébrique, plusieurs privilégiant le raisonnement essais et erreurs qui étaient pourtant peu fréquent avant la réforme de 1993.

Par ailleurs, le programme québécois (Gouvernement du Québec 2006) préconise d'introduire l'algèbre par une double voie : 1) par la généralisation et 2) par l'introduction au raisonnement analytique dans le cadre de la résolution de problèmes (considérer l'inconnue et opérer sur elle comme on opère sur les données connues). En effet, la capacité à généraliser et celle à raisonner sur l'inconnue favorisent la capacité à symboliser (Squalli 2000) et ces deux voies favorisent l'introduction du langage symbolique de l'algèbre. En effet, comme le précise Pimm (1995):

> We symbolise when we want something that is absent or missing in some way – and then we work on or with the symbol as a substitute, and on occasion as a consolation.
>
> […] One central reason, then, for symbolising is that symbols allows us to *manipulate*, by proxy, things that are not easily handled, or which are even impossible to handle, by our physical selves (p. 109).

Par contre pour la première voie, le travail de Denis (1997) et celui de Squalli, Theis, Ducharmes-Rivard et Cotnoir (2007) ont mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans les manuels: de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques. Concernant la seconde voie, par une analyse des problèmes utilisés dans des manuels pour l'introduction à l'algèbre (nature et complexité), Marchand et Bednarz (1999) ont mis en évidence que les problèmes choisis n'aident pas les élèves à voir la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique (raisonner de manière analytique) et à saisir la puissance de l'algèbre (Squalli 2002) dans la résolution d'une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle en réalité suffisant. Bednarz et Janvier (1994) distinguent trois classes de problèmes : des problèmes de taux, des problèmes de comparaison et des problèmes avec des transformations dans le temps. Elles ont mis en place une grille pour analyser des problèmes arithmétiques et algébriques et leur complexité. Bednarz et Janvier (1996) ont étudié la résolution de problèmes sous l'angle de continuité et de discontinuité entre la résolution avec l'arithmétique et l'approche algébrique. Elles ont analysé la façon dont les élèves procèdent lors d'une résolution arithmétique (les raisonnements, le traitement, l'utilisation des relations, etc.) dans le but de faire un lien entre une résolution arithmétique et celle algébrique. Elles ont ainsi fait ressortir la différence qui existe entre le calcul relationnel à l'œuvre lors d'une résolution arithmétique et d'une résolution algébrique. «The preceding analysis appears to link a priori this way of connecting the problem (algebraic solution) to the reasoning we called « numeric trial » (p.128). Dans leur conclusion, elles ont laissé transparaître que la difficulté des étudiants à résoudre un problème par l'arithmétique pourrait être une motivation pour passer à une résolution par l'algèbre. Leur étude fait aussi ressortir les difficultés des élèves de revenir à des résolutions arithmétiques lorsque ces derniers maitrisent les résolutions algébriques.

Dans la perspective du développement de la pensée algébrique, **quels sont les raisonnements algébriques chez les élèves du 1^er^ cycle du secondaire ?** Nous analysons les raisonnements utilisés par les élèves dans la perspective selon laquelle la pensée algébrique articule les dimensions arithmétique et algébrique.

III. CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans cette perspective, il importe alors de pouvoir reconnaitre et distinguer les différentes stratégies de résolution mobilisées par les élèves en situation pour ainsi mieux adapter les interventions. **Le raisonnement algébrique est caractérisé, entre autres, par la capacité à se détacher des grandeurs et du contexte (habillage du problème) soit pour opérer sur l'inconnue, soit pour modéliser des relations, soit pour généraliser un phénomène.** Pour ce faire, on a recours à l'utilisation d'outils sémiotiques (tels que les graphiques ou les symboles algébriques) qui permettent la représentation et le calcul algébrique (Kieran 2007; Squalli 2003). On entend alors par **raisonnement analytique cette capacité à « se servir de l'inconnue comme si elle était déjà connue pour en tirer des conclusions nécessaires jusqu'à en obtenir quelque chose qui soit a déjà été démontré vrai ou a déjà été démontré faux. »** (traduction libre de Lins, 1993, produite par Jeannotte 2009). Bednarz et Janvier (1992) et Lins (1993) voient le raisonnement analytique comme étant une constituante importante du raisonnement algébrique.

Depuis fort longtemps, les Anciens opposaient les méthodes d'analyse et de synthèse (Squalli 2000). Hintikka et Rems (1964) expliquent:

> Analysis is a method Greek geometers used in looking for proofs of theorems and for constructions to solve problems. In both cases, analysis apparently consists in assuming what was being sought for, in inquiring where it comes from, and in proceeding further till one reaches something already known. Analysis is followed by a synthesis in which the desired theorem or construction is established step by step in the usual manner by retracing the stages of the analysis in the reverse order. (p. 1)

ou encore, comme Pappus lui-même l'affirme:

> Now, analysis is a method of taking what is sought as though it were admitted and passing from it through its consequences in order to something which is admitted as a result of synthesis; for in analysis we

> suppose that which is sought to be already done, and we inquire what it is from which this comes about, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on until, by retracing our steps, we light upon something already known or ranking as first principle; and such a method we call analysis, as being a reverse solution. (…) But in synthesis, proceeding in the opposite way, we suppose to be already done that which was last reached in the analysis, and arranging in their natural order as consequence what were formerly antecedents and linking them one with another, we finally arrive at the construction of what was sought; and this we call synthesis. (Fauvell & Gray, 1990, p. 209, cité dans Lins, 1992, p. 15).

La distinction entre un raisonnement arithmétique et un raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique du raisonnement et non sur l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues. Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues; jamais on n'opère sur des inconnues. Dans la démarche algébrique, par contre, on procède de l'inconnue vers le connu, en opérant sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu. Il va de soi que le symbole utilisé pour représenter l'inconnue peut être verbal ou écrit ; dans ce dernier cas, il peut être un mot (comme le mot *racine* utilisé par Al-Khawarizmi) ou n'importe quel caractère écrit (comme *x*, ?, □, …). La nature du symbole est secondaire du moment que ce symbole soit utilisé comme substitut de l'inconnue, que l'on peut manipuler lorsqu'on veut opérer sur l'inconnue.

IV. MÉTHODOLOGIE

Nous nous avons conçu et soumis des problèmes qui valorisent des raisonnements algébriques chez les élèves (12-14 ans) du 1er cycle du secondaire en vue d'analyser ces raisonnements sur la base des productions des élèves (Saboya et al., 2014). Pour cette étude réalisée au Québec, nous avons choisi les mêmes types de problème de comparaison que

Marchand (1998). Ce sont des problèmes à texte qui possèdent des données numériques et des relations de types additif et multiplicatif.

Exemple : Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 22 produits laitiers de plus que de produit céréaliers et il compte 201 produits en conserve de plus que de produit céréaliers. S'il y a 460 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

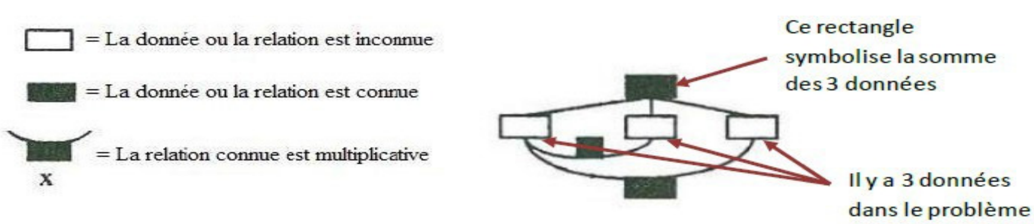


Figure 1 *– Un exemple de la schématisation de Vergnaud*

Lien entre l'exemple et la figure 1

Il y a trois types de produits soit 460 produits en tout (somme des trois données), ce qui symbolise le premier rectangle noir. Les trois rectangles blancs symbolisent le nombre de produits de chaque type recherché (Céréalier, Laitier et Conserve). Une première relation est mise en évidence entre les produits céréaliers et les produits laitiers (22 produits laitiers de plus que de produit céréaliers) et une deuxième relation est mise en évidence entre les produits céréaliers et les conserves (201 produits en conserve de plus que de produit céréaliers).

Les problèmes peuvent être connectés ou déconnectés (Bednarz et Janvier, 1994). Ces auteures précisent que pour les problèmes connectés « une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue » (p. 279) alors que pour les problèmes déconnectés « aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème » (p. 279) (Saboya et al., 2014). Ainsi, les problèmes déconnectés «résistent» à une démarche de résolution arithmétique et favorisent l'émergence du raisonnement analytique (Squalli, 2002).

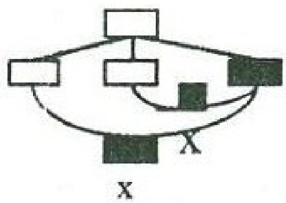
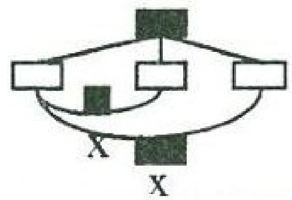
 Un exemple de schématisation d'un ***problème connecté.*** Comme une des grandeurs est connue, il suffit d'appliquer les relations également connues pour retrouver les autres grandeurs (relations qui sont dans le cas illustré ici multiplicatives).	 Un exemple de schématisation d'un ***problème déconnecté.*** Nous pouvons remarquer que cette schématisation est semblable à celle de la colonne de gauche. Toutefois, il n'y a pas de pont direct entre le total (connu) et les autres grandeurs. La résolution est moins immédiate.

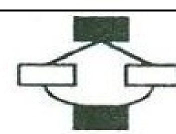
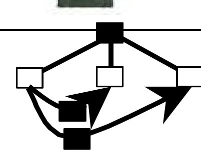
Figure 2 - *Schématisation d'un problème connecté et d'un problème déconnecté (Saboya et al. 2014)*

1. *Grille utilisée pour l'élaboration des problèmes de comparaison*

Les problèmes ayant des relations de comparaison ont été élaborés d'après la grille de Bednarz et Janvier (1994). Celle-ci a été également utilisée dans la conception des questionnaires élaborés par Marchand (1998) et ceux d'Oliveira et Camara (2011). Nous avons élaboré 12 problèmes connectés ou déconnectés avec différents habillages (contexte).

La schématisation de Vergnaud permet de mettre en évidence dans le problème les relations entre les données connues et les inconnues. Bednarz et Janvier (1992) ont classé les problèmes avec des relations de comparaison selon leur degré de complexité et leur structure. Elles considèrent à l'intérieur de chacune des catégories deux variables importantes : la nature des relations (multiplicative et/ou additive) et l'enchaînement des relations. Celles-ci influencent la complexité du problème.

2. *Les problèmes et leur structure*

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
Problèmes à 3 branches	**SOURCE** Les deux relations on la même donnée comme point de départ.	

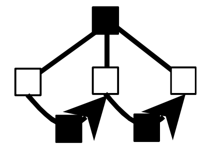
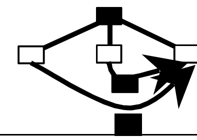
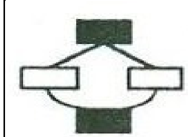
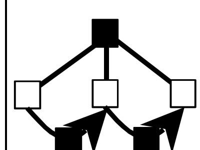
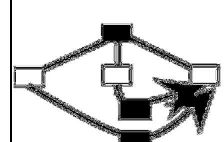
	COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
	PUITS Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.	

Figure 3 *– Structures de problèmes*

3. Échantillon

Nous avons administré le questionnaire à un échantillon comportant 1203 élèves québécois de 48 classes du premier cycle du secondaire (secondaire 1 et 2).

V. ANALYSE DES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	Énoncé : Un camp de jour offre deux activités de plein air. Le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 212 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?	
Problèmes à 3 branches	**COMPOSITION** Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	Énoncé : Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site <<facebouille>>. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun ? Réponse Sophia : 380, Carlos : 38, François: 76	
	PUITS Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.	Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?	

Nous présentons une analyse des raisonnements utilisés par quatre élèves pour résourdre des problèmes de type connectés ou déconnectés. Rappellons qu'un *raisonnement est qualifié de raisonnement arithmétique explicite si l'élève trouve la valeur de l'inconnue en n'opérant que sur des nombres ou grandeurs connues. Un raisonnement est qualifié de raisonnement algébrique explicite, si l'élève considère l'inconnue, la représente par*

*un symbole et opère sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu***.** Bien que dans cette recherche des élèves aient produit des raisonnements arithmétiques explicites et des raisonnements algébriques explicites, dans cette analyse, nous nous intéressons particulièrement à documenter les raisonnements qui ne peuvent être qualifiés ni de raisonnement arithmétique explicite ni de raisonnement algébrique explicite. En effet, les élèves ne maîtrisant pas encore l'outil algébrique, nous nous attendons à ce que la manifestation de tels raisonnements se réalise dans la résolution des problèmes déconnectés. Dans cette section, nous présentons des exemples de raisonnements d'élèves qui ne sont ni des raisonnements arithmétiques explicites ni des raisonnements algébriques explicites.

1. *Résolution purement numérique : cas de problèmes déconnectés*

Dans ce premier exemple (voir figure 4), la résolution du problème est entièrement dans le registre numérique. Toutefois, comme nous allons le montrer, l'élève considère les inconnues dans le problème et opère sur elles, mais ne les représente pas explicitement. Nous dirons que l'inconnue est muette.

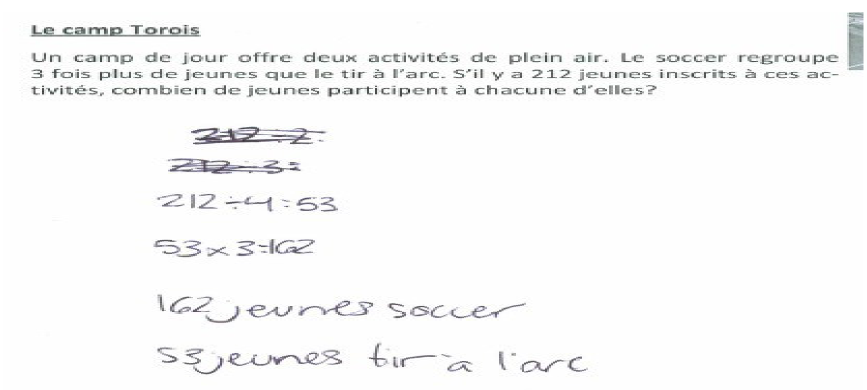


Figure 4 *– Production : Le camp Torois*

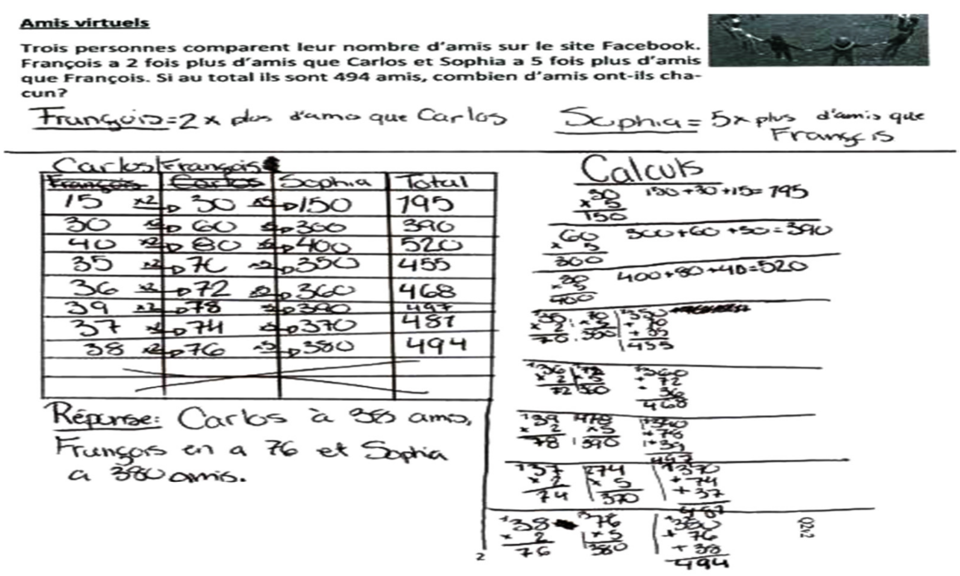
L'élève divise 212 par 2 (212 / 2) et ensuite (212 / 3), puis décide de changer de stratégie. Il exécute le calcul 212 par 4 et trouve 53. Ensuite il multiplie 53 par 3 et trouve 162 au lieu de 159 (son erreur renvoie au fait que : « 3x3 = 12 »). Comme le montre la dernière ligne de la figure 4, le nombre 53 réfère au nombre de jeunes inscrits au tir à l'arc. Le nombre 53 a été obtenu de l'opération 212 : 4.

Dans l'égalité 212 : 4 = 53 « jeunes inscrits au tir à l'arc » le nombre « 4 » proviendrait du raisonnement implicite suivant : «si le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc, alors le total des jeunes est 4 fois le nombre des jeunes qui font le tir à l'arc; ce nombre est donc égal à 212 : 4».Dans ce schéma de raisonnement, l'élève opère bien sur l'inconnue sans la représenter symboliquement de manière explicite. Nous dirons que l'inconnue est objet de la pensée de l'élève, sur laquelle il opère, mais elle reste muette.

2. *Résolution par essais numériques*

Dans ce deuxième exemple (voir figure 5), la résolution du problème est dans le registre numérique avec un tableau comme support. Cet élève explicite les relations du problème (François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François). La résolution met en évidence le fait qu'il ait trouvé un pont entre les données ou qu'il positionne les inconnues dans son tableau par ordre. Il commence sa résolution en mettant en premier lieu le nombre d'amis de François et en leur attribuant des valeurs. Il s'est rendu compte du lien qui unit le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia.

Cet élève positionne les trois relations; le nombre d'amis de François = 2x le nombre d'amis de Carlos; le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François et le total des amis est de 494. Il donne des valeurs pour l'inconnue, le nombre d'amis de Carlos, et applique les relations mises en évidence dans le problème (le nombre d'amis de François = 2x le nombre d'amis de Carlos; le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François et vérifie le total). Il ne désigne pas le nombre d'amis de Carlos par un symbole. Il utilise un raisonnement numérique à l'aide d'un tableau. Cet élève n'utilise pas de lettre mais des relations. Il fait des calculs, des essais numériques. Il met en évidence un raisonnement numérique que l'on utilise pour une approche fonctionnelle. L'approche algébrique est ici implicite. Ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique. Toutefois, le travail de l'élève colle à une résolution algébrique en désignant par n = le nombre d'amis de Carlos, alors le nombre d'amis de François = 2n; et le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François = 5*2*n= 10n; et n+2n+10n=13n=494 et n=494 :13= 38).


Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

François = 2 x plus d'amis que Carlos

Sophia = 5x plus d'amis que François

Carlos	François	Sophia	Total
15	×2 → 30	×5 → 150	195
30	→ 60	→ 300	390
40	→ 80	→ 400	520
35	→ 70	→ 350	455
36	→ 72	→ 360	468
39	→ 78	→ 390	497
37	→ 74	→ 370	481
38	→ 76	→ 380	494

Calculs

150+30+15=195

300+60+30=390

400+80+40=520

Réponse: Carlos à 38 amis, François en a 76 et Sophia a 380 amis.

Figure 5 *– Production : Amis Virtuels1*

3. *Raisonnement de type retour à l'origine et fausse position : cas additif*

Le problème « Le camp Vifranc » (voir figure 6) propose de déterminer le nombre total de jeunes qui pratiquent trois activités : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». « Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le tir à l'arc regroupe 29 jeunes de plus que le canoë. L'énoncé précise qu'il y a 315 jeunes inscrits à ces trois activités et explicite une relation additive entre le nombre de jeunes pratiquant le soccer et le tir à l'arc et une relation additive entre le nombre de jeunes pratiquant le tir à l'arc et le canoë. Il s'agit donc d'un problème, faisant intervenir trois inconnues et trois relations connues.

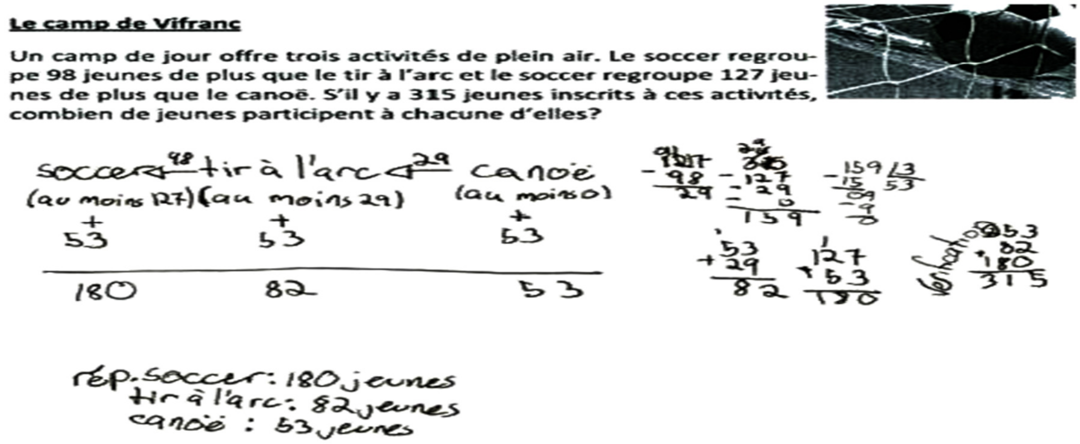


Figure 6 *– Production : Le camp de Vifranc*

Dans ce troisième exemple, la résolution du problème est entièrement dans le registre numérique. L'élève considère les inconnues dans le problème et opère sur elles, mais ne les représentent pas explicitement. Nous dirons que l'inconnue est muette.

L'élève ordonne les inconnues de la plus petite à la plus grande, réécrit les relations entres les inconnues successives. Il extrait les trois activités du problème dans l'ordre d'apparition dans l'énoncé : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». Il explicite les relations du problème et positionne les deux relations par rapport au nombre de jeunes pratiquant le canoe. Dans cette opération il a bien considéré les inconnues et opéré sur elles. Il connaît maintenant les écarts entre les inconnues et leur somme. Pour trouver les valeurs des inconnues, il utilise un raisonnement qui s'apparente à la fois au raisonnement de type ***fausse position*** et à la procédure de retour à l'unité dans les raisonnements propotionnels. Il affecte la valeur minimale à l'inconnue de plus petite valeur, (retour à l'origine) et tout en maintenant stables les relations entres les inconnues, il génère les valeurs des deux autres inconnues. Il obtient un total plus petit que le total réel. Il corrige alors les valeurs des inconnues en ajoutant à chacune des valeurs le tiers de l'écart entre les deux totaux. La répartition équitable de cet écart est justifiée pour garder stable les relations entres les différentes variables.

Cet élève représente le nombre de jeunes inscrits dans les trois activités dans l'ordre de leur apparition dans l'énoncé : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». Il explicite les relations du problème et positionne les deux relations par rapport au nombre de jeunes pratiquant le canoe. Cette façon de faire est rendue possible parce que le problème établit deux relations additives d'une part entre le « Soccer » et le « Tir à l'arc » et d'autre part entre le « Soccer » et le « Canoe ». L'élève part du principe selon lequel au moins 127 jeunes pratiquent le soccer, si aucun jeune ne pratique le canoe « au moins 0 » et il en déduit qu'au moins 29 jeunes pratiquent le tir à l'arc si le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc. C'est comme un retour à l'origine. En fait avec ces relations qui sont tirées du problème

« Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités » L'élève a établi d'autres types de relations équivalentes « Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le tir à l'arc regroupe 29 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités ». Dans la deuxième partie de son raisonnement qui prend en compte le nombre total de jeunes inscrits (il y a 315 jeunes inscrits à ces activités), son raisonnement part du fait que si aucun jeune ne pratique le canoe et au moins 29 jeunes pratiquent le tir à l'arc 127 jeunes pratiquent le soccer. Or il le problème précise qu'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, donc, il y a 159 jeunes (315 – 127 – 29 =159) qui pratiquent les trois activités et ces derniers sont répartis équitablement. Donc 53 jeunes (159 / 3 = 53) pratiquent le canoe, 53 + 29= 82 pratiquent le tir à l'arc et 180 jeunes pratiquent (53 + 127 = 82 + 98=180) le soccer. Il transforme les relations du problème en des relations équivalentes, il positionne un générateur pour ramener le problème en un problème ou le nombre de jeunes pratiquant le canoe est 0 (retour à l'origine ou positionnement d'une origine) et ensuite par un jeu qui ressemble à une translation (+ 53) ramène le problème à une autre origine (Changement d'origine). Dans le cas de cette résolution « 29 » jeunes a le statut de « relation ».

Cet élève fait un calcul relationnel. Il met en évidence un raisonnement algébrique implicitement. Ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique.

4. *Raisonnement de type retour à l'unité et fausse position : cas multiplicatif*

Le raisonnement utilisé par cet élève (voir figure 7) est en quelque sorte la version multiplicative du raisonnement présenté précédemment. Ce problème est le même que celui de la figure **5**. L'inconnue "nombre d'amis de Carlos" génère les deux autres inconnues. Cet élève fait aussi un tableau et désigne par les lettres F, C et S le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia. Dans le tableau il positionne ces lettres selon l'ordre d'apparition dans l'énoncé explicite les relations du problème, toutefois il commence par donner des valeurs au nombre d'amis de Carlos en premier. Ce qui permet de dire que c'est la version multiplicative du raisonnement présenté précédemment (***Figure 6***) et que cet élève ramème le nombre d'amis de Carlos à l'unité.

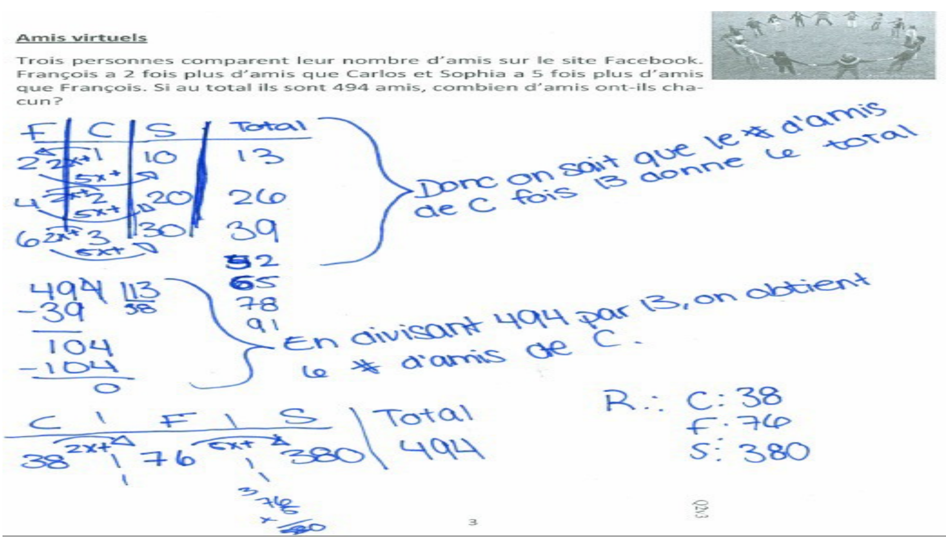


Figure 7 *–Production : Amis Virtuels2*

Le fait d'avoir commencé par le nombre d'amis de Carlos en premier et les flèches qu'il utilise, témoignent d'une analyse du problème ou du moins, d'une analyse des relations entre le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia, ou de l'ordre des relations qui permet d'établir des relations dans une certaine séquence. Il donne des valeurs à différentes au nombre d'amis de Carlos, comme dans une table des valeurs. Esuite, il exprime le nombre d'amis de François sur la base de la relation mise en évidence dans le problème (François a 2 fois plus d'amis que

Carlos). Après, il exprime le nombre d'amis de Sophia sur la base de la relation mise en évidence dans le problème (Sophia a 5 fois plus d'amis que François). Il fait la somme avec le nombre d'amis de Carlos, le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia.

Le nombre d'amis de François	*Le nombre d'amis de Carlos*	*Le nombre d'amis de Sophia*	*Total*
2	*1*	*10*	*13*
4	*2*	*20*	*26*
6	*3*	*30*	*39*

Figure 8 *–Illustration 1 : Amis Virtuels2*

De ce travail il déduit que si au total ils ont 494 amis, 494 est un multiple de 13. Le raisonnement qui lui permet de mettre cet aspect en évidence c'est que pour 1 ami de Carlos, on a un total de 13. Donc pour 38 amis on a 494 amis au total. C'est en cela qu'il fait une division 494 par 13, en posant l'opération et en exécutant l'algorithme et trouve 38. Ce qu'il exprime par : *« Donc on sait que le ?? d'amis de C fois 13 donne le total ».*

Le nombre d'amis de Carlos		*Le nombre d'amis de François*		*Le nombre d'amis de Sophia*	*Total*
	2 X +		*5 X +*		
38		*76*		*380*	*494*

Figure 9 *–Illustration 2 : Amis Virtuels2*

Dans le premier tableau (***Figure 8****)* « le nombre d'amis de Carlos » est positionné dans la deuxième colonne et la flèche y part. Dans le deuxième, « le nombre d'amis de Carlos » est positionné dans la première colonne et la flèche y part. Ce détail met en évidence le fait que le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia (les inconnues) sont identifiées selon l'ordre de leur apparition dans le problème. Remarquons cependant que l'approche de cet élève soulève la question suivante: Raisonne-t-il de façon uniquement numérique après avoir extrait des relations qui l'amènent à trouver une régularité et sur cette base, fait-il des déductions et oublie-t-il le problème ? Cet élève utilise des lettres. Mais ces lettres sont utilisées pour identifier (pour désigner). Elles ne sont pas symbolisées comme des inconnues. Il utilise des relations. Il fait des calculs. Il met en évidence implicitement un raisonnement fonctionnel et algébrique comme dans le cas de l'élève de la figure 5. Ils positionnent un générateur, c'est-à-dire une inconnue qui génère les autres relations et ce dans une certaine séquence. En effet le problème génère une fonction à trois variables qui peut être réduite à une relation multiplicative à une variable.($F\ (x, y, z)$ avec $y = ax;$ et $z = by = bax,$ c'est-à-dire $F(x, y, z) = F\ (x, ax, bax) = G\ (x),$ avec la contrainte $x + y + z = K$ (494)). Toutefois, ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement purement arithmétique ou algébrique.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans cette analyse, nous avons exposé quatre type de raisonnement qui ne sont ni arithmétique explicite ni algébrique explicite. Dans un de ces raisonnements (***Figure 4***), l'élève considère les inconnues et opère sur elles sans jamais les expliciter. Dans les autres raisonnements, les élèves considèrent les inconnues, les représentent symboliquement et utilise ces représentations pour décrire les relations entre les inconnues. Cependantt, ils ne vont pas opérer sur ces représentations. Comme dans le cas du raisonnement de type fausse position, pour ne pas opérer sur l'inconnue, ils vont affecter une valeur numérique à l'inconnue (cette valeur est choisie de manière pertinente comme un générateur). Cette valeur est comme dans le cas du raisonnement proportionnel du type retour à l'unité (retour à l'origine dans le cas de problème à stucture additive). Cela permet de corriger la valeur initiale en tenant compte des relations entre les inconnues. Dans un des raisonnements, l'élève représente bien les valeurs connues et les relations symboliquement, et utilise un raisonnement de type essais–erreurs (***Figure 5***).

Ces analyses illustrent bien que ce n'est pas dans l'utilisation de lettres ou d'un symbolisme que le raisonnement peut être qualifié d'algébrique. Dans le même sens, une résolution faisant intervenir uniquement des nombres et des calculs numériques n'est pas automatiquement arithmétique. Notre hypothèse est que ces raisonnements ont été possibles car l'élève ne dispose pas encore ou ne maîtrise pas encore l'outil algébrique. Ceci questionne la pertinence d'une introduction trop précoce de l'approche algébrique de résolution de problèmes ou de ne concevoir le développement de la pensée algébrique que comme moyen d'introduction à l'algèbre. Les raisonnements où l'inconnue est muette et ceux du type fausse position sont des raisonnements mathématiques sophistiqués et témoignent de l'avancée de la pensée mathématique des élèves même si ces raisonnements ne sont pas ceux attendus dans une classe d'algèbre. Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du calcul algébrique doit permettre d'enrichir les compétences mathématiques des élèves et non exclusivement à les préparer à l'algèbre.

Nous avons observé que l'analyse des raisonnements fait ressortir le fait que dans le cas de ces résolutions puisque les élèves ne disposent pas encore de l'outil algébrique, ils ont plus de liberté à construire des raisonnements et résoudre les problèmes sans une démarche algébrique imposée. Certains élèves mettent ainsi en évidence des démarches ou des approches sophistiquées, bref des raisonnements riches qui contribuent au développement de la pensée mathématique. La résolution de ces problèmes offre ainsi un espace pour permettre aux élèves de mettre en évidence des contenus qui leur permettent de développer la pensée algébrique. Ils mettent en évidence des raisonnements qui dépassent des raisonnements purement arithmétiques, tels que les raisonnements où l'inconnue est muette ou désignée expliciment par une lettre. On remarque que pour un même problème des élèves utilise un raisonnement algébrique explicite et un raisonnement arithmétique/algébrique non explicite. Toutefois certains raisonnements ne permettent pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique. Une observation importante que cette analyse a mis en évidene est l'intérêt de proposer aux élèves des problèmes déconnectés avant l'introduction des lettres. Ils permettent aux élèves d'induire des raisonnements sur la base des connaissances en lien avec la dimension arithmétique. La façon dont les liens entre les relations et les données sont faits dans le problème (problème connecté ou problème déconnecté), influence certes leur résolution. Par exemple, l'élève s'active dans certains cas à articuler de façon linéaire (dans un certain ordre) les relations. Mais pour les problèmes déconnectés l'activité mathématique qui consiste à trouver la réponse, pousse les élèves à positionner l'inconnue et à opérer sur elle (explicitement ou non) par un raisonnement qui n'est pas centré sur le symbolisme comme le met en évidence Squalli (2002).

Eu égard à la façon d'aborder la résolution de ces problèmes, les élèves ne sont pas dans une dynamique où l'introduction de l'algèbre est un lieu de transition, ce qui connote un avant et un après, mais dans ils sont dans une dynamique selon laquelle le développement de la pensée algébrique consiste en articulation des dimensions arithmétique et algébrique dans la perspective d'un développement et d'approfondissement des concepts mathématiques. Les interactions entre les contenus classiquement dénommés de type algébrique ou de type arithmétique cohabitent dans un espace ouvert.

Les élèves se positionnent par rapport aux inconnues, ensuite ils cherchent une façon d'articuler les relations et les données, soit dans une perspective équationnelle ou dans une démarche opératoire sur des variables, ce qui semble mettre en évidence un recours à une pensée algébrique, soit dans une perspective de produire des réponses de nature numérique dans le but de faire des calculs, ce qui semble mettre en évidence un recours à une pensée arithmétique. Dans les deux cas la dimension numérique est présente et à cette étape de développement de la pensée algébrique. Au travers des exemples des élèves et de nos analyses on pourrait évoquer, la suprématie de la pensée arithmétique sur la pensée algébrique. Pour nous, il ne devrait pas y avoir de suprématie de la pensée arithmétique sur la pensée algébrique ni de la pensée algébrique sur la pensée arithmétique dans la perspective de développement de compétences, en termes d'intentions didactiques, bien que l'algèbre sera par la suite un outil puissant pour résoudre plus tard des problèmes plus complexes. Le développement de la pensée algébrique met en évidence une dialectique entre « une pensée arithmétique» et « une pensée algébrique».

REFERENCES

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1994) The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In da Ponte J. et Matos J. (Eds.) *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, 64-71. Lisbonne: Université de Lisbonne.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1996) Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C. et Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht: Kluwer.

Câmara M., Oliveira I. (2010) Estratégias e registros utilizados por alunos de 6º ano na resoluçao de problemas de estrutura algébrica. *X Encontro Nacional de Educaçao Matemática*. Educaçao Matemátic, Cultura e Diversidade. Salvador. Brasil.

Denis C. (1997) Une introduction de l'algèbre en secondaire 3: généralisation et construction de formule. Mémoire de maitrise en enseignement des mathématiques. Montréal, Université du Québec à Montréal.

Filloy E. et Rojano T. (1984) From an arithmetical to an algebraic thought. *Proceedings of PME-NA VI,* Madison, Wisconsin, 51-56.

Fauvel J., Gray J. (1990) *The history of mathematics: a reader.* London: Macmillan.

Gouvernement du Québec (2006) Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle : version approuvée. Québec : Gouvernement du Québec.

Hintikka J., Remes U. (1964) *The Method of Analysis*. Its *Geometrical Origin and Its General Significance*. Boston studies in the philosophy of science, volume 75. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Jeannotte D. (2009) Une comparaison des erreurs commises en algèbre par des élèves du secondaire d'aujourd'hui et d'autres de la fin des années 70. *Actes du colloque GDM-2004.*

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F. K. Jr., (Ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lins R. (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is, Unpublished PhD Thesis. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematics Education.

Lins R. C. (1993) *Understanding what Algebraic Thinking is : Analysis and Synthesis.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Marchand P. (1998) *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves.* Mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement, Université du Québec à Montréal.

Marchand P., Bednarz N. (1999) L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* XXXIX(4), 30-42.

Marchand P., Bednarz N. (2000) Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes: résolution des élèves. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec* XL(4), 15-24.

Mason J., Binns L. (1993) *Exploration of Vergnaud's theorem-in-action in the context of algebra.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Oliveira I., Camâra M. (2011) Problemas de estrutura algébrica : uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Pimm D. (1995). *Symbols and meaning in school mathematics.* NY: Routledge.

Saboya M., Besançon V., Martin F., Adihou A., Squalli H., Tremblay M. (2014) Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre : analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec 2013*, 112-122.

Squalli H. (2000) *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Thèse de doctorat, Université Laval.

Squalli H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire: un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques,* 39, 4-13.

Squalli H. (2003) *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre*. Coll. "Mathèse". Montréal : Éditions Bande didactique, 316 p.

Squalli H., Theis L., Ducharmes-Rivard A., Cotnoir G. (2007) Finalités et approches d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans les manuels du premier cycle du secondaire au Québec. *CD-Rom des actes du colloque de International Organisation of Science and technology Education : Critical Analysis of Science Texbooks.*