Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DE LA TRANSPOSITION DES SAVOIRS MATHEMATIQUES A LEUR DE-TRANSPOSITION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Emmanuel HATEGEKIMANA LUANDA*

Résumé - La transposition didactique qui permet d'extraire les savoirs scolaires des savoirs savants est un processus de transformation qui adapte et exprime ce savoir au niveau des apprenants par des situations didactiques. Ces savoirs exprimés en contextes produisent de manière intuitive des connaissances subjectives et diffèrent des savoirs savants de départ. Notre analyse montre que le fonctionnement et l'évolution de la pensée mathématique devait s'appliquer au cursus de formation scolaire pour faire évoluer le cognitif des élèves jusqu'à l'acquisition des connaissances se rapprochant au savoir savant. Ce processus, appelé dé-transposition, peut être vu comme une opération inverse à la transposition didactique.
Mots-clefs: Transposition didactique, contextualisation, formalisation des savoirs, situations didactiques, connaissances des élèves.
Abstract - The didactic transposition that helps to extract the school knowledge to the scientific one is a process of transformation that adapts and expresses this knowledge at the level of the learners by didactic situation. This knowledge in context produce in a intuitive manner of subjective knowledge that differ from the scientific knowledge. Our analysis prouves that the function and the asserment of mathemematic thought should be applied in the course of school function to make evolve the cognitive of pupils to the acquisition of knowledge close to the scientific knowledge. This process calls upon transposition may be seen as an inverse operation to a didactic transposition.
Keywords: Didactic transposition, contextualisation, knowledge formalisation, didactic situation, learners' knowledge.

I. INTRODUCTION

La communication des savoirs mathématiques en théorie des situations exige que les savoirs savants soient transformés en savoirs didactiques enseignables par un processus de transposition didactique. Ils doivent être contextualisés pour devenir des savoirs didactiques pouvant générer des connaissances que les élèves pourront se construire eux-mêmes en agissant sur le milieu didactique dûment construit au préalable par le professeur. Cette exigence communicationnelle permet donc, suivant le lieu, la région où vit l'élève et les cultures de diversifier les cognitifs des élèves car alors les objets du savoir se transmettent intuitivement en se fondant sur des jeux ou des problèmes réels relatifs à la région vitale des élèves qui doivent manipuler et agir sur les objets qui leur sont familiers. Cet état de chose conduit à une diversification des savoirs scolaires selon les mœurs et les coutumes de chaque société, savoirs pouvant être qualifiés de culturels car contextualisés et pouvant différer les uns des autres.

* Université de Goma – République Démocratique du Congo – hategekimanaemmanuel68@yahoo.fr

Hategekimana Luanda E. (2015) De la transposition des savoirs mathématiques à leur dé-transposition dans l'enseignement secondaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 119-128.

Le fonctionnement des connaissances dans le processus de formation au primaire et au secondaire permet cependant de passer de ces connaissances intuitives, qui sont le cognitif généré par le savoir-en-acte suivant une transformation évolutive aux connaissances relatives au savoir pur, savoir abstrait de la communauté scientifique. Ce passage se fait par une évolution des rapports aux objets de savoir dans le processus éducatif en spirale. C'est donc une forme de décontextualisation mieux encore de dé-transposition successive s'opérerant dans le processus de formation scolaire et que certains appellent ''objectivation''. La décontextualisation des connaissances intuitives des élèves doit alors être réalisée en un fonctionnement évolutif des connaissances de sorte que le cognitif puisse se développer et passer de l'état ''contextualisé'' à l'état ''universel'' comme se présentent les théories mathématiques achevées, état que Y. Chevallard qualifie de cognitif pur. (Brun J. & al., p.34). Rouchier e(1991), cité par Brun, parle d'une transformation des connaissances à partir du cognitif primaire, connaissances qui apparaissent comme produit des situations a-didactique et qui doivent être transformées pour se rattacher à un domaine plus savant où la connaissance n'est pas dans l'action et ainsi arriver à un cognitif plus ou moins pur.

Aussi, l'histoire des mathématiques montre que les savoirs mathématiques se sont construits au début à partir d'observations ou manipulations de la réalité concrète répondant aux questions posées par les réalités vitales. Progressivement, ils se sont formalisés au fur des âges pour se constituer en théorie axiomatiques, toujours par l'évolution des rapports individuels aux savoirs en question. Le fonctionnement des connaissances mathématiques montre ainsi que les cognitifs des mathématiciens ont évolués par étapes pour donner des savoirs savants que nous utilisons actuellement. Ce fonctionnement évolutif des savoirs historiques peut-il être assimilable au développement des connaissances dans le cursus de formation des élèves dans notre système d'enseignement dit ''à spirale'', après leur contextualisation ?

Considérons le processus de fonctionnement des certains savoirs scolaires décrit par A. Mercier, qu'il appelle ''objectivation des connaissances en acte'' tel que l'explique J. Brun :

> Le rôle de transformer les connaissances en acte en objets de connaissances ou savoirs est dévolu à un hypothétique processus d'abstraction, à la manière de Dienes : de la manipulation concrète, on passe directement à la présentation des actions, ce qui laisse supposer que le relais entre connaissances objectivées va de soi, que leur jonction est immédiate et que les connaissances en acte se transforment comme naturellement en savoirs. Ces connaissances en actes structurent les savoirs enseignés … Si les connaissances implicites structurent les savoirs, la question de relais des unes aux autres, reste posée. C'est le problème de l'objectivation des connaissances en acte. (p.34)

Ces savoirs obtenus par des connaissances en actes sont entachés de subjectivité car exprimés en termes de situations d'apprentissage. Puisque les savoirs enseignés diffèrent des savoirs savants auxquels ils sont déduits, nous nous tournons au processus de l'objectivation des savoirs intuitifs, de transformation du cognitif primaire caractérisant les savoirs en actes en savoirs savants en nous basant sur des cas précis de l'enseignement des nombres et de la géométrie au niveau élémentaire et secondaire en RD Congo pour analyser comment évoluent les savoirs en acte durant la formation de base à travers les contenus d'apprentissage dans le système d'enseignement à ''spirale''. Une progression "en spirale" permet à l'élève de revenir plusieurs fois sur la même notion au cours de sa formation, lui laissant ainsi le temps de la maturation, de l'assimilation et de l'appropriation… ». (Inspection des mathématiques des sciences physiques et chimie, p.2). Cela suppose ainsi une évolution au cours de la formation pour assurer la maturation des rapports au savoir en étude, en plusieurs étapes.

Puisqu'il s'agit de l'objectivation des connaissances, nous nous sommes tournés vers la théorie logique de LADRIERE J. pour l'évolution de la pensée mathématique en partant des savoirs intuitifs pour arriver aux savoirs purs. Cette dite théorie distingue quatre phases de l'évolution de l'axiomatisation des savoirs mathématiques à partir des savoirs intuitifs jusqu'aux savoirs formalisés. Nous avons ainsi proposé, en comparaison avec l'objectivation dans l'évolution des savoirs-en-actes, les phases d'un processus que nous nommerons « dé-contextualisation ou dé-transposition didactique des savoirs mathématiques scolaires » pouvant produire au bout de compte des savoirs savants, savoirs objectifs. Ces phases correspondent même à l'évolution historique des savoirs mathématiques de base.

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, le fonctionnement de cette dé-contextualisation permet de dé-culturaliser et d'universaliser le contenus mathématiques scolaires par un enseignement hiérarchisé des savoirs scolaires par les niveaux d'abstractions à travers la formation en spirale. Ce travail d'analyse théorique constitue le préliminaire du fonctionnement évolutive du cognitif des élèves de l'école maternel à l'université et notamment au secondaire en suivant cas par cas des notions précises afin d'en dégager les failles des ruptures qui ne sont jamais relancés.

II. LA THEORIE DES SITUATIONS ET LES CULTURES

Une situation étant l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu, elle est donc sujette à la culture de l'enseignant et même de l'élève. Cela puisque les situations didactiques créent des conditions qui favorisent l'apprentissage, situations comprises comme l'environnement de l'élève mis en œuvre et manipulé par l'enseignant comme un outil. Aussi, les conditions d'une des utilisations particulières d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation » et puisque ces conditions dépendent de l'environnement de l'élève et plus souvent aussi du professeur, elles dépendent des cultures. Donc les situations didactiques servant à l'enseignement des mathématiques peuvent différer d'un contexte à un autre, d'une culture à une autre et peuvent donner lieu à une diversité des connaissances scolaires dans l'enseignement de base.

Par ailleurs, une situation d'usage en classe se définit comme un jeu hypothétique qui explicite un système minimal de conditions nécessaires dans lesquelles un savoir mathématique peut se manifester par les décisions aux effets observables d'un actant sur un milieu. Ces conditions se définissent sur base de la culture du contexte dans lequel est située l'école et ces jeux qui sont une manifestation des cultures caractérisent les milieux susceptibles de constituer une diversité des sources d'apprentissages des savoirs mathématiques. Cette diversité peut influer sur le sens et l'entendement des concepts qu'apprennent les élèves, ce qui fait dire à Guy Brousseau que :

> La définition des connaissances, par leur fonction dans une situation, entérine le fait que pour une même notion mathématique, chaque actant (société, professeur, élève) développe des connaissances a priori différentes suivant les conditions dans lesquelles il les utilise, les crée ou les apprend. Valides ou non d'un point de vue académique, elles sont d'une certaine façon ainsi légitimées, reconnues. (p.17)

Les situations d'enseignement des mathématiques ne peuvent être puisées que dans l'environnement social des élèves pour leur permettre de réaliser des accommodations nécessaires pour la construction de leur propre connaissance à partir de leur sens et de leur signification contextuelle. Elles sont donc intuitives et il y a nécessité d'un processus de décontextualisation par une purification successive de l'intuition ou de la subjectivité dans ces savoirs enseigné.

> Le processus d'enseignement part des savoirs à enseigner, puis il cherche à atteindre (induire) la connaissance au moyen des transformations des situations relatives à ces savoirs et se conclut par le retour à ces savoirs de départ. (Brun & al., p.303)

On voit donc qu'il y a un autre processus de transformation des connaissances dans l'enseignement, le retour aux savoirs de départ qui est une transformation évolutive se faisant grâce à une transformation situationnelle dont le but est d'atteindre le savoir de départ, savoir savant du patrimoine de la communauté scientifique. C'est donc une forme de dé-transposition qui consiste à faire évoluer le rapport avec ce savoir enseigné au départ pour que l'élève puisse acquérir le savoir savant, dé-transposition qui peut s'entendre comme une déculturation des savoirs culturels scolaires.

III. PROCESSUS DE LA DECONTEXTUALISATION DES CONNAISSANCES DANS L'ENSEIGNEMENT

Le problème de la décontextualisation du cognitif déduit des savoirs-en-actions dans le cursus d'enseignement des savoirs mathématiques a été abordé par quelques auteurs sous plusieurs aspects que nous voudrions succinctement passer en revue et le comparer au développement de la pensée mathématique pour étayer nos propos généralisant.

La question du changement de statut des connaissances dans les processus cognitif à l'œuvre sur les situations, c'est-à-dire le relai qui se forme entre les organisations cognitives et les savoirs à apprendre en situation didactique a été abordé par A. Rouchier (1997), quand il a invoqué le concept de ''*cognitif primaire*'' qui doit être transformé pour se rattacher à un domaine plus savant où la connaissance n'est plus dans l'action et Y. Chevallard (1992) l'affirme lorsqu'il distingue ''*le cognitif pur*'' qui relève du rapport personnel de l'individu au savoir et les transformations de ces rapports personnels qu'il conçoit en ces termes :

> Mais on doit alors tenir compte d'une réalité incontournable dans nos sociétés : le cognitif pur n'existe pas, ou presque pas. Les changements dans les rapports personnels y sont très fréquemment liés à une intention institutionnelle que changent ces rapports ; ils sont institutionnellement, c'est-à-dire anthropologiquement corrélés avec l'apparition d'intentions didactiques. (Brun & al., p. 34)

Le rapport au savoir en action conduit d'abord à des connaissances dites primaires, que l'on acquiert par le premier contact de l'individu apprenant, au savoir contextualisé est entaché de plusieurs irrégularités qui l'écartent de la vraie connaissance savante par l'effet de la transposition. Donc le premier rapport de l'individu aux objets d'apprentissages doit subir des transformations dans le cursus d'apprentissage afin d'évoluer jusqu'à se rapprocher du rapport plus ou moins clair et juste qu'on pourrait qualifier de connaissances purs se rattachant aux savoirs purs. Cette transformation de la connaissance fait évoluer l'individu qui apprend dès le début de sa formation scolaire jusqu'à sa fin est la dé-transposition. Par cette transformation, les savoirs-en-actes sont décontextualisés jusqu'à se rattacher aux savoirs savant donnant à l'apprenant des connaissances objectives. Aussi, ce savoir est transformé par le changement d'intentions institutionnelles qui changent les rapports aux savoirs présentés en des contextes différents car lorsque l'apprenant passe d'une institution à une autre, son contexte cognitif change de façon évolutive.

Selon G. Vergnaud, dans ses aspects pratiques et théoriques, ce développement évolutif du cognitif s'est observé aussi dans la formation des savoirs scientifiques et doit s'observer aussi dans l'enseignement actuel, mais cela ne se fait pas actuellement et la tendance est d'enseigner des manières à faire des algorithmes (Op. cité, p.52). Les connaissances de l'apprenant devait évoluer avec les objets du savoir à enseigner car l'institutionnalisation doit marquer le terme du processus d'objectivation à la fin du parcourt continu de formation où s'enchaineraient et se convertiraient harmonieusement le rapport de savoir et le rapport institutionnel. (Brun & al., pp. 41-42). C'est donc le temps didactique qui organise de façon cumulative, linéaire et harmonieuse, dans le processus de formation en spirale, la succession et l'évolution des objets de savoir. Cette évolution se caractérise ainsi par des ruptures et des filiations d'objets d'apprentissage, des conversions réciproques entre connaissances spontanées venant de l'intuition par rapport à l'appréhension des connaissances, et les différentes organisations personnelles des connaissances suivant les différents niveaux institutionnels. Au sujet des savoirs-en-actes évoluant suivant les niveaux pour générer à la fin du cursus, des savoirs savants par leur hiérarchisation dans l'abstraction, Guy Brousseau dit que :

> La production et l'enseignement des connaissances mathématiques demandent un effort de transformation de ces connaissances en savoir, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui tendent à effacer les situations historiques (les jeux) qui ont presidé à leur apparition. (…) Le champ des problèmes relatifs à une connaissance ne cesse à son tour de se transformer au fur et à mesure de l'évolution de la théorie. (Brousseau, p.94)

On voit ainsi cette nécessité de faire évoluer les connaissances scolaires pour éliminer progressivement tout recours à la réalité concrète et aux jeux et pour qu'enfin de compte les élèves puissent les acquérir comme connaissances se rattachant aux savoirs savants de la communauté scientifique, ce que A. Antibi et G. Brousseau (2000) appellent la dé-transposition des connaissances scolaires.

La notion de système formel correspondant en logique au perfectionnement de la méthode axiomatique et représentant le degré suprême d'abstraction peut s'appliquer ici à travers des contenus hiérarchisés suivant les niveaux d'études et donc d'abstractions dans la formation prôné par le système d'enseignement à spirale. En effet, lorsque les intentions institutionnelles changent et évoluent, les contenus d'enseignement changent aussi parallèlement et évoluent suivant le schéma classique de l'évolution de la pensée mathématique et en même temps le sens de notions apprises évolue aussi. R. Douady dit que savoir des mathématiques, c'est avoir fonctionnellement ces savoirs comme outil, pour s'en servir. Ces savoirs, pour les acquérir doivent évoluer dans un contexte qui fasse évoluer le sens, et étant alors décontextualisé, ils doivent être recontextualisés pour être enseignés. (Douady, p.2). Les élèves qui les apprennent pour la première fois doivent agir sur le milieu didactique relatif au contexte, donc ces savoirs sont appris intuitivement.

L'intuition désigne toute forme de connaissance directe et sans aucune médiation, qu'elle soit d'ordre temporel ou logique, entre le sujet connaissant et l'objet connu : l'objet n'est pas appréhendé successivement mais donné comme une totalité présente à l'esprit, il n'est pas connu discursivement selon un rapport de principe à conséquence. (Baraquin & al. 2005, p.192). Lorsqu'un individu fait connaissance d'un savoir qu'il appréhende pour la toute première fois et apprend des savoirs-en-actes en agissant sur un milieu construit à cet effet. Des connaissances qu'il acquiert à ce niveau sont primaires, subjectives et intuitives.

André Revuz parle de l'importance de l'intuition dans l'éducation mathématique mais regrette que l'intuition avec laquelle le mathématicien appréhende les réalités est écartée. Il le précise enfin en ces termes :

> J'ai insisté sur le fait que dans le travail du mathématicien la rigueur et l'intuition collaboraient constamment et qu'une séparation stricte de leur domaines d'activité ne correspondait pas à la réalité. Or quand on observe le déroulement des classes de mathématiques, on a l'impression que l'exigence de rigueur y est toujours présente, mais qu'à priori on ne compte pas sur l'intuition des élèves et que l'on considère comme exceptionnel ceux qui en montrent. L'éducation de la rigueur serait un des objectifs de l'enseignement mathématiques, le développement de l'intuition serait hors de sa portée car elle résulterait d'un ''don'' sur lequel on serait sans pouvoir ». (Revuz, pp.92-93)

En fait, la théorie des situations aide à développer l'intuition car lorsqu'on organise un milieu didactique, on aide les élèves à agir sur ce milieu et à appréhender ainsi, de manière intuitive les connaissances. Ces connaissances qu'ils saisissent ne résultent pas d'un raisonnement logique, mais d'une intuition qui les leur fait connaitre et qui peuvent ainsi être qualifiés d'intuitives, ou de personnelles. Aussi, pour les intuitionnistes,

> La réalité mathématique est indépendante du langage mathématique et de la logique qui est un pur instrument de la communication. L'existence mathématique est réduite à la constructibilité : l'être mathématique n'a pas une réalité autonome, il n'existe que dans l'acte par lequel il est engendré. Toute la pensée mathématique est fondée sur une intuition originaire, celle de la division de l'unité, source de dualité. (Ladiere 1957, pp.26-27)

Les premières connaissances que les élèves construisent à partir des situations didactiques sont intuitives et subjectives car leur appréhension résulte d'une action de l'intelligence sur le milieu et non d'un raisonnement logique. L'activité de la pensée mathématique consiste donc à partir du niveau intuitif au niveau formalisé de manière évolutive. La distinction entre système et propriétés du système prend toute sa portée et l'on ne peut se passer d'un recours ultime à l'intuition car les mathématiques reposent en définitive sur l'accomplissement des gestes concrets. Et de ce point de vue, l'apport intuitionniste est capital du fait qu'en insistant sur l'exigence de constructivité, elle met en relief une caractéristique de la pensée mathématiques. Cela justifie donc l'usage des situations didactiques dans la formation de la pensée mathématique dans une institution d'enseignement. D'où l'adéquation entre cette évolution de la pensée mathématique et l'évolution des connaissances en milieu scolaire.

IV. LE DEVELOPPEMENT DE LA PENSEE MATHEMATIQUE A TRAVERS LA FORMATION SCOLAIRE

La reconstruction de savoirs scolaires par une évolution situationnelle pour amoindrir l'écart de transposition vue comme une purification progressive et hiérarchisée des aspects intuitifs caractérisant le cognitif primaire issu des savoirs en acte, ne peut pas se faire en un jour mais suivant une série des paliers progressifs à des niveaux institutionnels d'apprentissage que l'élève devrait franchir pour acquérir le vrai savoir savant des scientifiques. C'est cela le vrai caractère d'organisation en spirale de l'enseignement scolaire qui doit faire évoluer les connaissances des élèves. Etant donné la convergence des différentes réflexions des auteurs précités, selon Hategekimana (2014, p.36), les phases de formalisation de Ladière (1957, pp. 55-57) s'appliquent en enseignement pour faire cheminer les connaissances des élèves du cognitif primaire au cognitif plus ou moins purs, des connaissances intuitives issues des savoirs-en-actes aux connaissances formalisés se rattachant aux savoirs savants pour avoir la ‘‘décontextualisation’’ des savoirs scolaires.

- La première, l'axiomatique intuitive, s'élabore à partir du concret et didactiquement parlant, à partir des situations d'enseignement, de manière intuitive par les élèves dans une classe de mathématique. Il s'agit du système des connaissances qui s'élabore lorsque la contextualisation des savoirs savants a eu lieu pour que l'élève puisse, sous le guide du professeur, construire soi-même ses connaissances. Donc les savoirs-en-actes à ce niveau produisent une axiomatique intuitive, les cognitif étant subjectif.
- La deuxième, correspond à l'axiomatique abstraite et consiste à préciser le contenu des concepts fondamentaux dégagés des situations didactiques d'apprentissage et donc, une phase de construction des savoirs, non plus en partant des situations mais en partant des constructions mathématique élémentaires de cette connaissance.
- L'axiomatique formelle consiste à définir les concepts fondamentaux, non de façon intuitive mais à partir des relations établies entre ces concepts. Il s'agira de définir les opérations et toutes les notions connexes au savoir en étude. C'est un premier essai de formalisation axiomatique des connaissances.

- Enfin, le système formel pur peut se faire avec la définition axiomatique, après que tout le reste soit fait au préalable. Ici, il ne serait plus question de définir les concepts à partir des situations ni des constructions mathématiques de cette connaissance mais de manière axiomatique.

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, « la décontextualisation ou dé-transposition des connaissances dans l'enseignement actuel de mathématiques devra suivre le cheminement logique de la formalisation des connaissances mathématiques dans l'usage des situations didactiques afin de faire acquérir des savoirs abstraits ». Cette formalisation des mathématiques contextualisées permet de réunifier et d'universaliser les différentes connaissances issues de plusieurs types de contextualisations culturelles des savoirs scolaires dans toutes les cultures et donne lieu à un savoir universel dégagé des particularités culturelles

1. *Cas de l'enseignement de la Géométrie au secondaire et en formation des maîtres*

Les premiers travaux de géométrie ont été menés il y a trois mille ans à Babylone pour résoudre des problèmes d'astronomie et en Egypte pour retrouver les limites des terrains qui avaient été recouverts par les eaux du fleuve Nil pendant les crues. Les mathématiciens de cette époque ont établi des formules pour déterminer l'aire des surfaces limitées par des polygones élémentaires (triangle, trapèze, parallélogramme,…), le volume de l'espace limité par le prisme droit, …et des formules approximatives concernant le cercle. A cette époque, la géométrie était utilitaire et pratique dicté par le besoin de résoudre les problèmes pratiques.

Vers le 6ème siècle avant Jésus-Christ, les grecs ont fondé une géométrie philosophique et scientifique en quittant ainsi le seul aspect pratique. La géométrie devint un objet de réflexion pour elle-même et aussi déductive en fondant les propriétés des figures par les démonstrations. Avec Platon, les géomètres ont commencé à distinguer les objets du monde réel et les objets géométriques qui sont abstraits et parfaits. Ce fut le passage du concret à l'abstraction et donc de la modélisation.

Au 3ème siècle avant Jésus-Christ, Euclide organisa les savoirs géométriques de manière logique à partir des définitions, des axiomes et des propriétés démontrées. Ce fut donc le début de la formalisation et de la théorisation de la géométrie, de manière cohérente et de la structuration logique.

Du 9ème au 13ème siècle après Jésus-Christ, les mathématiciens arabes traduisirent les ouvrages grecs en les commentant et enrichirent la trigonométrie dans laquelle ils développèrent des méthodes de calcul d'aires et des volumes et la géométrie sphérique pour les besoins de l'astronomie. Aussi, le dessin et la peinture ont conduit au développement de la géométrie projective et la géométrie devint algébrique par l'introduction des repères et des équations. C'est l'organisation des savoirs fondés sur un système axiomatique cohérent pouvant permettre leur structuration en une théorie hypothético-déductive.

Et à partir du 18ème siècle, des recherches se font intenses en géométrie surtout lorsque les mathématiciens commencèrent à questionner la théorie géométrique notamment sur les axiomes d'Euclide. Ce fut le développement et l'expansion théorique de la géométrie. (Nzitakera 1995)

On obtient donc à partir de l'évolution de la géométrie dans le temps, quatre étapes principales que la géométrie a pu franchir pour devenir une science avec des méthodes et des théories. Puisque cette évolution de la pensée géométrique s'inscrit dans le schéma global du développement de la pensée mathématique, nous pouvons associer les synthèses théoriques de Houdement et Kouzniak (1998-1999, pp.71-72) en trois types de géométrie :

- La géométrie naturelle qui se confond avec la réalité (G1), dont la source de validation est la réalité, le sensible et qui comprend trois aspects : l'intuition, l'expérience et la déduction s'exerçant sur des objets matériels grâce à la perception et la manipulation d'objets.
- La géométrie axiomatique naturelle qui est un schéma de la réalité (G2) dans laquelle les aspects non rigoureux et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus possible.
- La géométrie axiomatique formalisée (G3) pour laquelle le cordon ombilical avec la réalité est coupé et dans laquelle les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible, sur l'intuition mais la primauté du raisonnement logique s'impose.

Pour Houdement et Kouzniak, l'évolution de la géométrie ne doit pas être vue comme une suite des ruptures mais comme une vision unificatrice de la géométrie évolutive entre divers pôles et doit concourir à la formation des maîtres. Il a donc pensé s'en servir pour une bonne formation des maîtres. Cette classification rejoint la procédure de l'enseignement de la géométrie telle que l'a proposé Henri (1999) cité par Parzysz (pp.2-3), qui distingue trois types de rapports à l'espace en enseignement de la géométrie qui sont la situation concrète, une première modélisation par une schématisation et une mathématisation élaborée à partir du modèle. Sur base de cette approche, l'enseignement de la géométrie comporte ainsi un cadre théorique basé sur quatre paradigmes dont deux de la géométrie non axiomatiques : la géométrie concrète (G0) constituée les résultats de l'observation des figures dans l'espace (phase axiomatique intuitive) et la géométrie spatio-graphique (G1) constituée par des schémas graphiques de ce que l'on observe dans l'espace (axiomatique abstraite), et deux de la géométrie axiomatiques : la géométrie proto-axiomatique (G2) constituée par une modélisation de la réalité (axiomatique formelle) et la géométrie axiomatique qui est la formalisation finale (G3) (axiomatique formelle pure). (Parzysz, p. 130). Ce processus est une mathématisation, une décontextualisation des savoirs-en-acte qui consiste à généraliser et à dégager des définitions mathématiques à partir des observations, des réalisations et leurs schématisations et à produire un discours du type déductif appliqué aux données de l'énoncé.

2. *L'enseignement des ensembles de base (*$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$*)*

En République Démocratique du Congo, les ensembles s'enseignent sous forme intuitive en première, deuxième et troisième secondaire et constituent un savoir de base à toute la formation mathématique au secondaire. En se basant sur les idées de Ladrière, et la formation des structures mathématiques, Banwitiya et al. (p.4) et Hategekimana (2006) ont proposé un enseignement des structures algébriques par leur hiérarchisation par *un enseignement qui considère les différentes structures comme des classes hiérarchiques dont le passage d'une classe à une autre suppose d'abord la maîtrise de la première et l'existence d'un besoin d'obtenir des propriétés supplémentaires pour résoudre certains problèmes jugés nécessaires.* Ce qui est corroboré par Servais (Gattegno & al., p.38) pour qui, l'algèbre peut s'apprêter dans son enseignement au modèle de décontextualisation qui occasionnerait un enseignement hiérarchisé permettant d'asseoir l'abstraction mathématique des structures algébriques :

> L'algèbre, d'abord conçue comme un système d'opérations sur des nombres de nature déterminée, est, par une libération progressive, apparue de plus en plus clairement comme un système opératoire pouvant agir sur des êtres de nature les plus diverses. Par une abstraction nouvelle, on néglige toute ces interprétations pour considérer des êtres indéterminés sur lesquels s'exercent des opérations qui ne sont autrement précisées que par des règles de composition données de façon explicite.

Il en résulte une structuration de l'enseignement de l'algèbre générale tenant compte de la hiérarchisation des structures et des niveaux d'abstractions des mathématiques, pouvant s'appliquer à l'enseignement des structures algébriques suivant quatre niveaux ou degrés différents et successifs et comme un processus qui intègre chaque fois le cheminement du formalisme des connaissances mathématiques, et donc de leur décontextualisation :

- Premièrement, l'enseignement intuitif, basé sur les problèmes de la vie liés à la genèse des nombres et des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$ d'une manière hiérarchisée. Ces situations permettraient de contextualiser les définitions des nombres comme classes d'équivalences induisant une relation d'équivalence.
- Deuxièmement, les ensembles sont définis non plus à partir des situations, mais à partir de la relation d'équivalence déduite précédemment par la situation.
- Troisièmement, le principe du raisonnement mathématique étant bien acquis, on généralise les structures des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ aux demi- groupes pour $\mathbb{N}$, groupes et anneaux pour $\mathbb{Z}$ et les corps pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et on reprend les constructions de leurs constructions, le passage de l'un à l'autre se faisant par hiérarchisation des structures et non d'une manière axiomatique.
- Quatrièmement, on définit les savoirs de manière axiomatique sans recourir aux constructions, ces dernières étant bien maîtrisées à l'avance.

La hiérarchisation des structures signifie que les structures sont présentées aux élèves par pallier, le passage de l'une à l'autre se faisant par construction motivée par la résolution d'un certain nombre de problèmes préalablement posés dans la structure de base (Hategekimana 1993). Pour améliorer le rendement de l'enseignement des mathématiques, nous émettons l'hypothèse qu'il serait nécessaire d'appliquer ces phases dans l'enseignement des mathématiques chaque fois que les connaissances sur les ensembles des nombres comme une procédure de décontextualisation des connaissances à partir des situations ou des jeux.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les savoirs savants sont rendues culturels par l'effet de transposition didactique et lorsqu'elles sont contextualisées par des situations ou des jeux culturels et peuvent ainsi différer et donner lieu à une diversité des connaissances scolaires de base. Pour les rendre impersonnelles et les dégager de toute connotation contextuelle et culturelle, les étapes de la décontextualisation s'avèrent nécessaire afin que les connaissances finales apprises au bout de compte soient ''déculturalisées'' (contextualisées) et ainsi universalisées. Cette évolution des connaissances scolaires se réalise dans notre système d'enseignement à spirale par les modifications des intentions institutionnelles et des transformations des situations didactiques de sorte que les contenus d'enseignement évoluent en même temps que les rapports des élèves aux objets d'enseignement. Ce processus des transformations peut être qualifiée de dé-transposition car elle fait évoluer les savoirs en actes aux savoirs purs ayant fait l'objet de transposition. Cette façon de faire est déjà appliquée pour l'enseignement de la géométrie et peut donc être généralisées à l'enseignement de toutes les connaissances mathématiques notamment des structures algébriques. De ce fait, les connaissances que les élèves auront acquis seront générales et pourront comprendre leurs constructions, leurs sens et significations ainsi que leurs formes finales axiomatisées.

Ce qui reste, c'est d'analyser exactement ce qui se fait dans les pratiques d'enseignement dans nos écoles et de proposer comment réaliser cette évolution. Cependant, cela ne peut se faire que s'il y a eu une bonne transposition et si les savoirs scolaires sont contextualisés autrement dit si les enseignants connaissent et utilisent à bon escient les théories de la transposition didactique et des situations didactiques. Mais aussi, des expérimentations peuvent se réaliser conjointement en prévoyant, les situations didactiques des notions données construites expérimentalement ainsi que leur dé-contextualisation ou dé-transposition.

REFERENCES

Antibi A., Brousseau G. (2000) La dé-transposition des connaissances scolaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 20(1), 7-40.

Banwitiya Y., Indenge Y., Hategekimana L-E., (2013) Enseignement par hiérarchisation des structures et des niveaux d'abstractions. *CERIGO* 6, 1-25

Baraquin N. et al. (2005) *Dictionnaire de Philosophie*. Paris : Armand Colin.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Brousseau G. (2000) Education et didactique des mathématiques. *Education matematica* 12(1), 5-39.

Brun J. et al. (1996) *Didactique des mathématiques*. Paris : Delachaux et Niestél.

Dorier J-L. et al. (2002) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques.* Paris : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde*.* *Repères IREM 15.* Topiques Éditions.

Gattegno et al. (1958) *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques.* Paris : Delachaux et Niestlé.

Hategekimana L. (1993) *Etude comparative de quelques complétions des structures en mathématiques*. ISP/Bukavu : Mémoire de Licence.

Hategekimana L. (2014) *Sur l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*. Thèse de Doctorat. Kinshasa : Université Pédagogique National.

Hategekimana L. (2006) Enseignement par hiérarchisation des structures en mathématique, une piste pour la résolution du problème d'enseignement des mathématiques. *Cahiers du CERUKI, Nouvelle Série* 33, 53-67.

Houdement C., Kuzniak A. (1998-1999) Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres*.* *Grand N, CRDP-IREM* 64, 65-78.

Inspection de mathématiques et de sciences physiques et chimiques (2010) *Pourquoi une progression annuelle en spirale ?*.

Ladriere J. (1957) *Les limitations internes des formalismes*. Paris : Gauthier-Villars.

Nzitakera S. (1995) Le postulat d'Euclide sur les parallèles et l'approche axiomatique moderne de la géométrie. *Revue de pédagogie appliquée* XI, 1-4.

Parzysz B. (2006) La géométrie dans l'enseignement au secondaire et en formation des professeurs des écoles. De quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in didactica* 17, 128-161.

Revuz A. (1980) *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* Paris : PUF

Vergnaud G. (1990) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. *Petit x* 22, 51-69.