Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

CONCEPTION ET EXPLOITATION D'UN DIAGNOSTIC EN MATHÉMATIQUES À L'ENTRÉE EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE POUR ORGANISER DES STRATÉGIES DE FORMATION

Julia PILET[*] – Brigitte GRUGEON-ALLYS[**] [1]

Résumé – Dans cette communication, nous présentons notre approche théorique et méthodologique pour concevoir une évaluation diagnostique en mathématiques au service de la formation que nous illustrons dans le domaine de la géométrie. Nous illustrons ensuite les résultats de l'évaluation passée par les étudiants des groupes de formation sur les sites de formation de l'ESPE de l'académie de Créteil (pourcentage de réussite, profils des étudiants sur quatre domaines mathématiques). Nous explicitons nos choix d'enseignement pour faire évoluer le rapport des étudiants aux mathématiques et développer des savoirs mathématiques et didactiques en lien avec leur profession.

Mots-clefs : Diagnostic, Evaluation, formation initiale des professeurs d'école, Régulation et personnalisation des apprentissages, Didactique des mathématiques.

Abstract – In this paper, we present our theoretical and methodological approach to design a diagnostic assessment in mathematics at the service of the training which we illustrate in the field of geometry. Then, we illustrate the results of the assessment passed by students training groups on training sites of the ESPE of Academy of Créteil (success rate, student profiles on four mathematical domains). We explain our choices of education to change the views of students on mathematics and develop mathematical and didactic knowledge related to their profession.

Keywords: Diagnosis, Assessment, Initial training of school teachers, Personalization of learning, Mathematics Education

Cette communication s'inscrit dans l'axe « dispositif de formation » du groupe de travail GT2. Nous y présentons le dispositif ORPPELA conçu dans le cadre d'un dispositif IDEA[2] de l'Université Paris-Est Créteil visant à « **Organiser une Progressivité des Parcours de formation des Etudiants en master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (MEEF) et leur Accompagnement** » en mathématiques. Ce projet s'inscrit dans

[*] Université Paris Est Créteil – France – julia.pilet@u-pec.fr
[**] Université Paris Est Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

[1] Cette recherche est réalisée dans le cadre du projet IDEA *ORPPELA,* à l'ESPE de Créteil – Université Paris Est Créteil, coordonné par B. Grugeon-Allys avec l'équipe des enseignants C. Moussy, M-C. Marillier, B. Galin, F. Brugier, et enseignants chercheurs, J. Pilet et J. Horoks. http://espe.u-pec.fr/l-espe/innovation-pedagogique/projet-orppela-organiser-une-progressivite-des-parcours-de-formation-des-etudiants-en-master-metiers-de-l-education-et-de-la-formation-et-leur-accompagnement-682061.kjsp?RH=1412862302533

[2] Dans le cadre des Initiatives d'Excellence en Formations innovantes (IDEFI) du Programme Investissements d'Avenir, Université Paris-Est met en oeuvre le dispositif IDEA.

Pilet J., Grugeon-Allys B. (2015) Conception et exploitation d'un diagnostic en mathématiques à l'entrée en formation initiale des enseignants du premier degré pour organiser des stratégies de formation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT2, pp. 185-198.

le contexte spécifique de la formation initiale des enseignants du premier degré de l'académie de Créteil en France.

Depuis 2009, la formation initiale des enseignants se déroule dans le cadre d'un master dont la mention est « Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation » (MEEF). Ce master prépare aux métiers de l'éducation et au concours de recrutement des professeurs des écoles. Les étudiants de l'académie de Créteil sont pour la plupart issus de filières non scientifiques et ont souvent un passé douloureux avec les mathématiques. De plus, de nombreux étudiants reprennent des études dans le cadre d'une reconversion professionnelle. La formation a pour enjeu de faire évoluer leur rapport aux mathématiques, de leur permettre de construire les savoirs mathématiques et didactiques nécessaires à la profession mais aussi de leur redonner le goût et l'envie de faire des mathématiques pour qu'ils le transmettent à leurs élèves.

Cette spécificité de l'hétérogénéité importante des étudiants de l'académie de Créteil se destinant aux métiers de l'enseignement nous a conduit à développer un dispositif de formation plus attentif aux parcours antérieurs et à la diversité des profils des étudiants. Ce dispositif vise à concevoir et mettre en place, d'une part, une évaluation diagnostique des connaissances et compétences des étudiants en mathématiques à l'entrée du master MEEF, et, d'autre part, des stratégies de formation adaptées aux acquis et besoins d'apprentissage repérés des étudiants. Un autre enjeu concerne le développement de l'autonomie des étudiants.

Dans cette communication, nous présentons notre approche théorique et méthodologique pour concevoir une évaluation diagnostique en mathématiques au service de la formation. Nous illustrons dans le domaine de la géométrie. Nous présentons ensuite les résultats de l'évaluation passée par les étudiants des groupes de formation sur les sites de formation de l'ESPE de l'académie de Créteil (pourcentage de réussite, profils des étudiants sur quatre domaines mathématiques). Nous terminons par nos choix d'enseignement pour faire évoluer le rapport des étudiants aux mathématiques et développer des savoirs mathématiques et didactiques en lien avec leur future profession.

I. UN REFERENTIEL POUR CONCEVOIR LE TEST ET DECRIRE LE PROFIL DES ETUDIANTS PAR DOMAINE MATHEMATIQUE ETUDIE

1. *Les domaines mathématiques retenus*

Nous avons retenu quatre domaines mathématiques dans le test : celui de la géométrie, celui des nombres et de l'arithmétique en primaire, celui de l'algèbre et celui de la proportionnalité et des fonctions. Ces domaines structurent les programmes mathématiques français et leur maîtrise tant mathématique que didactique est au cœur du développement professionnel des futurs enseignants. Même si le domaine de l'algèbre n'est pas au programme de l'école primaire, nous l'avons conservé dans le test parce qu'un certain nombre de travaux de didactique des mathématiques (Chevallard 1985, 1989 ; Grugeon 1997) soulignent le rôle de l'algèbre pour étudier les nombres, les opérateurs et leurs propriétés. De plus, le domaine des grandeurs et mesure n'est pas traité à part entière dans la version actuelle du test. Plusieurs exercices de géométrie et de proportionnalité y font néanmoins appel.

2. *Cadrage général du référentiel par domaine*

Pour chaque domaine, nous établissons une référence afin de situer les connaissances et compétences des étudiants dans un domaine mathématique donné. Cette démarche s'appuie sur les travaux de Grugeon (1997), Chenevotot, Grugeon et Delozanne (2011), Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin, Delozanne (2012) qui, depuis une vingtaine d'années, développent une évaluation diagnostique, *Pépite*, des connaissances et des compétences en algèbre des élèves de fin de scolarité obligatoire en France pour organiser la régulation des apprentissages. Dans ces travaux, l'évaluation Pépite a une fonction diagnostique et formative, au service des apprentissages. Nous fondons le diagnostic dans une approche épistémologique, didactique et cognitive du savoir et non dans une approche psychométrique. Cette approche permet une analyse de réponses des élèves qui dépasse une analyse en termes de « réponse correcte » ou « incorrecte » et de pourcentage de réussite sur l'ensemble du test. En effet, à partir de travaux de didactique de l'algèbre (Chevallard 1985, 1989), Grugeon a modélisé l'algèbre comme un outil pour résoudre des problèmes mettant en jeu différents traitements algébriques (généralisation, modélisation, preuve), et un ensemble d'objets (expressions algébriques, équations, fonctions, etc.) auxquels sont associés plusieurs représentations sémiotiques (écritures algébriques, programmes de calculs, graphes, etc.). Cette référence permet d'évaluer les différents aspects de l'activité algébrique. Cette approche rejoint le point de vue développé par Vergnaud (1990) à travers les champs de conceptuels :

> « Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens » (p.135).

C'est pourquoi l'évaluation *Pépite* est construite, d'une part, à partir d'un ensemble d'exercices qui recouvrent les types de problèmes du domaine de l'algèbre et, d'autre part, d'une analyse des réponses des élèves en fonction de plusieurs dimensions, définies *a priori*, pour caractériser la nature des procédures mises en œuvre par l'élève. Cette analyse, dite « locale », est suivie d'une analyse « globale et transversale », sur l'ensemble des questions du domaine. Elle consiste à repérer des cohérences de fonctionnement de l'élève, c'est-à-dire des régularités de fonctionnement dans le domaine considéré. Dans le cas d'un fonctionnement erroné, ces cohérences peuvent être associées à des erreurs « récurrentes » ou reproductibles dans un contexte proche. Cette analyse globale est directement liée à la notion de champ conceptuel : « Il est nécessaire, pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances, d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels. Etudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens. » (Vergnaud 1986, p.28).

Grugeon (1997) a modélisé le profil des élèves en algèbre, point d'appui pour faciliter la construction de séquences afin de permettre aux élèves de comprendre les limites de certaines procédures et de reconstruire des connaissances (Pilet 2012). Dans l'évaluation diagnostique à destination des futurs enseignants de primaire, nous reprenons cette approche en modélisant chaque domaine par un champ conceptuel pour établir un référentiel. Cette démarche offre de plus la possibilité de questionner le transfert du modèle du test Pépite à d'autres domaines que celui de l'algèbre et à un niveau scolaire supérieur que celui du collège.

Chaque domaine s'organise donc autour de :

- La résolution des problèmes (aspect outil) qui donnent du sens aux concepts (référent),
- La construction et le traitement des propriétés des concepts mobilisés lors de la résolution (aspect objet – signifié),

- Les liens entre différentes représentations sémiotiques (signifiants) associés à différents registres de représentation sémiotique.

Le référentiel développé consiste à définir trois niveaux de conceptualisation sur chaque dimension. Leur définition s'appuie sur l'étude de l'évolution des conceptions des élèves en lien avec des ruptures d'ordre épistémologique du côté des connaissances et du côté des démarches et des raisonnements au cours de l'apprentissage. Elle s'appuie également sur l'étude des difficultés liées à des décalages de l'activité mathématique attendue lors de la transition entre institutions (école/collège, collège/lycée, lycée/université). Chaque niveau donne des indicateurs pour situer le développement conceptuel d'un étudiant dans un domaine donné. Ces indicateurs traduisent des cohérences de fonctionnement dominantes sur l'ensemble des exercices du domaine. Nous illustrons notre démarche pour le domaine de la géométrie.

3. Le référentiel pour la géométrie

Dans la recherche en didactique de la géométrie, Houdement et Kuzniak (1999, 2006) ont travaillé la question du rapport entre l'espace physique et l'espace géométrique et ont montré que des difficultés d'apprentissage proviennent souvent d'une confusion entre les savoirs issus de l'expérience directe avec le monde réel et les savoirs géométriques. Dans l'enseignement de la géométrie, même si les objets géométriques étudiés sont communs de la maternelle au lycée, le rapport à ces objets évolue et provoque des ruptures de contrats. Dès l'école maternelle, c'est une géométrie de la perception qui est mise en jeu. La validation se fait par ce que « l'on voit ». Puis, à l'école élémentaire, les élèves rencontrent une première rupture avec la géométrie perceptive. La validation ne se fait plus seulement par la perception mais par les instruments (compas, règle, équerre, rapporteur). Houdement et Kuzniak parlent de géométrie naturelle, dans laquelle la validation « s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments » (Houdement & Kuzniak 1999, p.12). C'est ensuite à partir de la classe du collège que les élèves sont amenés à passer d'une vision de la géométrie instrumentale à la géométrie du raisonnement qui sera la base dans les classes de l'enseignement secondaire. Cette géométrie, appelée « géométrie axiomatique naturelle » par Houdement et Kuzniak, est déductive ; elle consiste à démontrer à partir des données de l'énoncé et des propriétés mathématiques. Du point de vue de leurs connaissances mathématiques, les étudiants doivent distinguer géométrie naturelle et géométrie axiomatique naturelle. En particulier, pour l'épreuve du concours, ils devront résoudre un ou des problèmes mettant en jeu un raisonnement déductif. Du point de vue de leurs connaissances didactiques, la formation vise à leur faire comprendre que pour enseigner la géométrie en primaire ils auront à accompagner les élèves à des changements de contrat pour passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. Les principaux types de tâches sont les tâches de reconnaissance, reproduction, construction de figure, description d'une figure ou production d'un programme de construction.

Le référentiel reprend ces distinctions pour définir une échelle de conceptualisation des objets de la géométrie selon trois dominantes :

- Géométrie dominante A : connaissances et compétences liées majoritairement à une géométrie du raisonnement déductif ;

- Géométrie dominante B : connaissances et compétences liées majoritairement à une géométrie instrumentée ou à une géométrie du raisonnement déductif souvent incorrect ;

- Géométrie dominante C : connaissances et compétences liées majoritairement à une géométrie perceptive.

Lorsqu'aucun fonctionnement dominant n'apparaît, nous parlons de niveau instable, noté niveau I, Nous illustrons dans le tableau 1, la description d'une dominante sur chaque composante et renvoyons à l'annexe pour celle des autres niveaux.

Composante d'analyse	**Niveau C**
Résolution de problèmes (reconnaissance, reproduction construction, démonstration)	Capable de reconnaître globalement des données du problème, d'avoir une idée de la démonstration (« je vois que »), mais sans pouvoir l'opérationnaliser dans une démarche instrumentée ou un raisonnement déductif.
Interprétation et traitement de figures	Capable de reconnaître une figure à partir d'une appréhension perceptive ou opératoire à partir de la forme, voire de propriétés globales. Des difficultés peuvent rendre difficile la distinction entre les propriétés spatiales et géométriques d'une figure.
Gestion des représentations sémiotiques	Capable d'avoir une vision globale d'une figure. Des difficultés pour distinguer une figure et ses dessins dans différentes positions, d'articuler différentes représentations sémiotiques (dessins, dessins codés, programme de construction, texte en langue naturelle, etc.)

***Tableau 1** – Référentiel pour le niveau C en géométrie*

L'évaluation diagnostique que nous avons conçue établit sur chaque domaine les traits dominants de conceptualisation de l'étudiant que nous appelons *profil* de l'étudiant.

II. L'EVALUATION DIAGNOSTIQUE

Nous présentons dans ce paragraphe l'évaluation diagnostique à destination des étudiants de première année du master MEEF.

1. La répartition des exercices par domaine

Nous avons constitué l'évaluation d'exercices représentatifs des quatre domaines mathématiques pour déterminer des caractéristiques du développement conceptuel des étudiants dans ces domaines. Le test est prévu pour une durée d'une heure de passation. Comme le montre le tableau 2, il est composé de 29 exercices répartis en une moitié sur le numérique, un cinquième sur la géométrie, autant sur la proportionnalité et sur l'algèbre. Les exercices sont pour la plupart sous forme de QCM ce qui permet un traitement informatique. Certaines sont ouvertes (6/29) : les étudiants doivent soit entrer un nombre soit un raisonnement. Dans ce dernier cas les questions sont codées par un humain et non par une machine.

Domaine	**Nombre d'exercices**
Géométrique	6/29
Numérique	14/29
Proportionnalité et fonction	5/29
Algébrique	4/29

***Tableau 2** – Répartition des exercices du diagnostic par domaine*

2. L'analyse des réponses : du codage des réponses au profil de l'étudiant

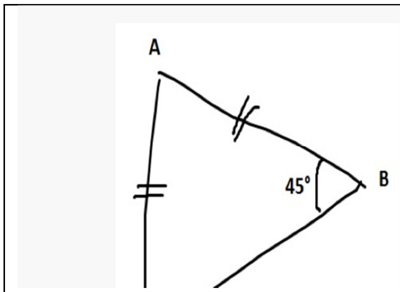
L'évaluation comprend deux étapes pour l'analyse des réponses des étudiants qui correspondent aux analyses locale et globale du test Pépite.

La première analyse est locale. Pour chaque exercice les solutions possibles sont déterminées à partir d'une analyse *a priori* et chacune est associée à une des trois dominantes de conceptualisation du domaine. L'analyse et le codage sont donc réalisés non seulement en termes de réponse correcte ou incorrecte mais également en fonction des démarches, des raisonnements et des représentations mobilisés.

La seconde analyse est transversale pour l'ensemble des questions de chaque domaine. Nous avons conçu un algorithme qui calcule pour chaque domaine le nombre de codage *a*, *b* ou *c* issus de l'analyse locale. Le nombre le plus important permet de positionner l'étudiant par rapport aux dominantes définies en référence. Cette analyse est renvoyée à l'étudiant accompagnée du pourcentage de questions répondues par rapport aux nombres de questions posées.

3. Un exemple d'analyse locale sur une question de géométrie

Nous illustrons ici l'analyse locale d'un problème de géométrie qui consiste à repérer si l'étudiant sait déterminer la nature d'un triangle à partir d'un codage sur un dessin à main levée. L'énoncé de ce problème est présenté en figure 1.



Le triangle ABC est :

- ☐ isocèle
- ☐ équilatéral
- ☐ rectangle

Figure 1 – *Un exemple d'exercice de géométrie dans un problème*

Le triangle ABC est isocèle. Cette propriété est repérable directement à partir de l'interprétation du codage et le dessin vient appuyer cette propriété. Il est également rectangle mais le dessin ne représentant pas cette propriété, seule la démonstration à partir du codage permet de répondre. Le triangle n'est pas équilatéral mais le dessin est trompeur puisqu'il pourrait donner à penser que les trois côtés sont égaux. Nous présentons dans le tableau 3 les réponses anticipées qui découlent de cette analyse.

Réponse	**Niveau de conceptua-lisation**	**Analyse didactique**
Isocèle et rectangle	*a*	Réponse correcte. Appui sur un raisonnement déductif pour calculer la mesure de l'angle A.
Isocèle	*b*	Appui sur le codage mais pas de raisonnement à partir de l'angle pour démontrer que le triangle est rectangle.
Rectangle	*b*	Raisonnement à partir du codage du triangle isocèle et des propriétés sur la somme des angles d'un triangle pour démontrer que le triangle est rectangle. Plusieurs hypothèses pour expliquer que le fait que « isocèle » n'a pas été coché : - l'étudiant considère qu'un triangle ne peut être isocèle et rectangle en même temps ; - l'étudiant considère que la propriété d'être un triangle rectangle l'emporte sur celle d'être isocèle.
Equilatéral	*c*	Géométrie perceptive globale. Pas de raisonnement à partir du codage.

		L'étudiant ne sait pas qu'un triangle équilatéral a tous ses angles de 60°.
Isocèle et équilatéral	*c*	Géométrie perceptive. Utilisation du codage pour l'égalité sur la longueur de deux côtés mais utilisation du perceptif pour le troisième côté. L'étudiant ne sait pas qu'un triangle équilatéral a tous ses angles de 60°.
Rectangle et équilatéral	*c*	Géométrie perceptive et contradiction.

Tableau 3 *– Analyse anticipée et codage sur un exercice de géométrie du test*

Ainsi la méthodologie de conception de l'évaluation diagnostique s'organise selon les étapes suivantes : choix d'exercices qui recouvrent le domaine de la géométrie, établissement d'indicateurs à partir d'une analyse *a priori* des réponses envisageables pour déterminer des profils. Même si le nombre d'exercices du test est assez faible nous considérons toutefois que leur choix et l'analyse des réponses le rendent opératoire pour établir ce que nous appelons les profils « dominants » des étudiants. L'objectif est de permettre ici l'organisation d'une stratégie de formation appuyée sur les besoins d'apprentissage repérés en géométrie, la mise en évidence des changements de contrat en géométrie, les limites des démarches en géométries perceptive et instrumentée pour démontrer des propriétés géométriques.

III. ANALYSE DES RESULTATS ET CONCEPTION DE STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT ADAPTEES

1. Les profils des étudiants pour l'année 2014-2015

A l'entrée 2014, 490 étudiants de l'académie de Créteil ont passé le test dès leur entrée à l'ESPE. Le tableau 4 présente la répartition des différents profils sur les quatre domaines suite à l'analyse de leurs réponses.

Domaines	**Numérique**		**Algèbre**		**Géométrie**		**Proportionnalité**	
%Réponse	96		83		96		97	
%Réussite	59		40		35		46	
	%	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**
Profil A	63%	309	20%	100	7%	36	33%	163
Profil B	0%	0	9%	44	3%	14	1%	4
Profil C	17%	82	57%	277	46%	225	47%	230
Profil I	20%	99	14%	69	44%	215	19%	93

Tableau 4 *– Répartition des profils des 490 étudiants sur quatre domaines*

Ce tableau montre la disparité des connaissances des étudiants en mathématiques mais aussi les dominantes fortes qui ressortent. 17% des étudiants sont en profil C dans le numérique, c'est-à-dire qu'ils ont une connaissance fragile de la numération décimale, des décimaux et des fractions et qu'ils rencontrent des difficultés à utiliser les notions numériques de base dans la résolution de problèmes numériques. Près de la moitié des étudiants sont en profil C en géométrie et en proportionnalité et seuls 20% utilisent l'algèbre dans la résolution de problèmes nécessitant son usage. De plus, des analyses supplémentaires de ces données indiquent que 30% des étudiants ont le profil C dans deux domaines et 10% dans trois domaines. Ces résultats montrent la nécessité de mettre en place une formation qui prenne en compte les besoins d'apprentissage des étudiants dans les différents domaines mathématiques.

Chaque étudiant reçoit des éléments sur son profil dans chaque domaine mathématique. Voici un exemple de profil d'un étudiant en géométrie (tableau 5) :

Géométrie		
Pourcentage de réponses aux questions du domaine	Pourcentage de réponses correctes parmi les questions traitées dans le domaine	Profil du domaine
100%	36%	B
Connaissance fragile des propriétés des figures géométriques, des différents modes de représentation. Distinction entre une figure et ses dessins connue mais peu articulée avec les propriétés. Démonstration de propriétés géométriques ne s'appuyant pas toujours sur un raisonnement déductif.		

***Tableau 5** –Profil d'un étudiant en géométrie*

2. *Nos principes de formation*

Notre stratégie de formation consiste à proposer des situations d'introduction clefs, avec des variables didactiques bien choisies afin de permettre aux étudiants des profils B et C de comprendre les limites de leurs démarches et raisonnements en fonction du problème et du contexte, de les remettre en question. La formation vise aussi à motiver la reprise et la construction de notions mathématiques, les modes de formulation, validation et de justification dans une vision globale d'une culture mathématique et de préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire de proposer des situations pour faire remettre en question des conceptions erronées ou rapports personnels inadaptés des futurs enseignants à des objets de savoir pour donner des raisons d'être à certaines notions et les faire fonctionner en tant qu'*outil* avant de les institutionnaliser comme *objet* (Douady 1987). Ces stratégies s'inscrivent dans les travaux de Charnay (1995) sur la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages. De plus, pour tous les étudiants, en particulier les étudiants de niveau A, ces situations doivent les conduire à une première réflexion didactique sur les notions étudiées et à un premier développement de compétences professionnelles.

La gestion en travaux dirigés de ces séances est essentielle pour assurer la prise en charge des connaissances hétérogènes des étudiants en référence aux objectifs visés. La mise en œuvre de ces situations vise à amener les étudiants à chercher des solutions puis à en débattre. Une fois qu'ils ont trouvé une solution, nous leur proposons de la présenter en classe entière et d'argumenter leur point de vue. Ces temps de mise en commun avec confrontation des procédures et des raisonnements mis en œuvre par les étudiants, validation et hiérarchisation des procédures, sont l'occasion d'interroger les connaissances et compétences erronées. Ils sont suivis d'une institutionnalisation des savoirs visés. Ce retour sur leurs productions vise également à permettre à des étudiants, seuls, parfois perdus en mathématiques et peu enclins à s'engager dans la résolution de problèmes, à reprendre l'envie et le goût du raisonnement en mathématiques.

Ainsi les profils des étudiants sont pris en compte en amont, dès la conception des séquences, à la fois en ce qui concerne la nature des situations proposées que leur gestion. Nous n'avons pas fait le choix d'une formation qui proposerait des exercices différents en fonction des profils parce que nous pensons que tous les étudiants tirent parti des situations clefs puisqu'elles permettent le plus souvent d'aborder des raisons d'être des notions mathématiques comme des notions didactiques. Toutefois, les feuilles d'exercices proposées en travaux dirigés contiennent plus d'exercices que ce qui est traité en présentiel, ce qui permet aux étudiants qui auraient terminé avant les autres, d'avancer à leur rythme, mais aussi de donner des exercices plus ciblés aux étudiants de profil C. Notre stratégie de formation est également liée aux modalités de formation que nous mettons en place.

3. *Nos modalités de formation*

La stratégie de formation s’appuie sur le choix de situations ciblées, comme nous venons de le présenter, ainsi que sur des modalités spécifiques de formation que nous expliquons aux étudiants dès la mise en place du contrat de formation. Ces modalités utilisent la plateforme EPREL de l’université Paris-Est-Créteil à travers laquelle nous ouvrons des espaces en ligne, vers des documents et communiquons avec nos étudiants.

Chaque semestre est découpé en plusieurs séquences concernant les thèmes mathématiques des programmes (nombres et numération décimale, géométrie, grandeurs, etc.). Pour chaque séquence, la formation s’organise selon le même modèle.

Des exercices préparatoires avec correction ainsi qu’une synthèse des savoirs et savoir-faire indispensables à la suite de la formation sont proposés aux étudiants avant la séquence en présentiel. Les étudiants (dominante C) peuvent ainsi travailler les prérequis. Ils ne sont pas abordés en travail dirigé sauf si les étudiants demandent d’y revenir.

Une feuille d’exercices mathématiques et didactiques est distribuée en TD. Elle contient plusieurs situations clefs pour remettre en question des rapports inadaptés aux savoirs mathématiques. Elle contient également des exercices d’entrainement de difficulté croissante. Toutes les corrections des exercices sont déposées sur EPREL à la fin du TD ainsi qu’un document de cours reprenant les différentes notions mathématiques et didactiques[3] qui sert de point d’appui à l’institutionnalisation des savoirs. Les feuilles d’exercices sont régulièrement complétées de devoirs à faire à la maison. Nous accompagnons les documents déposés sur EPREL d’un forum afin que les étudiants puissent poser des questions aux formateurs. Cela permet de réguler l’enseignement à distance et si besoin de revenir sur certains aspects des notions abordées en TD.

Nous organisons de plus des séances dédoublées avec deux formateurs. Ces séances sont l’occasion de répondre plus spécifiquement aux besoins des étudiants, de les accompagner davantage et de répondre à leur question individuellement. Nous organisons également des entretiens avec les étudiants qui le souhaitent afin de répondre à leurs questions (par exemple sur une de leur production) et de les aider à organiser leur travail personnel.

4. *Un exemple de stratégie de formation en géométrie*

La séquence de géométrie plane[4] s’organise en trois séances de trois heures. Avant la séquence, les étudiants ont pu travailler des notions et constructions de base, comme savoir tracer une perpendiculaire ou une parallèle à une droite passant par un point avec l’équerre, ou encore reconnaître des droites perpendiculaires ou parallèles dans des positions non prototypiques.

Comme près de la moitié des étudiants (cf. tableau 4) travaille en géométrie perceptive ou instrumentée la première séance vise à montrer les limites de ces géométries pour reproduire puis démontrer des propriétés. Il s’agit d’abord d’une tâche de reconnaissance de figures puis d’une tâche de reproduction de figure dont l’énoncé est présenté en figure 2 qui nécessite de retrouver le centre d’un cercle et donc d’utiliser des propriétés géométriques (caractérisation d’un cercle et point de concours des médiatrices d’un triangle).

[3] Ces documents peuvent être proposés préalablement au TD en fonction des contraintes de temps.
[4] Nous n’abordons pas ici les théorèmes de Pythagore, de Thalès.

Ex 1.2 : Reproduction de figure

L'objectif de cette activité est de reproduire la figure ci-dessous sur une feuille de papier blanc, en respectant les consignes suivantes :
- les seuls instruments disponibles sont la règle non graduée et le compas,
- le papier calque n'est pas autorisé,
- en revanche, il est possible d'écrire et de rajouter des tracés et des traits de construction sur le dessin à reproduire.

Modalités de travail :
- Vous effectuez individuellement la recherche.
- Vous effectuez la vérification lorsque vous serez sûr de vous. Pour valider votre reproduction, vous superposez la figure obtenue à l'original : elles doivent se correspondre complètement.

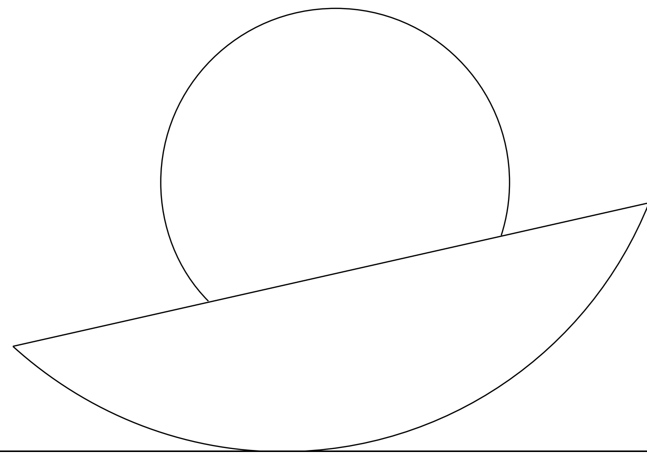


Figure 2 – *Reproduction d'une figure*

Cette situation a donc un double objectif. D'une part, amener les étudiants qui privilégient le perceptif et la mesure à prendre conscience des limites de ce rapport aux objets de la géométrie, les amener à distinguer les propriétés spatiales des propriétés géométriques et faire émerger les procédés de construction. D'autre part, cette situation est une première rencontre avec des connaissances didactiques sur l'enseignement de la géométrie à l'école en cycle 3 et au collège. Elle est l'occasion d'amener les étudiants à travailler l'implicite des dessins, à comprendre la nécessité de prendre des informations supplémentaires (ajout de tracé, de points), de coder les figures, de distinguer les propriétés spatiales des propriétés géométriques, de préciser le vocabulaire géométrique, de percevoir l'insuffisance de l'essai pour reproduire et la nécessité de s'appuyer sur des propriétés géométriques. Cette première séance de trois heures est suivie d'exercices d'entrainement mettant principalement en jeu la construction de figures en lien avec leur caractérisation géométrique.

Les séances suivantes visent à conduire les étudiants à distinguer différentes descriptions d'une figure (texte ou programme de construction) et leurs conséquences sur sa construction, à distinguer conjecture et démonstration. La situation d'introduction de la séance 2 porte sur la description d'une figure géométrique et sur sa construction à partir d'une description. La consigne est la suivante : donnez une suite d'instructions pour qu'une personne qui n'a pas vu cette figure puisse refaire une figure analogue. Les instruments autorisés sont le compas et la règle non graduée.

La situation de type émetteur-récepteur amène les étudiants à analyser une figure pour réaliser une prise d'informations efficace pour sa construction en distinguant les propriétés spatiales des propriétés géométriques et à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour une description opératoire (programme de construction). Dans la troisième séance nous amenons les étudiants à distinguer ce qui relève d'une conjecture ou d'une démonstration, à remettre en cause des propriétés alors qu'à l'évidence elles semblent vraies. Il s'agit d'amener les étudiants à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes d'un raisonnement déductif en utilisant les propriétés des figures géométriques en jeu dans des exercices de difficulté progressive (Duval 1993, 2000).

IV. CONCLUSION

L’évaluation diagnostique que nous avons construite pour repérer les connaissances apprises des étudiants à l’entrée en formation initiale des enseignants de primaire est fondée sur une analyse épistémologique, didactique et cognitive sur chaque domaine mathématique considéré. Cette approche permet de définir un référentiel des connaissances et compétences pour chaque domaine mathématique et donc de situer les connaissances et compétences des étudiants par rapport à ce référentiel. Au delà d’une évaluation en termes échec / réussite, cette évaluation de type formatif permet de déterminer les besoins d’apprentissage des étudiants et d’adapter des stratégies de formation, en amont de la formation. Le choix des exercices diagnostiques et l’analyse anticipée des réponses possibles sont fondés par ce référentiel.

Les résultats d’une cohorte d’étudiants de l’académie de Créteil à ce test mettent bien en évidence l’hétérogénéité des profils des étudiants dans les quatre domaines mathématiques. Nous avons explicité nos stratégies de formation pour permettre de gérer cette hétérogénéité et permettre aux étudiants de faire évoluer leur rapport aux mathématiques et de favoriser leur développement professionnel.

Suite à un questionnaire passé auprès des étudiants, 76 étudiants ont répondu (voir annexe 2). 70% des étudiants qualifient le test de très utile ou d’indispensable pour situer leurs connaissances et leurs compétences par rapport à celles attendues et pour mieux cibler leurs besoins d’apprentissage. Les situations et exercices proposés lors des TD semblent globalement adaptés à 80% dans l’ensemble des domaines traités. En revanche, seuls 58% jugent ces TD utiles ou très utiles pour revenir sur leurs erreurs et 64% utiles ou très utiles pour comparer des procédures et des raisonnements.

Les formateurs en particulier les nouveaux formateurs pointent le fort potentiel de l’approche épistémologique, didactique de l’évaluation pour développer ces stratégies de formation. Voici deux bilans de nouveaux formateurs, du point de vue des étudiants :

> « Les avis des étudiants sont très bons. Ils ont redécouvert le plaisir du travail, se sont accrochés malgré beaucoup de difficultés en maths souvent. (…) Il y a eu beaucoup de remise en confiance sur leurs propres qualités en maths. Ils constatent beaucoup de progrès sur l'organisation de la pensée et la compréhension du "faire des maths". »

> « Mise ou remise en confiance d'un certain nombre d'entre eux : les activités proposées, les discussions sur les différentes procédures mises en œuvre ont permis de faire de la « didactique active », de gérer l'hétérogénéité et de montrer de façon pratique ce qui pouvait être fait en classe (en transposant pour des enfants bien sûr). Plusieurs ont témoigné à plusieurs reprises que signifie «faire des mathématiques » n'est pas qu'un apprentissage de règles qui n'ont qu'une fonction dans une logique interne des mathématiques totalement mystérieuses, mais que cela a un sens et que l'on peut y prendre un peu goût. »

Nos perspectives concernent maintenant le suivi des étudiants et l’analyse de l’apport effectif de ces stratégies de formation dans leur évolution du rapport à la géométrie et leur développement professionnel à court terme et éventuellement à long terme.

REFERENCES

Charnay R. (1995) De la diversité. Dans R. Charnay et al. (Eds.), *Chacun, tous... Différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages* (p. 9-29). Lyon : I.N.R.P.

Chevallard Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x* n°5, 51-94.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation (827842). Dakar, Sénégal, du 5 au 10 avril 2009.*

Douady R. (1987) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-32.

Duval R., (1993) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive, *Petit x,* n° 31, 37-61.

Duval R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2).

Grugeon B., (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol.17.2, pp. 167-210, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement C., Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-195.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics*, 40.3, 283-312.

Pilet J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris, 2012, 871p.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/1.2, 133-170, Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. (1986) Psychologie du développement cognitive et Didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Petit x*, 38, 21-40.

ANNEXE1 : Référentiel pour les niveaux A et B en géométrie

Composante d'analyse	**Niveau A**
Résolution de problèmes (reconnaissance, reproduction construction, démonstration)	Capable de mobiliser un raisonnement déductif s'appuyant sur une reconnaissance des données du problème, une analyse des figures géométriques en termes de propriétés à mobiliser pour démontrer les propriétés géométriques visées.
Interprétation et traitement de figures	Capable de distinguer ce qui relève du nécessaire et du suffisant pour caractériser une figure géométrique. Capable d'interpréter les figures géométriques à partir d'une appréhension séquentielle et discursive pour déterminer les propriétés des figures en jeu et les structurer pour organiser une démonstration.
Gestion des représentations sémiotiques	Capable de distinguer une figure et ses dessins dans différentes positions, d'articuler différentes représentations sémiotiques (figurale, langue naturelle, programme de construction, etc.)

Composante d'analyse	**Niveau B**
Résolution de problèmes (reconnaissance, reproduction construction, démonstration)	Capable de mobiliser une démarche s'appuyant sur une reconnaissance des données du problème pour conjecturer les propriétés, mais privilégiant des démarches instrumentales basées sur le traçage de figure à l'aide d'instruments, la mesure[5].
Interprétation et traitement de figures	Capable de distinguer ce qui relève du nécessaire mais pas forcément du suffisant pour caractériser une figure géométrique. Capable d'interpréter les figures géométriques à partir d'une appréhension séquentielle pour déterminer les sous figures en jeu et organiser une construction de la figure à partir des propriétés de la figure[6]. Des travaux sur les limites d'une telle démarche puis sur une appréhension discursive des figures doivent être développés.
Gestion des représentations sémiotiques	Capable de distinguer une figure et ses dessins dans différentes positions, d'articuler différentes représentations sémiotiques figurales sur un graphique à l'aide d'instruments mais de façon peu reliée à la formulation langagière des propriétés des figures et des démonstrations.

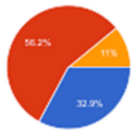
[5] Des exercices montrant les limites d'une démarche instrumentale devront être proposés

[6] Des exercices sur les limites d'une telle démarche puis sur une appréhension discursive des figures doivent être développés.

ANNEXE 2 : Résultats du questionnaire rempli par les étudiants en avril 2015

Evaluation du dispositif: Questionnaires : 73 réponses

Le résultat du test correspondait-il au niveau que vous pensiez avoir?

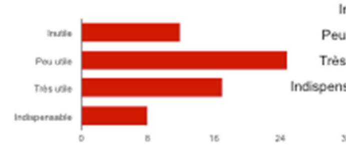


Oui tout à fait	24	32.9 %
Oui pour certains domaines	41	56.2 %
Non	8	11 %

Pour situer vos connaissances et compétences par rapport à celles attendues [Comment qualifiez-vous l'utilité de ce test ?]

Inutile	4	5.5 %
Peu utile	18	24.7 %
Très utile	42	57.5 %
Indispensable	9	12.3 %

Pour mieux comprendre vos erreurs [Comment qualifiez-vous l'utilité de ce test ?]



Inutile	12	16.4 %
Peu utile	36	49.3 %
Très utile	17	23.3 %
Indispensable	8	11 %

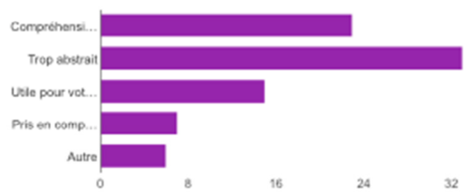
Pour mieux cibler vos besoins d'apprentissage [Comment qualifiez-vous l'utilité de ce test ?]

Inutile	6	8.2 %
Peu utile	16	21.9 %
Très utile	38	52.1 %
Indispensable	13	17.8 %

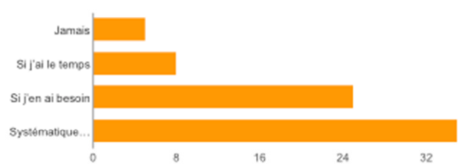
Pour organiser votre travail personnel [Comment qualifiez-vous l'utilité de ce test ?]

Inutile	14	19.2 %
Peu utile	34	46.6 %
Très utile	18	24.7 %
Indispensable	7	9.6 %

Vous avez reçu un bilan par domaine mathématique suite à la passation du test. Ce bilan vous a-t-il semblé?



Cours sur les notions de base [Nous avons mis en place une organisation spécifique des TD. Comment l'avez-vous pris en compte ?]



Les exercices pendant les TD : globalement adaptés

Numération

Pas adapté	2	2.7 %
Peu adapté	16	21.9 %
Adapté	37	50.7 %
Très adapté	18	24.7 %

Grandeurs

Pas adapté	1	1.4 %
Peu adapté	11	15.1 %
Adapté	42	57.5 %
Très adapté	19	26 %

Géométrie

Pas adapté	1	1.4 %
Peu adapté	14	19.2 %
Adapté	38	52.1 %
Très adapté	20	27.4 %

Opérations

Pas adapté	1	1.4 %
Peu adapté	14	19.2 %
Adapté	40	54.8 %
Très adapté	18	24.7 %

Fonction

Pas adapté	4	5.5 %
Peu adapté	17	23.3 %
Adapté	34	46.6 %
Très adapté	18	24.7 %

Géométrie 2

Pas adapté	2	2.7 %
Peu adapté	10	13.7 %
Adapté	40	54.8 %
Très adapté	21	28.8 %

Nombres

Pas adapté	3	4.1 %
Peu adapté	14	19.2 %
Adapté	38	52.1 %
Très adapté	18	24.7 %

Géométrie esp

Pas adapté	4	5.5 %
Peu adapté	13	17.8 %
Adapté	39	53.4 %
Très adapté	17	23.3 %