Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIMENSION EPISTÉMOLOGIQUE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES[1]

Jean-Luc DORIER[*]

Résumé – Epistémologie expérimentale c'est le nom qu'a failli recevoir ce champ de recherche naissant à la fin des années 70, qui deviendra la didactique des mathématiques. Une référence tout autant à l'épistémologie historique des mathématiques qu'à l'épistémologie génétique de Piaget. Dans ce texte, nous nous proposons de caractériser la dimension épistémologique des trois grandes théories de didactique des mathématiques française : la théorie des situations de Brousseau, la théorie des champs conceptuels de Vergnaud et la théorie anthropologique du didactique de Chevallard.

Mots-clefs : épistémologie, genèse, transposition didactique, situation fondamentale, champs conceptuels.

Abstract – Experimental epistemology is the name that was nearly given, at the end of the 70s, to this emerging field, which will finally be called "didactique des mathématiques". This was as much a reference to the historical epistemology of mathematics than to Piaget's genetic epistemology. In this text we explore this epistemological dimension of the three main theories of French didactics of mathematics: Brousseau's theory of didactical situations, Vergnaud theory of conceptual fields and Chevallard anthropological theory of didactics.

Keywords: epistemology, genesis, didactical transposition, fundamental situation, conceptual fields.

I. INTRODUCTION

La didactique des mathématiques se définit comme l'étude des processus de transmission des connaissances mathématiques. Dans le paradigme de la théorie des situations de Brousseau, un concept centrale st celui de situation fondamentale :

> Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. (Brousseau 1981, p.109).

Par l'objet même de son étude, la recherche en didactique des mathématiques présente un caractère expérimental, cependant le travail « de terrain » (observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc.) est sous-tendu par un travail préalable important ayant trait à « l'étude du savoir mathématique ». Cette étude est une phase fondamentale pour que le chercheur puisse prendre ses distances par rapport aux enjeux didactiques. Le sens des concepts, les problèmes qui s'y rattachent, la position relative d'un élément de savoir dans un

[1] Ce texte s'appuie sur une partie de ma note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches (Dorier 1997b).

[*] Université de Genève – Suisse- Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Dorier, J.-L. (2015) La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 108-118.

savoir plus large qui l'englobe, mais aussi la variabilité de ces données en fonction des périodes et des institutions, etc. sont autant de questions qui aident à mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique. C'est dans ce sens qu'à leur début Brousseau et Vergnaud ont hésité à nommer ce champ de recherche naissance « épistémologie expérimentale ».

Or, comme le souligne Legrand (1993) :

> Chercher une situation fondamentale, c'est alors se rebeller contre la logique implacable de la présentation scientifique, logique de présentation très linéaire où la clarté et la rigueur du discours, la trivialité des assertions intermédiaires se paie le plus souvent par un émiettement et un laminage de significations principales, par une perte de contrôle de l'élève sur la validité et la pertinence de ce qu'on lui enseigne. (Op. cité, p. 126).

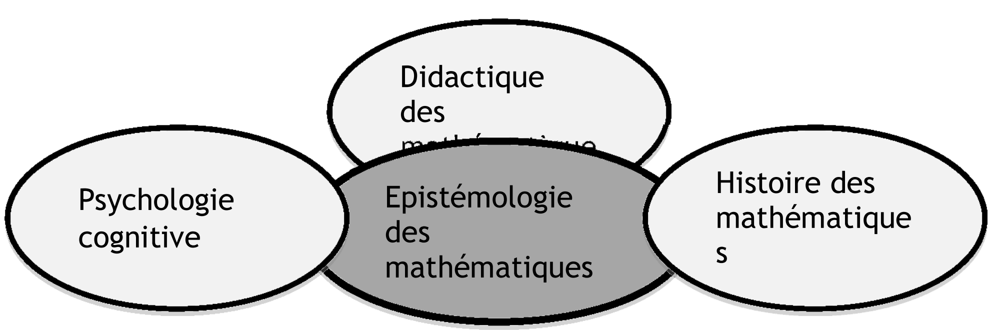
On voit donc que l'épistémologie à l'œuvre dans le travail didactique doit inventer de nouveaux outils, se défier du seul fonctionnement des mathématiques savantes et investiguer de nouveaux territoires. De plus, le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. C'est en particulier ce qu'exprime Chevallard (1991) quand il nous dit que :

> […] le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire, distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire […] C'est l'un des instruments de la rupture que la didactique doit opérer pour se constituer en son domaine propre ; il est ce par quoi l'entrée du savoir dans la problématique de la didactique passe de la puissance à l'acte. (Op. cité, p.15)

Ainsi une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment-là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour « se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique » (ibid., p.15).

D'ailleurs, la pertinence de la référence à l'histoire du savoir depuis ses origines dans la sphère savante ne se limite pas au travail spécifique d'analyse de la transposition didactique mais touche à la plupart des aspects de la recherche en didactique des mathématiques française.

Notre étude repose sur les quatre pôles : épistémologie, didactique et histoire des mathématiques et psychologie cognitive. L'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique, le travail de psychologie cognitive et le travail didactique :



Autrement dit, l'épistémologie joue un rôle transversal car elle interagit à la fois avec la didactique et l'histoire des mathématiques mais aussi la psychologie. L'*épistémologie* au sens strict peut apparaître soit comme le nom savant de la philosophie des sciences soit comme l'étude des conditions de production des connaissances scientifiques.

Bachelard distingue l'histoire et l'épistémologie d'une science :

> C'est […] l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier d'épistémologue de celui d'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un obstacle ou une contre-pensée.
> […] L'épistémologue doit donc s'efforcer de saisir les concepts scientifiques dans des synthèses psychologiques effectives, c'est-à-dire dans des synthèses psychologiques progressives, en établissant, à propos de chaque notion, une échelle de concepts, en montrant comment un concept en a produit un autre, s'est lié avec un autre. Alors il aura quelque chance de mesurer une efficacité épistémologique. Aussitôt la pensée scientifique apparaîtra comme une difficulté vaincue, comme un obstacle surmonté. (Bachelard 1938, pp.17-18).

Il ne faudrait pas voir dans le travail de Bachelard une péjoration du travail historique. La distinction qu'il soulève montre au contraire la complémentarité des deux approches et revendique l'importance de la réflexion épistémologique dans le travail historique sans dénigrer l'importance de ce dernier.

Le sens du terme *épistémologie* s'est largement étendu depuis plusieurs années. Cette évolution doit beaucoup au développement de domaines tels que l'histoire des sciences ou les sciences cognitives qui entretiennent avec l'épistémologie des rapports étroits. Ainsi le terme d'épistémologie s'est-il appliqué à de nouvelles problématiques, son sens s'est alors élargi. En particulier, il n'est pas rare aujourd'hui qu'épistémologie désigne la théorie des méthodes ou des fondements de la connaissance, ce qui est le sens du terme *epistemology* en anglais, le terme français de *gnoséologie* n'étant plus guère usité. L'usage introduit par Piaget dans l'expression *épistémologie génétique* témoigne aussi de cet élargissement d'emploi :

> La méthode génétique revient à étudier les connaissances en fonction de leur construction réelle ou psychologique, et à considérer toute connaissance comme relative à un certain niveau du mécanisme de cette construction. (Beth et al. 1957, p.19).

Du coup, cette épistémologie quitte l'attachement à la philosophie pour se constituer en science humaine et expérimentale. D'avoir donné à l'épistémologie un aspect expérimental n'est pas le moindre mérite de Piaget, et certainement une condition nécessaire à l'existence de la didactique des mathématiques.

Piaget (1967, pp. 6-7) donne deux approximations pour définir l'épistémologie :

i) Etude de la constitution des connaissances valables.

Le terme « constitution » montre l'idée d'un processus, alors que l'usage du pluriel insiste sur la différenciation disciplinaire et que le terme « valables » révèle une conception normative du savoir.

ii) Etude du passage des états de moindre connaissance aux états de connaissance plus poussée.

Cette position induit la dimension de genèse d'une connaissance, et en détermine la nature.
Ces deux points de vue coïncident si l'on considère que la constitution des connaissances n'est jamais achevée. Or c'est ce qu'expriment Beth et al. (1957) :

> Déterminer comment s'accroissent les connaissances implique que l'on considère, par méthode, toute connaissance sous l'angle de son développement dans le temps, c'est-à-dire comme un processus continu dont on ne saurait jamais atteindre ni le commencement premier ni la fin. Toute connaissance, autrement

> dit, est à envisager comme relative à un certain état antérieur de moindre connaissance, et comme susceptible de continuer elle-même un tel état antérieur par rapport à une connaissance plus poussée. (Op. cité, p.18)

On retrouve l'idée de genèse d'une connaissance qui est très importante dans l'œuvre de Piaget. C'est aussi un point de convergence avec la perspective de Bachelard. Il ne faudrait cependant pas croire que ces deux auteurs ont une perception uniforme et linéaire de la genèse de la connaissance. Au contraire, dans des domaines assez différents, ces deux types de travaux ont permis de dégager des notions liées à l'idée de rupture et d'obstacle , qui mettent en évidence justement le caractère non uniforme et non linéaire de la progression de la connaissance.

Piaget relie par ailleurs son approche à ce qu'il appelle la méthode historico-critique, proche de l'épistémologie historique de Bachelard. Pour lui :

> […] la méthode complète de l'épistémologie génétique est constituée par une collaboration intime des méthodes historico-critique et psychogénétique, et cela en vertu du principe suivant […] : que la nature d'une réalité vivante n'est révélée ni par ses seuls stades initiaux, ni par ses stades terminaux, mais par le processus même de ses transformations. […] Or, de cette constitution progressive, la méthode psychogénétique fournit seule la connaissance des paliers élémentaires, même si elle n'atteint jamais le premier, tandis que la méthode historico-critique fournit seule la connaissance des paliers, parfois intermédiaires mais en tous cas supérieurs, même si elle n'est jamais en possession du dernier […] (Ibid., p.23).

Ainsi Piaget établit-il un lien entre phylogenèse et ontogenèse. Il se garde toutefois de dire que la deuxième serait une réplique de la première à petite échelle, mais il établit plutôt un lien de filiation, comme si l'évolution d'une connaissance chez un individu était constitutive de la genèse globale de cette connaissance. La didactique des mathématiques a repris et dépassé cette idée en combinaison avec d'autres, essentiellement issues de Bachelard. On pourra à ce sujet consulter les textes fondateurs de Artigue (1991) et Radford (1997).

Soulignons également que l'histoire des mathématiques, depuis plusieurs années prend beaucoup plus en compte les dimensions sociales et culturelles et que le champ de l'éthno-mathématique a aussi ouvert de nouvelles approches qui ont permis d'enrichir les approches épistémologiques.

Nous allons maintenant brièvement montrer comment la dimension épistémologique est prise en compte dans les trois grandes théories de didactique des mathématiques française. Faute de place nous ne développerons pas d'exemples détaillés, ce que nous pourrons faire lors de la présentation orale.

II. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES (TSD)

L'enseignement vise à recréer dans la classe une genèse des concepts mathématiques que l'élève doit s'approprier. On peut dire que cette genèse est artificielle, dans la mesure où ce n'est pas la genèse historique, elle est aussi expérimentale, parce qu'elle est liée à l'expérience de la classe et de chaque élève.

> Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse (Artigue 1991, p. 244).

On peut dès lors bien sûr envisager de réorganiser les évènements de façon à ne choisir que les étapes essentielles, en raccourcir certaines, en regrouper d'autres, etc. Mais un tel travail comporte aussi le danger d'être exposé à l'arbitraire et au subjectif. Il doit s'intégrer dans une problématique bien définie et s'appuyer sur un cadre d'analyse théorique qui devra englober des outils didactiques.

> Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. […] Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. (Brousseau 1981, p. 48).

De plus, le contexte de l'enseignement reste une contrainte incontournable qui soulève beaucoup de problèmes d'adaptation. Le problème du temps tout d'abord : comment en effet recréer une genèse de plusieurs décennies (voire siècles) en quelques heures (même sur plusieurs années) ? Le problème des contraintes cognitives ensuite : l'organisation du savoir enseigné ne suit pas dans son ensemble la progression historique du savoir savant, comment alors intégrer le passé mathématique de l'élève au modèle du processus historique ? Plus généralement, les différences en termes sociaux, psychologiques ou institutionnels sont telles que la genèse artificielle à l'œuvre dans la classe ne peut suivre que de très loin la genèse historique. Dans l'analyse de la genèse historique, plus que l'énumération et la fonction de différentes étapes de l'évolution, il importe de pouvoir déterminer les conditions qui ont permis de passer d'une étape à une autre ou au contraire ce qui a pu faire obstacle. La question centrale est : comment s'assurer que le problème posé est bien pertinent par rapport au savoir ? Quelles relations a le problème posé avec la raison d'être de l'objet de savoir, enjeu de l'enseignement ? Quel sens donne t-il au savoir ?

C'est un problème épistémologique pour lequel Brousseau (1986) affirme qu'« il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct (par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique). […] Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale. »

Dans la TSD une situation fondamentale d'une connaissance est une modélisation de cette famille de situations mathématiques à potentiel didactique spécifiques du savoir visé. Un problème particulier peut donc être envisagé comme découlant d'une situation « fondamentale » : cette situation « fondamentale » est représentée par un ensemble fini de variables didactiques, pertinentes par rapport à la signification du savoir, enjeu d'enseignement. Inversement, en donnant des valeurs à ces variables, on génère des situations particulières donnant au savoir une signification particulière. De fait, la construction des significations des concepts par les élèves se pose en terme d'usages dans des situations. C'est un des points clefs, qui donne tout son sens au terme de situation dans la TSD. Pour plus de détail on pourra voir à ce propos le cours de Bessot (2011) à l'école d'été sur les ingénieries didactiques.

Par exemple dans le cas de l'apprentissage du nombre, un des points essentiels des premiers apprentissages est que les élèves prennent conscience de l'importance de la notion de quantité d'une collection. Les travaux de Brousseau (voir Margolinas & Wozniak 2013) ont ainsi permis de dégager une première situation fondamentale consistant à créer des collections équipotentes (mettre exactement autant, pas plus, pas moins d'œufs dans une collection de coquetiers). A travers un jeu sur les variables didactiques (proximité ou éloignement du stock d'œufs, nécessité de tout amener en une fois dans un panier, demande différée dans le temps, commande à autrui, possibilité d'avoir des jetons, un crayon et du papier…) on peut ainsi imaginer une progression commençant par une situation d'action, puis des situations de formulation de plus en plus complexes, permettant aux élèves de construire le sens de l'équipotence à travers la construction de collections intermédiaires. Ce travail s'inspire de pratiques avérées dans l'histoire de l'humanité comme celle du berger qui met un caillou sur un tas chaque fois qu'un mouton sort de l'enclos, et qui en enlèvera un à chaque mouton qui rentre le soir. Ou encore les coches sur des bouts de bois ou d'os datant du paléolithique, qui servaient à garder la mémoire d'une quantité.

Le type de démarche évoqué ci-dessus montre un rôle que peut jouer l'analyse historique dans la construction d'ingénieries didactiques et dans les choix globaux déterminant les grandes lignes de la genèse expérimentale que l'enseignement vise à produire. A un niveau plus local, l'analyse historique joue également un rôle pertinent dans les diagnostics d'erreurs. En effet, l'histoire fournit des exemples de processus d'évolution des connaissances, dont une analyse épistémologique permet de mettre en évidence, les ressorts, les sauts conceptuels, la fonctionnalité, etc. Une confrontation des erreurs des élèves à ces exemples peut permettre d'interpréter ces erreurs de façon plus satisfaisante. En particulier, l'analyse historique peut permettre de distinguer les erreurs de nature épistémologique, des erreurs plus contingentes qui peuvent être de nature cognitive ou didactique.

> L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié que l'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques et behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. (Brousseau 1983, p. 171).

En s'inspirant de Bachelard, les chercheurs en didactique des mathématiques vont importer dans leur domaine la notion d'obstacle épistémologique. Bachelard introduit ainsi cette notion :

> Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens de l'esprit humain : c'est dans l'acte de connaître, intimement, qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. […] En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. (Bachelard 1938, p. 13).

Bachelard avait a priori écarté les mathématiques de son propos, pour lui « en fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. » (Ibid., p.22). Néanmoins la notion d'obstacle a été beaucoup étudiée en didactique des mathématiques (voir entre autres, (CIRADE 1989) et (Perrin-Glorian 1993)). Il nous semble cependant qu'il y a un danger à la trop banaliser. En effet, dans une polémique qui l'a opposé à Glaeser (1981) à propos de l'enseignement des nombres relatifs, Brousseau avait exprimé des exigences très fortes quant à la consistance de l'analyse historique pour qu'elle puisse aider de façon pertinente à la mise en place d'un dispositif didactique en termes d'obstacles épistémologiques :

> Se posait-on ces problèmes ? Comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre ? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet « état de connaissances » paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il stable ? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là ? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail "latéral" soit

> accompli, mais lequel ? Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances […] (Brousseau 1983, pp. 190-191)

Ces exigences montrent la difficulté d'analyse liée à la détermination d'un obstacle épistémologique. Du point de vue de l'histoire, la notion d'erreur ou seulement de difficulté est très problématique, les questions précédentes nous y renvoient. Dans ce contexte, le parallèle avec la situation d'enseignement doit être suffisamment contrôlé. De plus, il nous semble difficile (voire dangereux) de faire jouer à l'exemple de la genèse historique un caractère trop prédictif. Cela suppose au moins une analyse comparée très minutieuse des conditions et des contraintes du contexte historique et du contexte didactique visé. Une analyse didactique qui se donnerait la recherche d'obstacles épistémologiques comme but essentiel doit prendre en compte au moins l'ensemble des questions énoncées par Brousseau, pour ne pas risquer d'introduire un biais dans l'analyse historique. Autrement dit, la notion d'obstacle épistémologique présuppose une réflexion épistémologique fine qui repose sur une analyse historique particulièrement dense.

III. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Il est moins courant de penser au travail de Vergnaud (1990) quand on parle d'épistémologie en didactique des mathématiques. Pourtant cette approche vient directement de l'épistémologie génétique et elle comprend de fait une dimension épistémologique[2] forte que je voudrais illustrer ici de façon succincte à l'aide d'un exemple tiré de la classification des problèmes additifs, que Verganud a réalisée dans les années 80. Je m'appuierai ici sur un texte récent qui reprend ce travail (Vergnaud 2009).

Dans son approche, Vergnaud met en évidence l'importance pour la signification d'un concept mathématique de la classe des problèmes dans lesquels il prend ses différents sens. C'est sur cette base que pour le champ conceptuel de l'addition, il a réalisé une classification des problèmes additifs, c'est-à-dire des problèmes qui nécessitent pour être résolus d'utiliser une addition ou une soustraction. Alors que du point de vue mathématique un problème additif revient toujours soit à un calcul direct $a + b$ ou $a – b$ soit à résoudre une équation du type $a + x = b$, Vergnaud montre que du point de vue des représentations et des schèmes d'action c'est plus complexe. Il met ainsi en évidence une classification des problèmes additifs qui repose sur une analyse épistémologique de la nature du problème plus fine que ce que les outils classiques de mathématiques peuvent offrir, mais qui montre bien la nature mathématique profonde des problèmes. Ce travail a été d'une grande importance pour apporter des explications alternatives de celles des psychologues ou des linguistes aux difficultés des élèves. Sans rentrer dans les détails, je voudrais illustrer cette idée en comparant les trois problèmes suivants :

1. Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?

2. Robert vient de perdre 5 billes ; il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?

3. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a perdu 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Dans la résolution de ces trois problèmes, la réponse s'obtient *in fine* par l'addition 7 + 5 = 12. Pourtant il est facile de voir, ce qui est confirmé par les expérimentation que :

---

[2] Certes la dimension historique est peu présente ici, mais il s'agit bien d'une réflexion de nature épistémologique, qui se base sur des observations cliniques, mais aussi sur une réflexion interne aux objets mathématiques en jeu. En ce sens, ce travail est loin d'une démarche purement psychologique.

- le premier est très simple (réussi par la quasi totalité des élèves de fin de première année primaire), il s'agit d'un modèle *état – transformation – état*, et comme la transformation est positive c'est presque aussi simple que le cas le plus élémentaire *partie – partie – tout*.

- le deuxième est un peu plus complexe et n'est généralement réussi qu'en fin de deuxième ou troisième année primaire. La recherche de l'état initial (connaissant la transformation et l'état final) nécessite la construction d'un théorème-en-acte pour inverser la transformation.

- le troisième est beaucoup plus complexe et souvent n'est pas réussi par des élèves en fin de primaire. On pourrait croire que la difficulté principale vient de la complexité de l'énoncé et donc soit avant tout de nature linguistique.

Pourtant si l'on considère le problème suivant :

3b. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 5 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 7 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Il présente exactement les mêmes caractéristiques langagières, mais sera beaucoup plus facilement réussi. En effet le fait qu'on l'on mette en rapport un gain partiel moindre qu'un gain total, permet de se ramener à un problème de *partie – partie – tout* ou l'on cherche une des parties.

De même avec le problème :

3c. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a perdu 5 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?
Où il suffit de raisonner sur des pertes au lieu des gains.

Le problème 3d est un peu plus complexe que les deux précédents sans atteindre le niveau de difficulté du 3.

3d. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

On peut en effet le ramener à la recherche d'une transformation quand on passe de l'état 7 billes à l'état 5 billes.

Par contre le problème 3e. est aussi complexe que le 3.

3e. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a perdu 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Ici on ne peut pas se ramener à un des deux cas précédents, car on a mis en rapport une perte et un gain. Il est nécessaire de penser en termes de composition de transformations. Ce problème est de fait un bon problème d'entrée dans la compréhension des opérations avec les nombres négatifs.

Ainsi on voit bien que la classification des problèmes additifs par Vergnaud repose sur une analyse épistémologique où la signification mathématique que le sujet peut donner au problème détermine le niveau de difficulté. La dimension cognitive est bien ici spécifique des mathématiques en jeu et pas seulement de marqueurs linguistiques ou culturels.

IV. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE (TAD)

Dans l'introduction nous avons clairement montré la dimension épistémologique de la transposition didactique, qui est à l'origine de la TAD. En fait, dès la deuxième édition de la *Transposition Didactique*, Chevallard (1991) positionne très clairement son programme de recherche par rapport à l'épistémologie. C'est ce que nous allons rappeler brièvement ici sans analyser les développements les plus récents de la TAD (faute de place).

Dans la postface à la deuxième édition de la *Transposition Didactique*, il s'interroge sur la place de la didactique, et propose de la situer dans le champ de l'anthropologie (*l'étude de l'Homme*). Très schématiquement, son point de vue est le suivant. Il distingue savoir et connaissance :

> Une certaine connaissance, c'est-à-dire une certaine qualité du rapport à un objet, se donne à voir. Au lieu qu'un savoir est toujours supposé. Il se présente à nous par ses emblèmes (sa dénomination, etc.), et nous le rencontrons comme présent *in absentia*, comme une potentialité - ou un manque, quand nous voulons « l'apprendre ». (Op. cité, p. 209).

Il parle alors de la didactique de la connaissance, ou didactique cognitive. Or celle-ci ne saurait être incluse dans la seule anthropologie cognitive, il y manque encore la composante relative à l'intention didactique, c'est pourquoi l'auteur introduit le terme d'anthropologie didactique de la connaissance. Par ailleurs, comme il a associé l'adjectif cognitif au terme de connaissance, il associe l'adjectif épistémologique au terme de savoir[3], il identifie ainsi l'anthropologie des savoirs à l'anthropologie épistémologique et finalement à l'épistémologie. Ce jeu sur les mots est pour lui le moyen de montrer non seulement les liens entre la didactique et l'épistémologie, mais aussi l'apport de l'approche de la didactique, dans sa dimension anthropologique, pour l'épistémologie :

> Il est assez clair maintenant que l'épistémologie telle qu'elle existe s'est donnée jusqu'ici avec passion à l'étude quasi exclusive de la production des savoirs et à l'étude de leurs producteurs ; et qu'elle a négligé et leur utilisation, et leur enseignement. Or ceux-ci ne peuvent être écartés d'une étude anthropologique des savoirs. (Ibid., p. 211).

Ce vocabulaire étant mis en place, l'auteur est prêt à nous fournir la clé de sa définition de la didactique, définition qui la situe dans le champ de l'anthropologie :

> Au croisement de l'anthropologie des savoirs et de l'anthropologie didactique de la connaissance, il y a l'anthropologie didactique des savoirs, dont l'objet est la manipulation des savoirs dans une intention didactique, et en particulier l'enseignement des savoirs. Là aussi, écourtons. De même qu'on a parlé de didactique de la connaissance (ou didactique cognitive), parlons, pour faire bref, de didactique des savoirs. Celle-ci est donc à la fois une division de l'anthropologie des savoirs ou épistémologie (en notre sens) et de la didactique cognitive. C'est exactement elle que je nommerais désormais -nouveau raccourci - didactique, sans plus. (Ibid., p.211).

Cette approche par les définitions et partant du principe que la didactique est une partie de l'anthropologie est complétée par Chevallard, qui précise, plus loin, le rôle primordial que joue la sphère de production dans la légitimité épistémologique des choix d'enseignement :

> Une des plus fortes leçons qu'ait procurée la didactique […] c'est que l'enseignement d'un savoir, plus largement sa manipulation didactique en général, ne peuvent, en bien des aspects, se comprendre si l'on ignore et ses utilisations et sa production […] (Ibid., pp.211-212).
>
> Dans le cas d'un savoir savant, en effet, la sphère de la production en vient à assumer, par le biais notamment de l'Ecole et de la transposition didactique, un rôle bien plus large que celui de production *stricto sensu*.[…] La sphère de la recherche en un savoir savant est un belvédère d'où peuvent s'observer, et où finissent toujours par trouver quelque écho, les mouvements affectant le monde complexe et naturellement opaque des pratiques de ce savoir. Tout tend à monter vers elle, parce que tout tend à rechercher l'investiture épistémologique et culturelle du savoir savant qui y est produit. (Ibid., p.233).

[3] Ce choix résulte en partie d'une différence dans la séparation des termes connaissance et savoir, mais aussi de la volonté de Chevallard de garder un sens plus restreint au mot épistémologie (n'englobant pas, entre autres, le sens d'épistémologie génétique) pour mieux montrer l'apport de la dimension anthropologique (cf. la citation qui suit). On va voir que cette différence dans l'utilisation du terme épistémologique sera quasiment gommée dans la dernière étape de l'élaboration de définitions par Chevallard.

Dans ce sens, les outils qu'offre la TAD peuvent inspirer le travail historique en renforçant d'une part l'importance de l'étude des lieux de transmission et plus globalement, les dimension sociales et culturelles de la production scientifique, dont on a déjà dit plus haut qu'elles étaient de plus en plus présentes dans les recherches actuelles.

Faute de place nous ne pouvons développer ici plus avant les dimensions épistémologiques qui se sont développées dans les apports plus récents de la TAD. Pour plus de détails nous renvoyons les lecteurs à nos propres travaux sur l'algèbre linéaire (résumés dans Dorier 1997a et b) ainsi qu'à une étude mettant en avant l'approche écologique dans Ba et Dorier (2006).

V. CONCLUSION

Ce rapide survol des dimensions épistémologiques dans les trois grandes théories de la didactique des mathématiques francophone est un moyen de montrer le rapport privilégié que la recherche en « éducation mathématique », pour reprendre le terme anglo-saxon, entretient en France avec les mathématiques. De par la spécificité de la Théorie de situations mathématiques à usage didactique et de la Théorie anthropologique du didactique (et son origine dans la transposition didactique) c'est avant tout une référence à l'épistémologie historique (avec Bachelard mais aussi bien d'autres) qui est visible. Néanmoins la dimension expérimentale et la nécessité de prendre en compte le processus cognitif et les interactions renvoie à une dimension plus psychologique avec les travaux de Piaget, mais aussi de Vygotski. Ceux-ci ont inspiré Brousseau mais aussi Vergnaud, dont nous avons montrer que la théorie des champs conceptuels relève elle aussi d'une approche épistémologique, qui si elle ne s'inspire guère de la dimension historique n'en reste pas moins essentielle pour montrer la spécificité des connaissances mathématiques dans les phénomènes d'apprentissage. Bien sûr la didactique des mathématiques s'est étoffée de plusieurs autres approches et cadres théoriques dont la dimension épistémologique est moins marquée, mais la plupart des didacticiens de culture française se revendiquent plus ou moins de ces trois grandes théories dont le fort ancrage épistémologique dessine de façon unique un rapport à la discipline mère des mathématiques. Pour compléter ce bref panorama on pourra se reporter à la conférence d'ouverture de Kilpatrick (2008) à la célébration du 100e anniversaire de la création de la CIEM sur le thème « The development of mathematics education as an academic field » et ma réaction à sa conférence dans le même volume (Dorier 2008) ou un texte sur le même thème en français (Dorier 2012).

REFERENCES

Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 10(2/3), 241–286.

Ba C., Dorier J-L. (2006) Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXème siècle, *l'Ouvert*, 113. 17-30.

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique,* 13° éd.. Paris : Vrin, 1986.

Bessot A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In Magolinas C. & al. (Eds.) En amont et en aval des ingénieries didactiques – XVe école d'été de didactique des mathématiques Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009 (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Beth W.E., Mays W., Piaget J. (1957) *Epistémologie génétique et recherche psychologique,* Etude d'épistémologie génétique I. Paris : P.U. F.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1(1), 37–127.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 165–198.

Brousseau G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Chevallard Y. (1991) *La transposition didactique*, 2ème éd.. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CIRADE (1989) *Construction des savoirs - Obstacles et conflits,* Actes du colloque du CIRADE à Montréal. Ottawa : Arc éd.

Dorier J.-L. (2012) La didactique des mathématiques : émergence d'un champ autonome au carrefour des mathématiques, de la psychologie et des sciences de l'éducation. In Elaouf M.-A., Robert A., Belhadjin A., Bishop M.-F. (Eds.) *Les didactiques en question(s) - Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (pp. 42–48). Bruxelles : de Boeck (col. Perspectives en éducation et formation).

Dorier J.-L. (2008) Reaction to J. Kilpatrick's talk: The development of mathematics education as an academic field. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 40–46). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997a) L'algèbre linéaire en question, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dorier J.-L. (1997b) *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*. Note de synthèse HDR - Université Joseph Fourier - Grenoble 1 - 20 mai 1997. Paru sous la forme d'un cahier du laboratoire Leibniz, Cahier n°12. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400/document

Glaeser G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2(3). 303–346.

Kilpatrick J. (2008) The development of mathematics education as an academic field. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 25–39). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Legrand M. (1993) Le concept de situation fondamentale. Richesse et limites de ce concept. In Noirfalise R. (Ed.). *Actes de la VII^e école d'été de recherche en didactique des mathématiques* (pp.121–130). Clermont-Ferrand : IREM.

Margolinas C., Wozniak F. (2013) *Le nombre à l'école maternelle – Une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Perrin-Glorian M.-J. (1993) Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques, *Cahier du Séminaire de Recherche / réflexion / Interaction*, année 1992-93. Grenoble : IUFM, 1–21.

Piaget J. (Ed.) (1967) *Logique et connaissance scientifique*. Encyclopédie de la Pléiade. Paris : Gallimard.

Radford L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics* **17**(1), 26–33.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3), 133–170.

Vergnaud G. (2009) Activité, développement, représentation. Colloquium de didactique des mathématiques 2008. In Coulange L., Hache C. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 7–29). Paris : IREM et ARDM. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR10001.pdf.