

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



LES DIFFERENTES PENSEES MATHÉMATIQUES ET LEUR DEVELOPPEMENT DANS LE CURRICULUM

Compte-rendu du Groupe de travail n° 3

Rahim KOUKI* - Doris JEANNOTTE** - Joëlle VLASSIS***

I. RAPPORT

Ce groupe de travail fait suite au Groupe de travail n° 3 « Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum » du colloque EMF 2012 et du groupe de travail n° 10 « La pensée mathématique, son développement et son enseignement » du colloque EMF 2009. Comme son titre l'indique, il porte sur les pensées mathématiques et, plus particulièrement, sur leur développement dans le curriculum ainsi que dans diverses communautés mathématiques à différents niveaux scolaires, et ce, en prenant en compte les diversités sociales et culturelles. Trois aspects principaux ont été abordés dans ce groupe.

Le premier a consisté en l'étude de différents courants théoriques caractérisant la pensée mathématique et visait à éclairer des questions tant épistémologiques que pratiques, par la mise en lumière de divergences et de convergences quant à l'opérationnalisation de ces théories en lien avec différentes perspectives de recherches.

Le deuxième aspect visait à étudier la prise en compte de l'activité du sujet, son histoire et le milieu dans lequel il évolue, de la nature des objets avec lesquels il travaille, des méthodes qu'il met en œuvre en lien avec les processus de conceptualisation et le développement d'une pensée mathématique.

Le troisième questionnait la prise en compte des différentes pensées mathématiques dans les curricula des pays de l'espace mathématique francophone. Par exemple, leur place dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques effectives des enseignants en regard des apprentissages des élèves peuvent être éclairée par la recherche.

Quatorze personnes ont participé aux activités du GT3 dont sept provenaient du Canada, quatre de France, deux du Luxembourg, et une de Tunisie. En tout, onze textes ont donné lieu

* Université Tunis El Manar – Tunisie- Rahim.Kouki@ipeiem.rnu.tn

** Université du Québec à Montréal – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca

*** Université du Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu

à des présentations. Ces textes concernaient différents ordres d'enseignement du préscolaire jusqu'au lycée. Quoique certains textes touchaient à plusieurs des aspects abordés par le groupe, il est possible de leur attribuer une prédominance selon le classement suivant. Quatre des propositions portaient davantage sur le premier aspect en touchant diverses questions épistémologiques. Cinq concernaient plutôt le second aspect en s'intéressant à l'activité des élèves. Enfin, deux présentations ont fait état d'analyse de curriculum et touchaient donc davantage le troisième aspect.

Dans le reste de ce rapport, nous présentons un bref résumé des contributions écrites et des échanges qui ont eu lieu à leur sujet lors des séances du travail du groupe. Nous proposons ensuite une synthèse de nos discussions ainsi que des pistes pour le congrès EMF-2018.

1. Mise en lumière de différentes perspectives théoriques pour caractériser la pensée mathématique

Luis RADFORD a abordé le thème de la pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Selon cette théorie, deux points de vue sont nécessaires pour définir la pensée mathématique : d'une part, le point de vue anthropologique directement lié à l'agir des individus et aux pratiques sociales; il s'agit d'une synthèse culturellement codifiée du travail ou labeur humain; cette pensée apparaît au sujet comme potentialité; d'autre part, le point de vue subjectif qui est liée à l'individu et renvoie à l'actualisation d'un archétype culturel, comme par exemple la résolution d'équation; l'activité du sujet pensant est donc médiation entre la pensée potentielle et la pensée actuelle. L'exemple du développement de la pensée algébrique dans une classe de deuxième année du primaire a permis d'illustrer les idées présentées. En particulier, la pensée algébrique a été définie en fonction de trois composantes élémentaires : l'indétermination, la dénotation et l'analyticité.

Doris JEANNOTTE a proposé une conceptualisation des processus généralisation et abstraction en tant qu'activité de la pensée mathématique, conceptualisation qui prend racine dans une perspective commognitive. Les deux processus sont posés comme différents sur la base du discours qu'ils développent. Quoique nécessaire à l'évolution de la pensée mathématique du sujet, l'abstraction est nécessaire au développement d'un nouveau « discours incommensurable » (au sens de Sfard, 2008) avec celui dont il est issu.

Hassane SQUALLI a exploré l'apport du modèle de Dörfler (1991) pour l'analyse du développement de la pensée algébrique chez des élèves. Contrairement à la conceptualisation de Jeannotte, le processus de généralisation est ici posé comme une série d'abstractions d'invariants essentiels. En outre, l'analyse a permis de mettre en évidence le rôle des processus de validation dans le développement du processus de généralisation.

Joëlle VLASSIS a proposé une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Au départ d'une analyse épistémico-historique de l'évolution de la notation algébrique, et dans la foulée des approches socio-culturelles inspirées de Vygotsky, l'auteure témoigne du rôle et de l'importance des activités de symbolisation dans toute situation mathématique. Du point de vue des apprentissages, l'auteure met ainsi en lumière, sur la base d'une situation concrète de résolution d'équations, la nécessité de développer des pratiques de classe centrées sur le symbolisme mathématique. Celles-ci envisagent la possibilité pour l'élève de construire le sens de ce symbolisme en étroite interaction avec les concepts, selon une progression structurée en chaînes de signification évoluant vers une mathématisation de plus en plus abstraite au fil d'activités de complexité croissante.

2. *L'activité des élèves au cœur du développement de la pensée mathématique : du préscolaire au Lycée*

Nathalie ANDWANDTER a examiné le potentiel des activités de suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez les enfants de 5 ans. L'auteure analyse d'une part, les démarches des élèves, les gestes et le langage qu'ils utilisent pour résoudre les situations et d'autre part, les différents types d'étaillage pour soutenir les apprentissages. L'auteure montre que des enfants de 5 ans peuvent développer une pensée récursive de type qualitatif voire de type quantitatif, même si pour certains d'entre eux, une des difficultés consiste à exprimer verbalement la variation entre les figures. L'auteure a également mis en évidence l'influence des interventions spécifiques de l'étaillage sur la nature des réponses des enfants et le genre de pensée élaborée par ceux-ci. Ainsi, afin d'optimiser leurs interventions, il importe que les enseignants comprennent ce que l'élève doit discerner pour réaliser les apprentissages spécifiques.

Isabelle DEMONTY a présenté une étude centrée sur l'analyse des démarches des élèves dans des situations de généralisation de suites arithmétiques, à deux moments clés de la scolarité obligatoire : avant l'introduction formelle de l'algèbre (élèves de 12 ans) et après une année de travail en algèbre (élèves de 14 ans). Les résultats montrent les potentialités des élèves à s'impliquer dans ces tâches et ce, même avant tout apprentissage formel de l'algèbre. Ils pointent également les difficultés des élèves, ayant déjà une année d'enseignement de l'algèbre derrière eux, à manier correctement le symbolisme algébrique. Ces résultats témoignent également du caractère artificiel de la rupture introduite dans certains curricula qui préconisent d'enseigner l'algèbre au secondaire après que les élèves ont acquis une base de connaissances arithmétiques au primaire.

Adolphe ADIHOU a présenté quelques résultats d'une enquête portant sur l'analyse des raisonnements des élèves du premier cycle du secondaire au Québec (12-14 ans). L'analyse vise à documenter les raisonnements algébriques et arithmétiques mobilisés lors de la résolution de problèmes écrits de type comparaison, généralement utilisés à l'entrée du secondaire. L'analyse met en évidence la production par les élèves de raisonnements, parfois sophistiqués, qui ne peuvent être interprétés comme purement arithmétiques ou purement algébriques. Cela remet en question l'insistance à imposer rapidement aux élèves le recours à la méthode algébrique dans la résolution de problèmes.

Alain BRONNER a cherché les conditions d'une entrée vers « l'algèbre avant la lettre » via une typologie de problèmes de généralisation. Dans cette perspective, il a étudié les potentialités que peuvent offrir certaines classes de situations relatives à ces problèmes d'une part, et a proposé un travail exploratoire, s'appuyant sur une approche praxéologique, afin de voir comment ces types de situations de généralisation peuvent favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique.

Nathalie BRIANT s'intéresse à la pensée algorithmique, relativement à la pensée mathématique dans le contexte d'un environnement informatisé, exploitant le logiciel Algobox. Elle montre, sur la base de l'expérimentation d'une situation de résolution d'équations, que l'introduction de l'outil informatique va remettre en question l'écologie des savoirs enseignés. En effet, la recherche d'un algorithme informatisé va nécessiter une double transposition, la première allant de la résolution mathématique à la résolution algorithmique ; la seconde passant de cette dernière à la résolution informatique. Ce détour par une pensée algorithmique a permis le développement d'une pensée algébrique. Cette double transposition a provoqué en effet l'évolution du rapport aux objets algébriques. Ceux-ci ont été

réinterrogés, revisités allant jusqu'à l'étude de nouveaux objets comme le concept de paramètre.

3. *Analyse curriculaire et développement de la pensée mathématique*

Mirène LARGUIER a présenté une étude comparative des orientations curriculaires pour l'entrée en algèbre entre les programmes du Québec et de la France pour des élèves entre 10 et 12 ans. Cette analyse a mis en lumière l'intérêt des problèmes de généralisation exploités dans des classes au Québec. Ce type de problème semble permettre une entrée vers l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique en comparaison avec une pensée arithmétique. Les analyses a priori et a posteriori de quelques problèmes de généralisation typiques expérimentés en France avaient pour objectif de tester la solidité de l'hypothèse concernant l'intérêt des problèmes de généralisation. L'auteur souligne, enfin, qu'une modification du curriculum en fin de primaire et en collège est souhaitable en France en prenant pour exemple le programme du Québec.

Rahim KOUKI propose une réflexion épistémologico-didactique sur le développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien par une présentation des résultats d'une étude didactique sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au début du cycle secondaire tunisien. Deux analyses didactiques étaient conduites : l'une, de nature historique et épistémologique, portant sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuels, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, de nature institutionnelle, était consacrée à l'exploration des programmes et des manuels scolaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques. Les principaux enseignements didactiques dégagés de cette étude invitent à privilégier les approches de modélisation in situ, la construction des concepts algébriques qui est en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale et la mobilisation des techniques opératoires.

II. SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES

Il faut souligner que l'ensemble des communications présentées dans le groupe de travail n°3 s'est intéressé, explicitement ou implicitement, au développement de la pensée algébrique sur la base d'approches théoriques et méthodologiques variées. Les analyses ont porté sur les relations entre la pensée algébrique et divers autres types de pensée, tels que la pensée mathématique en général, la pensée arithmétique ou encore algorithmique.

Plusieurs questions de nature épistémologique ont émergé de nos discussions, en particulier autour des différences et des ressemblances entre pensée arithmétique et pensée algébrique, entre pensée algébrique et algorithmique mais aussi entre abstraction et généralisation. Durant les discussions, l'importance de continuer la réflexion épistémologique amorcée a été bien mise en évidence. Ces éléments ont pu être mis en parallèle avec des questions sur l'activité mathématique des élèves et sur le développement de curriculum.

Du point de vue de l'activité de l'élève, la question de l'enseignement précoce de l'algèbre a été posée dans plusieurs communications. Une hypothèse souvent soutenue est que l'apprentissage de l'arithmétique doit être bien entamé avant d'aborder les premiers apprentissages algébriques. Toutefois, les données présentées par Demonty, ainsi que les mouvements « Early Algebra » (voir notamment les travaux de Kaput, Carraher & Blanton, 2008 à ce sujet) remettent en question cette dernière et la recherche permet maintenant de conclure qu'il est possible de favoriser le développement de la pensée algébrique beaucoup plus tôt. En fait, lorsqu'une pensée arithmétique, axée essentiellement sur le sens du nombre, est très avancée, celle-ci pourrait nuire au développement de la pensée algébrique, qui elle

envisage le sens des opérations répétées un nombre infini de fois. Ces réflexions ont amené le groupe à discuter de la différence entre arithmétique et algèbre, débat qu'il serait intéressant de poursuivre dans les prochaines éditions d'EMF.

On ne peut étudier ces enjeux sans à nouveau pousser la réflexion sur le plan épistémologique. Plusieurs questions ont été abordées qui pourront être approfondies dans la suite :

Quels rôles jouent la généralisation et l'abstraction dans la création de nouveaux objets mathématiques ? Quels liens existe-t-il entre les processus d'abstraction et de généralisation ? Le modèle de Dörfler utilisé par Squalli ainsi que l'analyse conceptuelle dans une perspective commognitive développée par Jeannotte offrent une perspective contrastée à ces questions.

Quels sont les éléments épistémologiques et didactiques qui permettent le développement de la pensée algébrique ? Tout d'abord, les chercheurs semblent s'entendre sur l'importance des variables et des opérations dans la pensée algébrique. Ces derniers semblent importants pour la différencier de la pensée arithmétique principalement axée sur les nombres. Ensuite, Larguier et Bronner ont témoigné de l'intérêt des activités de généralisation pour permettre l'entrée dans l'algèbre. Dans la foulée, Radford précise qu'on observe des généralisations en arithmétique. Il y aurait également une pensée arithmétique avancée comme le principe de la « fausse position », mis en évidence par Adihou, que l'on retrouve dans l'activité mathématique des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes algébriques. Enfin, l'importance du développement des symbolisations évoluant en étroite interaction avec les concepts selon une chaîne de signification, souligné par Vlassis, permet de contribuer à l'émergence de nouveaux objets algébriques. De même, Briant montre que l'utilisation d'environnements informatisés impliquant un détour par une pensée algorithmique provoque l'évolution du rapport aux objets algébriques à la suite d'une double transposition du langage utilisé.

Du point de vue du développement de curriculum, se posent alors deux questions au moins. La première concerne le « quand » *débuter un enseignement favorisant le développement de la pensée algébrique*. L'arithmétique pourrait se poser en obstacle à l'algèbre. Toutefois, si on débute l'algèbre plutôt, on pourrait venir bloquer le développement de la pensée arithmétique. La deuxième question renvoie à la réflexion de Kouki, qui sur la base d'une analyse historique et institutionnelle, analyse *la prise en considération par l'institution des éléments du développement de la pensée algébrique dans la rédaction des curricula*. Il s'agit de questions ouvertes qui pourraient être abordées lors des prochains EMF.

Enfin, *la question du rôle de l'enseignant et de la nature de son étayage a été évoquée à plusieurs reprises lors des débats. Doit-il se contenter d'être un guide ? Quels types d'intervention sont-ils porteurs ?* Il semble que selon Anwandter, un enjeu crucial réside dans la compréhension par l'enseignant des raisonnements des élèves mais aussi des ressorts des activités proposées.

Comme constaté lors des discussions, la confrontation des cadres et des analyses a permis de soulever une richesse jusqu'ici absente en permettant d'articuler la dialectique arithmétique/algèbre, de préciser ce qu'on entend par pensée algébrique, arithmétique, par généralisation et abstraction.

Bien qu'une majorité de contributions aient porté sur la pensée algébrique, nous recommandons de maintenir ouverte la thématique de ce groupe de travail à d'autres modes de la pensée mathématique. En effet, cette ouverture apporterait une valeur ajoutée aux discussions, notamment en enrichissant les questions épistémologiques sur la manière de

caractériser un mode de pensée mathématique ; les cadres méthodologiques d'analyse de leur développement, les liens entre ces différents modes de pensée ainsi que l'étude de questions transversales comme le lien entre pensée et raisonnement, le rôle de la symbolisation dans le développement d'un mode de pensée, etc.

En outre, en ouvrant la réflexion sur les pensées mathématiques, on réalise que son étude épistémologique est marquée par le projet didactique qui nous anime. *Comment différents cadres permettent d'éclairer notre compréhension de l'activité mathématique de l'élève ?* Les analyses, parfois complémentaires, parfois semblant contradictoires, ont mené à des questions à explorer : *Comment clarifier notre discours afin de favoriser une meilleure communication entre chercheurs ? Quelles autres pensées mathématiques se retrouvent dans les curricula ? Comment se différencie chacune des pensées mathématiques ?*

Enfin, nous pensons que les questions liées aux organisations mathématiques ainsi que celles liées à la formation des enseignants méritent d'être mieux développées dans les EMF à venir.

REFERENCES

- Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers..
- Kaput J.J., Carraher D., Blanton M. (2008) Skeptic's guide to algebra in the early grades. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. xvii-xxi). New York : National Council of teachers of mathematics.
- Radford L. (2013) Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education* 2(1), 7-44.
- Sfard A. (2008) *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York : Cambridge University Press.

CONTRIBUTIONS AU GT3

Communications orales

- ADIHOU, A. - Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison
- ANWANDTER-CUELLA, N. - Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire : cas de suites non-numériques
- BRIANT, N. - Etude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique
- BRONNER, A. - Développement de la pensée algébrique avant la lettre. Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique
- DEMONTY, I. - Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ?
- JEANNOTTE, D. - Les processus abstraite et généraliser conceptualisés dans une perspective commognitive.
- KOUKI, R. - Développement de la pensée algébrique dans le Curriculum tunisien : analyse épistémologique et institutionnelle
- LARGUIER, M. - Première rencontre avec l'algèbre
- RADFORD, L. - La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation
- SQUALLI, H. - La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels

VLASSIS, J. - Symboliser et conceptualiser, deux facettes indissociables de la pensée mathématique. L'exemple de l'algèbre.

Affiche

DEMONTY, I. - Construire un questionnaire valide centré sur les connaissances des enseignants en algèbre élémentaire : les apports croisés des recherches centrées sur l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre élémentaire.