Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'UTILISATION DES DEGRÉS DE CERTITUDE COMME OUTIL DE PROFESSIONNALISATION EN FORMATION DES MAÎTRES DU PREMIER DEGRÉ

Michel DERUAZ[*] - Luc-Olivier BUENZLI[**]

Résumé – On attend des futurs enseignants du premier degré un changement de positionnement face aux mathématiques. Ils doivent, pendant leur formation, quitter le rôle d'élève qui attend une validation de son enseignant pour endosser celui moins confortable d'expert des mathématiques qui sera le sien dans sa classe. Pour favoriser cette transition, nous utilisons, dans un cours de formation initiale, des degrés de certitude lors de sondages construits à l'aide de QCM. Nous proposons, dans cette contribution, de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été menée pour évaluer les conséquences de l'utilisation de ces degrés de certitude sur la formation.

Mots-clefs: degrés de certitude, questions à choix multiples, mathématiques, formation des enseignants.

Abstract – On attend des futurs enseignants du premier degré un changement de positionnement face aux mathématiques. Ils doivent pendant leur formation quitter le rôle d'élève qui attend une validation de son enseignant pour endosser celui moins confortable d'expert des mathématiques qui sera le sien dans sa classe. Pour favoriser cette transition, nous utilisons dans un cours de formation initiale des degrés de certitude lors de sondages construits à l'aide de QCM. Nous proposons, dans cette contribution, de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été menée pour évaluer les conséquences de l'utilisation de ces degrés de certitude sur la formation.

Keywords: degrees of certainty, multiple-choice questions, mathematics, teacher training.

I. INTRODUCTION

1. *Notre positionnement didactique*

Pour commencer, nous allons, comme le demandent les coordinateurs, tenter d'expliciter notre vision de ce qu'est la didactique en disant quelques mots sur notre positionnement face à cette discipline, positionnement fortement lié à nos parcours professionnels. Avant d'intégrer l'équipe des formateurs de l'Unité de Recherche et d'Enseignement Maths Sciences (UER MS) de la Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP VD) pour participer à la formation des maîtres, nous avons une expérience d'enseignants; en mathématiques dans un Gymnase (Lycée) pour le premier auteur, à l'école primaire pour le second. Assez rapidement, nous avons éprouvé le besoin de compléter notre formation pour mieux comprendre les

[*] HEP Vaud – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch
[**] HEP Vaud – Suisse – luc-olivier.bunzli@hepl.ch

Deruaz M, Bünzli L.-O. (2015) L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation EN formation des maîtres du premier degré. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 95-107.

enjeux de la formation et essayer d'intégrer des éléments plus théoriques dans les cours; en suivant le *Master en didactique des disciplines Spécialité Professionnelle : Formation des formateurs* en mathématiques de l'Université Paris Diderot pour le premier auteur, un *Master en Sciences de l'Education* à l'Université de Genève pour le second. À la suite de ces formations, nous participons à des colloques et contribuons à des recherches, mais essentiellement avec un regard de formateur.

2. *Le contexte de cette contribution*

Cette contribution se situe dans la continuité de celle que nous avions présentée dans le groupe de travail GT1 à EMF 2012 (Deruaz & Clivaz 2012). Nous avions alors décrit la mise en place d'un cours de savoir disciplinaire dans le cadre de la formation initiale des maîtres du premier degré à la HEP VD.

En automne 2012, un nouveau plan d'études a été mis en œuvre pour la formation de ces maîtres. L'UER MS a reçu le mandat de proposer deux modules spécifiques à l'enseignement des mathématiques, l'un au deuxième et l'autre au cinquième semestre de formation. Lors de la conception de ces deux modules, nous avons essayé d'intégrer les conclusions des travaux du GT1 et plus particulièrement les remarques qui ont suivi notre présentation. Nous avons aussi évidemment tenu compte d'autres résultats obtenus dans le cadre d'une recherche dont l'objectif était d'évaluer la mise en oeuvre de notre cours de savoirs disciplinaires. En particulier en ce qui concerne l'utilisation d'une plateforme en ligne pour les exercices et l'utilisation de questions à choix multiples lors de la certification du module (Deruaz 2015).

Dans leurs conclusions, les coordinateurs du GT1 mettaient en évidence l'importance de l'articulation entre connaissances didactiques et connaissances mathématiques:

> Dans les analyses de pratiques d'enseignants, autant en contexte de formation (Deruaz, Passaro, Proulx) qu'en contexte d'enseignement (Clivaz), il n'était pas toujours facile de distinguer ce qui relevait d'une connaissance didactique ou d'une connaissance mathématique.
>
> À cet égard, les discussions ont fait ressortir l'intérêt de dissocier ces deux types de connaissances pour ensuite les faire fonctionner et les articuler. Il s'agit également de clarifier le rôle de la formation pour permettre cette articulation. (Clivaz, Proulx, Sangaré, & Kuzniak 2012, pp. 156-157)

Pour permettre à nos étudiants de faire plus facilement des liens entre les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et l'enseignement des mathématiques, nous proposons un module qui met en évidence cette articulation avec une partie *cours en amphithéâtre* sur les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement au sens de Ball et de son équipe (Ball, Thames & Phelps 2008), mais en intégrant le plus souvent possible des liens avec des tâches issues des moyens d'enseignement officiels (manuels). La partie *séminaires* (20 à 30 étudiants) a elle été construite à partir d'éléments estimés propices à faire des liens entre les contenus du cours et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Nous avons aussi décidé d'évaluer les contenus mathématiques et les contenus didactiques lors d'un seul examen construit à l'aide de QCM et en utilisant des degrés de certitude (Deruaz & Clivaz 2012). Dans cette contribution, nous allons essayer de montrer comment l'utilisation de degrés de certitude pendant le cours et lors de l'examen peut agir sur le positionnement des futurs enseignants du premier degré face aux mathématiques.

II. LA DESCRIPTION DU MODULE

Les objectifs de ce module et l'utilisation des degrés de certitude ont déjà été présentés dans des travaux antérieurs (Deruaz 2015, à paraître). Pour faciliter la lecture de cette contribution, nous avons estimé qu’il était important de les faire figurer dans ce texte, mais ce chapitre reprend très largement les textes cités ci-dessus.

1. Les objectifs de la formation

La plupart des étudiants qui choisissent cette formation viennent de filières non scientifiques du Gymnase. Leur posture est donc souvent celle d’un élève qui répond à une question qui lui a été posée et qui attend que sa réponse soit validée par un expert, en général son maître de mathématiques. Dans ses futures classes, même s’il s’en défend parfois, ce même étudiant sera l’expert en mathématiques qui devra se positionner face aux questions ou aux réponses des élèves. Ce rôle d’expert que doit exercer l’enseignant en mathématiques a été décrit par Robert, Lattuati et Penninckx (1999) pour ce qui concerne l’enseignement au lycée. Ces auteures définissent ce qu’elles nomment les *pratiques expertes* des mathématiciens à l’aide de cinq caractéristiques. La première de ces caractéristiques nous semble aussi adéquate pour les futurs experts des mathématiques de l’école primaire:

> La disponibilité des connaissances (le fait que des connaissances peuvent être utilisées à bon escient sans même avoir été rappelées), leur organisation et les rapports entre elles.
>
> Ce caractère disponible des connaissances de l’expert se traduit, par exemple, par sa capacité à pouvoir chercher systématiquement la solution d’un problème en dehors du strict cadre où il est posé, à essayer de mettre le problème en relation avec d’autres questions lorsque la solution n’est pas immédiate. Cette aptitude à réaliser des changements de perspectives, à pouvoir aller chercher d’autres savoirs que ceux qui étaient *a priori* en cause, traduit la disponibilité des connaissances chez l’expert. De plus, lorsque cette recherche n’est pas guidée par les termes apparents du problème, l’expert ne la conduit pas complètement au hasard: elle est orientée par l’organisation des connaissances dont il dispose. Nous insistons sur le fait que ce ne sont pas seulement les connaissances qui sont disponibles, mais aussi, et de manière intimement liée, les rapports entre ces connaissances.
>
> Cette disponibilité se traduit aussi par l’inscription (active et personnelle) de toute nouvelle connaissance dans les précédentes. (Robert & al. 1999, pp. 13-14)

De notre point de vue, cette disponibilité des connaissances, et surtout des rapports entre des connaissances qui ne semblent pas liées entre elles, sont fondamentaux dans le travail de l’enseignant de mathématiques. De nombreuses recherches (par exemple Vandebrouck 2008) montrent que ce n’est souvent pas le cas chez les enseignants débutants, même au niveau secondaire où les enseignants de mathématiques ont pourtant une formation académique importante dans cette discipline. On peut donc faire l’hypothèse que ce manque de disponibilité des connaissances et de certains liens entre elles est aussi présent chez les futurs enseignants primaires vaudois, dont le bagage mathématique ne dépasse pas celui enseigné à l’école secondaire.

Clivaz (2011) montre que cette disponibilité des connaissances et de certains liens entre elles, s’ils sont nécessaires pour le maître secondaire, sont aussi importants au niveau primaire. Ces concepts permettent notamment à l’enseignant de donner du sens aux savoirs qu’il enseigne et aux connaissances qu’il utilise pour préparer ses cours et pour gérer les situations didactiques en classe. Pour que les liens entre les différentes connaissances mathématiques soient disponibles à l’enseignant débutant, il est nécessaire qu’ils soient mis en évidence et travaillés pendant sa formation et que leur importance soit relevée tant dans la résolution de problèmes liés directement aux connaissances spécifiques travaillées dans le cours que dans des situations proches de celles qui seront vécues en classe. Or des travaux récents, notamment Clivaz et Deruaz (2013), Dias et Deruaz (2012) permettent d’affirmer que, pour une grande partie des étudiants futurs enseignants, ces liens ne sont pas disponibles.

Cette disponibilité des connaissances et des liens entre elles devrait non seulement permettre à l’enseignant débutant de préparer ses cours et de donner du «sens» à ce qu’il veut faire apprendre à ses élèves, mais elle devrait aussi lui permettre de se positionner sur des faits mathématiques. En effet, comme nous l'avons vu plus haut, dans la relation pédagogique, il sera l'expert et les élèves attendront de lui des réponses et des validations. Il faudra donc qu'il soit capable non seulement de donner une réponse ou de se positionner sur la réponse d'un élève, mais qu'il puisse évaluer son degré de certitude à propos de sa réponse pour décider s'il peut la fournir telle quelle aux élèves ou s'il doit se renseigner avant de le faire.

Pour se prononcer de manière définitive sur un résultat qu'il ne connaît pas encore, l'expert en mathématiques doit soit exhiber un contre-exemple, soit démontrer le résultat. Ce processus peut être long et n'est pas toujours possible en classe dans le feu de l'action. L'enseignant doit alors se contenter d'une estimation de la vérité du résultat, d'une preuve pragmatique et non formelle. Proposer une réponse n'est donc pas suffisant, on attend de l'enseignant qu'il puisse associer à sa réponse un niveau de certitude qui, évidemment, lui est propre.

2. *Les degrés de certitude*

Comment intégrer les objectifs de ce module, qui portent autant sur le positionnement face aux mathématiques et à leur enseignement que sur les contenus mathématiques eux-mêmes dans le processus de certification? Les forces de l'UER MS ne lui permettent pas de corriger de manière satisfaisante plus de 200 copies d'un examen écrit traditionnel dans les délais impartis. Elle a donc opté pour la réalisation d'un examen standardisé en utilisant des Questions à Choix Multiple (QCM) avec Degrés de Certitude (DC). Comme nous le disions déjà dans notre contribution à EMF 2012:

> «Ce n'est pas ce que nous ignorons qui nous cause des problèmes, mais ce que nous savons ... et qui est faux. Reconnaître (...) ses degrés d'incompétence est une habileté fondamentale, une compétence cruciale pour tout apprenant.» (Gilles 2010, p. 101). À la suite des travaux de Gilles, nous estimons qu'il est important, voire même essentiel pour un enseignant d'être capable d'estimer son degré de certitude par rapport à une affirmation qu'il peut être amené à faire, en particulier lorsqu'il répond à un élève ou lorsqu'il se positionne par rapport à une proposition d'un élève. L'ignorance ignorée est ainsi particulièrement dangereuse. Les DC permettent de tenir compte, dans le barème, de la certitude avec laquelle l'étudiant a choisi sa réponse parmi les solutions proposées. Nous avons donc utilisé les DC avec l'échelle donnée dans le tableau 1. (Deruaz & Clivaz 2012, p. 191)

Si vous considérez que votre réponse a une probabilité d'être correcte comprise entre	DC N°	Vous obtiendrez les points suivants en cas de réponse	
		correcte	incorrecte
0 % et 25 %	0	+13	+4
25 % et 50 %	1	+16	+3
50 % et 70 %	2	+17	+2
70 % et 85 %	3	+18	+0
85 % et 95 %	4	+19	-6
95 % et 100 %	5	+20	-20

***Tableau 1** – Échelle DC classiques (Gilles, 2010, p. 69)*

Les résultats de cette première expérience avec le cours de savoirs disciplinaires s'étant avérés globalement positifs (Deruaz 2015), il a été décidé de la prolonger dans le nouveau module, non seulement pour l'examen, mais également pendant les séances de cours dans le but de rendre actifs les étudiants et de les faire réfléchir sur les processus de vérification des résultats possibles ou non en fonction des questions posées; de leur faire prendre conscience qu'en mathématiques, dans la mesure du possible, on ne relit pas sa réponse, mais on la vérifie.

Nous proposons dans cette contribution de présenter les premiers résultats d’une recherche qui a été mise en œuvre pour essayer d’évaluer les conséquences de cette utilisation élargie des degrés de certitude sur le positionnement de nos étudiants face aux mathématiques.

III. L’UTILISATION DES DEGRES DE CERTITUDES PENDANT LE COURS

Les résultats ci-dessous ont été récoltés au printemps 2014. Le cours décrit est constitué de 12 séances de 90 minutes dont trois ont porté sur le thème de la logique et des ensembles. 360 étudiants étaient inscrits au cours et 350 se sont présentés à la session d’examen. Si la logique n’est pas enseignée à l’école primaire, le programme officiel mentionne dans son chapeau, sous «visées prioritaires»:

> Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace. (Plan d’étude romand 2010)

Plus loin dans le texte, on trouve des expressions du type «tri et organisation des informations (liste, schéma,…)», «déduction d’une information nouvelle à partir de celles qui sont connues» ou encore «vérification, puis communication d’une démarche (oralement) et d’un résultat en utilisant un vocabulaire ainsi que des symboles adéquats». Ceci dès les premières années de la scolarité. Pour reprendre la terminologie utilisée par Mesnil dans sa thèse (Mesnil 2014), il ne s’agit pas d’enseigner aux futurs enseignants de l’école primaire des bases de logique mathématique, mais de les sensibiliser à la logique des mathématiques.

Notre objectif est de leur préciser quelques notions comme la conjonction, la disjonction, la négation, l’implication et l’équivalence en mettant en évidence les liens avec la théorie des ensembles et les notions d’intersection, de réunion, d’inclusion ou de complémentarité, mais aussi les difficultés liées aux significations parfois différentes dans la langue naturelle (Mesnil 2014, pp.118-139). Dans un second temps, et c’est ce qui sera décrit dans les deux séances analysées plus précisément par la suite, nous cherchons à mettre en évidence quelques difficultés récurrentes comme:

1. Ce n’est pas parce qu’un résultat est vrai que le raisonnement qui a permis d’obtenir ce résultat est correct. Nous pouvons illustrer cela avec l’exemple ci-dessous sur lequel nous reviendrons dans notre analyse:

   Les canards sont des oiseaux,
   Or les palmipèdes sont des oiseaux,
   Donc les canards sont des palmipèdes.

   Les canards sont bien des palmipèdes, les deux prémisses et la conclusion sont vraies, mais la déduction n’est pas correcte.

2. Pour écrire la négation d’une conjonction (respectivement d’une disjonction), il faut prendre la disjonction des négations (respectivement des conjonctions).

Plusieurs auteurs ont déjà relevé ce type de difficultés, par exemple:

> Alors que les mots «et» et «ou» peuvent, dans certains cas, être dans la langue usuelle des opérateurs sur les propositions qui correspondent aux connecteurs ET et OU, il n’y a pas dans la langue française d’opérateur sur les propositions qui serait l’analogue du connecteur NON.

> Ainsi, là où la conjonction des propositions «n est pair» et «n est un multiple de 3» est «directement» la proposition «n est pair ET n est un multiple de 3», la négation de la proposition «n est pair», qui est à strictement parlé la proposition «NON(n est pair)», ne sera pratiquement jamais formulée ainsi; on dira plutôt éventuellement «n est non pair», ou plus souvent «n n'est pas pair» et même encore plus souvent «n est impair». (Mesnil, 2014, p 122)

Une autre difficulté est liée à une *mise en facteur*, dans le langage courant, du sujet et du verbe dans le but d'alléger le texte. Par exemple dans la phrase «j'ai mangé du riz et du poulet» que l'on doit développer en «j'ai mangé du riz et j'ai mangé du poulet» avant de pouvoir en prendre la négation qui est «je n'ai pas mangé de riz ou je n'ai pas mangé de poulet».

1. Une première séance de cours

Pendant le cours, nous affichons des questions sur l'écran de projection et nous demandons aux étudiants d'y répondre sur la plateforme moodle à l'aide de leur téléphone portable, tablette ou ordinateur. Tous les étudiants ne répondent pas, mais nous arrivons, en général, à obtenir plus de 200 réponses. Nous avons utilisé ce procédé pour la première fois au tout début de la seconde séance de cours en posant deux questions relatives à l'affirmation ci-dessous:

Les carrés ont quatre côtés de même longueur,
Or les losanges ont quatre côtés de même longueur,
Donc les carrés sont des losanges.

A la question *le raisonnement ci-dessus est il correct?,* 66% des étudiants ont répondu positivement et à la question *les carrés sont-ils des losanges?,* 45% des étudiants ont répondu positivement. On remarque donc qu'à ce moment-là du cours, beaucoup d'étudiants ne maîtrisent pas l'enchaînement de propositions logiques et qu'une partie non négligeable (nécessairement plus de 20%) de ces étudiants prétendent que le raisonnement est correct, mais contredisent ensuite la conclusion de ce même raisonnement en affirmant que les carrés ne sont pas des losanges! Evidemment ces deux questions mettent en évidence plusieurs difficultés au niveau de la logique des mathématiques; il y a la non correction de l'enchaînement logique et le fait que si formellement les carrés sont des losanges, à l'école primaire ce n'est pas nécessairement le cas! Nous estimons toutefois qu'il est important que l'enseignant de l'école primaire sache que si dans sa classe les carrées ne sont pas nécessairement des losanges pour les élèves, lorsque ceux-ci seront à l'école secondaire, alors les carrés seront des losanges. Les bonnes réponses n'ont pas été données aux étudiants. Il leur a simplement été dit que cela serait repris à la fin de la séance.

Lors de cette même séance de cours, après avoir travaillé un moment sur la différence entre appartenance à un ensemble et inclusion d'un sous-ensemble dans un autre sous-ensemble d'un même ensemble, on a proposé le syllogisme ci-dessous comme exemple d'introduction:

Les chiens sont des mammifères,
Or les mammifères sont des animaux,
Donc les chiens sont des animaux.

En l'illustrant avec un diagramme de Venn. Immédiatement après, nous avons proposé un nouveau sondage en introduisant cette fois des degrés de certitude en proposant le syllogisme ci-dessous:

Les truites sont des poissons,
Or les poissons savent nager,
Donc les truites savent nager.

A la question *le syllogisme est-il correct*?, nous avons obtenu 98% de réponses positives avec une répartition des degrés de certitude donnée dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
0%	3%	5%	18%	23%	52%	88,8%

***Tableau 2** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On observe donc que lorsqu'il s'agit d'appliquer directement un résultat qui vient d'être vu, les étudiants le font correctement et utilisent majoritairement des degrés de certitude élevés.

Après avoir discuté quelques minutes de ces résultats avec les étudiants, on a proposé le sondage suivant:

Les canards sont des oiseaux,
Or les palmipèdes sont des oiseaux,
Donc les canards sont des palmipèdes.

A la question *le syllogisme est-il correct?*, nous avons obtenu 26% de réponses positives avec une répartition des degrés de certitudes données dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
0%	5%	9%	21%	24%	41%	85,2%

***Tableau 3** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On observe que lorsqu'il ne s'agit plus d'une application simple du résultat précédent, environ un quart des étudiants se retrouvent en difficulté et que, même s'ils sont un peu moins élevés, les degrés de certitude utilisés par les étudiants à ce sondage sont proches de ceux utilisés lors du sondage précédent.

Nous avons ensuite discuté avec les étudiants, notamment à l'aide du syllogisme ci-dessous:

Les canards sont des oiseaux,
Or les pingouins sont des oiseaux,
Donc les canards sont des pingouins.

Cet exemple nous permet d'insister sur le fait que ce qui nous intéresse n'est pas la validité de la troisième affirmation, mais la correction de l'enchaînement entre les prémisses et la conclusion. Nous avons alors pris une trentaine de minutes pour rappeler aux étudiants les définitions des quadrilatères usuels ainsi que quelques propriétés de ces quadrilatères. Avant de terminer cette seconde séance de cours, nous avons proposé un dernier sondage aux étudiants:

Les carrés ont quatre côtés de même longueur,
Or les losanges ont quatre côtés de même longueur,
Donc les carrés sont des losanges.

Nous leur avons alors uniquement demandé si ce syllogisme était correct et nous avons obtenu que 42% de réponses affirmatives ce qui est meilleur que les 66% obtenus lors du premier sondage, mais nettement moins bien que les 26% obtenus lors du troisième sondage pour lequel la structure logique était identique. Nous pouvons constater que les étudiants ont plus de difficultés à appliquer ces raisonnements logiques lorsque le contexte est géométrique que lorsqu'il est indépendant des mathématiques. Ce n'est pas surprenant car s'ils savent probablent tous que les canards sont des palmipèdes, ils hésitent encore sur les inclusions entre les différents ensembles de quadrilatères pour lesquelles les règles sont différentes dans le contexte du cours de mathématiques que ce qu'ils utilisent en dehors du cours. Ils ne peuvent donc pas se fier à leur intuition. C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles nous utilisons ces exemples, car nous faisons l'hypothèse que s'ils ne peuvent plus se fier à leur intuition, ils seront le plus enclins à utiliser les outils de la logique des mathématiques que nous leur proposons. Pour ce qui est des degrés de certitude, nous avons obtenu les résultats ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
1%	3%	15%	25%	18%	38%	83,1%

Tableau 4 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On ne peut que constater que, lors de cette première séance dans laquelle les DC sont utilisés et sur ce chapitre particulier, les DC choisis par les étudiants sont très stables, ceci même pour des questions pour lesquelles les taux de réussite sont relativement différents. Nous relevons toutefois qu'il s'agit de la première utilisation des degrés de certitude dans ce module et que nous les proposons sur des contenus nouveaux et difficiles pour lesquels les étudiants n'ont, pour l'instant pas beaucoup d'outils de vérification à disposition.

A l'issue de la séance, nous avons mis à la disposition des étudiants un test en ligne composé de QCM avec degrés de certitude pour leur permettre de s'exercer. Ils avaient en particulier la possibilité d'effectuer plusieurs fois le test pour mesurer l'impact du choix des degrés de certitude sur la note obtenue.

2. *Une deuxième séance de cours*

En analysant les résultats d'un pré-test qui a été proposé aux étudiants avant la première séance de cours, nous avons observé qu'à la question:

Je suis une fille et je n'ai pas les yeux bleus
Quelle est la négation de cette phrase?
Veuillez choisir une réponse:

1. *Je suis une fille et j'ai les yeux bleus*
2. *Je suis un garçon et je n'ai pas les yeux bleus*
3. *Je suis une fille ou j'ai les yeux bleus*
4. *Je suis un garçon ou j'ai les yeux bleus*

Seuls 41% des étudiants ont répondu correctement. C'est à la suite de ce constat que nous avons proposé, au début de cette séance de cours qui allait en particulier porter sur la négation d'une affirmation et le complémentaire d'un sous-ensemble, le sondage qui suit:

La négation de l'affirmation

Alice est drôle et Bill le lézard n'est pas lourd

est la proposition

1. Alice est drôle et Bill le lézard est lourd
2. Alice n'est pas drôle et Bill le lézard est lourd
3. Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard n'est pas lourd
4. Bill le lézard est lourd ou Alice n'est pas drôle

5. Bill le lézard n'est pas lourd et Alice est drôle
6. Aucune de ces propositions.

Nous avons alors obtenu les résultats suivants:

1	2	3	4	5	6
2%	57%	7%	19%	8%	7%

Tableau 5 *– Réponses choisies par les étudiants*

On constate que le taux de réponses correctes (19%) est encore plus faible que lors du pré-test. Ceci est peut-être dû au fait que certains étudiants cherchaient la réponse *Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard est lourd* et ont ainsi choisi la réponse *aucune de ces propositions*. Mais même en ajoutant ces deux résultats, on obtient un résultat (26%) encore inférieur à celui obtenu lors du prétest (41%). Le fait que la phrase de départ ne soit pas habituelle a peut-être perturbé certains étudiants qui ont répondu spontanément de manière correcte lors du pré-test et qui ont cherché à utiliser un modèle mathématique qu'ils ne maîtrisent pas encore lors du sondage pendant le cours. Lors du pré-test, le feed-back proposé aux étudiants était simplement vrai ou faux, mais ne donnait pas la réponse correcte. Il est possible que certains étudiants qui étaient convaincus par leur réponse incorrecte ont été déstabilisés et ont répondu au hasard lors du sondage, pour lequel nous avons obtenu les degrés de certitude ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
7%	13%	24%	26%	17%	13%	68,1%

Tableau 6 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On constate que les étudiants ont globalement choisi des degrés plus prudents que lors de la séance de cours précédente. Il est possible que cela soit lié à leur première expérience et à leur entraînement à l'utilisation des degrés de certitude, mais il est aussi possible que cela soit lié au fait qu'une question analogue qui n'avait pas donné de bons résultats a été posée lors du pré-test. Pour répondre partiellement à cette interrogation, nous avons proposé un sondage avec une question d'une autre nature immédiatement derrière ce premier sondage:

Effectuer la soustraction 1011010 - 649709.
Dans quelle boîte se trouve le résultat?

A	B	C	D	E
2 0 0 6 9 1	2 0 5 3 5 1	2 1 5 0 5 1	2 4 4 7 2 1	2 5 0 2 6 1
2 1 8 9 6 1	2 2 3 8 7 1	2 5 7 6 8 1	2 6 3 9 2 1	2 6 3 6 8 1
2 4 4 4 4 1	3 0 9 5 9 1	3 0 4 6 0 1	3 4 2 2 9 1	2 8 9 3 0 1
2 5 1 7 4 1	3 1 6 9 7 1	3 0 8 5 3 1	3 6 1 3 0 1	3 2 4 9 4 1
3 1 4 9 7 1	3 5 5 5 1 1	3 1 2 0 6 1	3 6 9 9 8 1	3 3 5 9 7 1
3 5 6 0 0 1	3 7 7 4 5 1	3 6 9 9 6 1	3 9 3 3 2 1	3 6 9 2 1 1

Le passage par les boîtes est ici nécessaire pour que les étudiants ne puissent pas transformer ce problème de soustraction en un problème d'addition à partir des solutions proposées. Par contre, ils peuvent, une fois qu'ils ont trouvé un résultat à cette soustraction, le vérifier à l'aide d'une addition. Dans ce cas, ils ont utilisé un outil d'expert qui leur permet de choisir un degré de certitude plus élevé que s'ils avaient uniquement effectué la soustraction, sans possibilité de la vérifier.

Il se trouve que 89% des étudiants qui ont répondu à cette question y ont répondu correctement. Un certain nombre d'étudiants n'ont pas eu le temps d'y répondre. Les degrés de certitude utilisés par les étudiants sont mentionnés dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
3%	3%	7%	13%	16%	58%	86,7%

***Tableau 7** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

Nous constatons donc que si nous proposons aux étudiants une tâche simple et isolée pour laquelle un certain nombre d'entre eux a la possibilité de vérifier son résultat, ils choisissent des degrés de certitudes plus élevés, même si la question n'a pas été travaillée pendant le cours. Nous avons ensuite commenté ces résultats auprès des étudiants et mis en évidence la possibilité de vérification offerte par cette question.

Nous avons alors travaillé sur le complémentaire d'un sous-ensemble et mis en évidence les lois de De Moivre $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ sans faire le lien avec les négations d'une conjonction ou d'une disjonction.
Puis nous avons reproposé le premier sondage aux étudiants:

La négation de l'affirmation

Alice est drôle et Bill le lézard n'est pas lourd

est la proposition

1. Alice est drôle et Bill le lézard est lourd
2. Alice n'est pas drôle et Bill le lézard est lourd
3. Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard n'est pas lourd
4. Bill le lézard est lourd ou Alice n'est pas drôle
5. Bill le lézard n'est pas lourd et Alice est drôle
6. Aucune de ces propositions.

Nous avons alors obtenu les résultats ci-dessous:

	1	2	3	4	5	6
Sondage 1	2%	57%	7%	19%	8%	7%
Sondage 3	1%	20%	13%	61%	4%	1%

***Tableau 8** – Réponses choisies par les étudiants*

Nous pouvons constater qu'une partie importante des étudiants ont su interpréter les résultats ensemblistes mis en évidence pendant le cours dans le contexte équivalent, mais différent de la logique. Au niveau des degrés de certitude, nous obtenons les résultats ci-dessous:

	0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
1	7%	13%	24%	26%	17%	13%	68,1%
3	5%	6%	19%	21%	23%	27%	76,7%

***Tableau 9** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On constate qu'un certain nombre d'étudiants a choisi des degrés de certitude plus élevés après avoir suivi le cours qu'avant, ce qui laisse penser qu'ils sont plus sûrs de leur réponse. Malheureusement, les outils que nous avons à disposition pour effectuer nos sondages ne nous permettent pas de relier le degré de certitude utilisé par un étudiant avec la réponse qu'il a choisie. Nous ne pouvons donc pas savoir si, individuellement, les étudiants utilisent les degrés de certitude de manière performante, ce que nous pouvons par contre faire lors de l'examen. (Deruaz à paraître)

Si nous reprenons le contenu de cette seconde séance de cours, nous pouvons constater que, dans un premier temps la plupart des étudiants ne savent pas retrouver la négation d'une conjonction et que même s'ils utilisent les degrés de certitude de manière plus prudente que lors du cours précédent, cette utilisation n'est pas encore optimale. Pendant le cours, mettons en évidence que dans certains cas, il y a des possibilités de vérifier son résultat et d'ainsi pouvoir choisir des degrés de certitudes plus élevés. Nous montrons ensuite que dans le cas de la négation d'une conjonction, on peut se référer à un résultat général (formule de De Moivre) qui peut s'énoncer dans le cadre de la logique ou dans celui de la théorie des ensembles. Nous montrons aussi que si l'on passe dans le cadre de la théorie des ensembles, il y a une possibilité relativement simple de retrouver cette formule en hachurant des diagrammes de Vienne. En procédant ainsi, nous mettons en évidence des liens entre différentes connaissances provenant de cadres différents, mais voisins. Ce passage entre le cadre de la logique et celui de la théorie des ensembles est un outil souvent utilisé par le mathématicien expert pour répondre rapidement à une question ou pour valider sa première réponse en utilisant les outils d'un autre cadre. Nous faisons l'hypothèse que la mise à disposition d'un résultat décontextualisé (formule de De Moivre), mais aussi la mise en évidence de l'opportunité du changement de cadre et ainsi la possibilité de répondre à une même question avec plusieurs outils différents devraient petit à petit permettre aux étudiants de changer de posture face aux mathématiques et de prendre le risque de se positionner en expert et de ne plus systématiquement aller chercher un résultat dans sa mémoire.

D'autres analyses des résultats des examens (Deruaz à paraître) mettent en évidence le fait que les étudiants choisissent des DC plus élevés lorsque les tâches sont simples et isolées (Robert 2008, p. 49) ou lorsque des outils de vérification sont à disposition que pour les autres questions.

IV. CONCLUSION

Dans une étude qui questionne les effets des modalités d'évaluation sur le rapport au savoir et à la formation de futurs enseignants du premier degré, Breithaupt et Clerc-Georgy interrogent des étudiants sur leur perception de deux examens, dont celui du module décrit dans cette contribution.

> Céline aime beaucoup les maths. Elle est *plus mathématique que langues*. Elle se souvient avoir *fait beaucoup de méthodes pour trouver la réponse*, au moins deux ou trois méthodes (…). Pour l'examen de maths le procédé [utilisation des DC] lui semble logique, car les mathématiques sont vérifiables. (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître)

Céline indique spontanément le lien entre une utilisation, pertinente de son point de vue, des degrés de certitude et des possibilités de vérification qu'offrent les mathématiques de vérifier ces résultats en utilisant des méthodes différentes pour les obtenir.

Dans son entretien, une autre étudiante, Marie, insiste sur le fait qu'elle a eu une histoire particulière avec les mathématiques. «Elle a *toujours fait partie des nuls en maths, des filles qui avaient peur des maths, qui n'étaient pas bonnes*. Elle a entendu *des milliers de profs* lui dire "*Mais enfin, fais un effort, c'est logique*".» (Op. cité). Elle met toutefois aussi en évidence le lien entre outils de vérification et choix du degré de certitude.

> Le fait d'être capable de vérifier plusieurs fois ses réponses permet à Marie d'indiquer de hauts degrés de certitude, exception faite des questions de contenus didactiques. (…). *Pour les maths c'est plus logique, ça reste du calcul, c'est juste c'est faux, il n'y a pas d'entre-deux.* (…) Indiquer un haut degré de certitude signifie être *convaincue*, ce qui ne peut se faire sur des questions didactiques où il faudrait *suivre la première intuition, c'est souvent la bonne*. Le fait de ne pas pouvoir vérifier, le fait de ne pouvoir être sûre malgré les relectures engendrent de l'incertitude. (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître)

Ce témoignage montre que Marie a changé de posture face aux mathématiques entre le début et la fin du module. Elle a acquis des outils d'expert, puisqu'elle cherche à vérifier ses résultats lorsque c'est possible. Peut-être que l'utilisation des degrés de certitude pendant le cours a contribué à cette évolution, non seulement chez Marie, mais chez une partie des étudiants qui ont suivi ce module et donc que nous avons au moins partiellement atteint cet objectif. Nous avons pu mettre ne évidence dans un autre article (Deruaz à paraître), une utilisation plus pertinente des degrés de certitude lors de l'examen qui a suivi le cours de 2014 (celui dont nous traitons dans cette contribution) que dans le cours de 2013 lors duquel nous avions beaucoup moins utilisé des sondages avec degrés de certitude pendant le cours, mais nous n'avons pas d'outils qui nous permettent d'affirmer que l'un est une conséquence directe de l'autre mêm si c'est le seul changement significatif qu'il y a eu entre les deux occurrences du cours. Par ailleurs, les résultats de 2014 ont été confirmés en 2015 avec une organisation similaire du cours. Pour étayer notre propos, nous pouvons aussi signaler que dans le cadre de la HEP VD, un autre examen utilise les degrés de certitude. Il s'agit un examen mis en place pour tester les compétences des étudiants en français comme langue de communication qui doit être réussi par tous les étudiants de l'école pendant leurs études. Lors de leurs études, alors qu'aucune question ne portait sur cet examen, Breipthaupt et Clerc Georgy (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître) ont relevé que tous les étudiants interrogés ont mentionné la différence qu'il y avait dans l'utilisation des degrés de certitude en mathématiques et en français et à quel point il la trouvait peut justifiable dans le cas de l'examen de français lors duquel ils n'ont pas d'outils de vérification à disposition.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Breithaupt S., Clerc-Georgy A. (à paraître) Effets des modalités d’évaluation sur le rapport au savoir des étudiants en formation à l'enseignement. *Mesure et Evaluation en Education*.

CIIP (2010) *Plan d'études romand.* CIIP: Neuchâtel. Retrieved from https://www.plandetudes.ch

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l’influence des connaissances mathématiques d’enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l’école primaire.* (Thèse de doctorat), Université de Genève, Genève. Retrieved from http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Clivaz S., Deruaz M. (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N* 91, 15-33.

Clivaz S., Proulx J., Sangaré M. S., Kuzniak, A. (2012) *Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement. Pratiques et formation.* Paper presented at the Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012, Geneva.

Deruaz M. (2015) Un dispositif pour évaluer des savoirs mathématiques au début, pendant et à la fin d'un module de formation. In Blais J-G., Gilles J.-L., Tristan-Lopez A. (Eds.), *Évaluation des apprentissages et technologies de l'information et de la communication: Bienvenue au 21e siècle* (Vol. 3, pp. 77-111). Berne: Peter Lang.

Deruaz M. (à paraître). Une utilisation des degrés de certitude en formation des maîtres du premier degré. *Mesure et Evaluation en Education*.

Deruaz M., Clivaz S. (2012) *Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires.* Paper presented at the Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012, Geneva.

Dias T., Deruaz M. (2012) Dyscalculie: et si les enseignants reprenaient la main? *A.N.A.E. approche neuropsychologique des apprentissages chez l’enfant,* 120-121.

Gilles J.-L. (2010) *Qualite Spectrale Des Tests Standardisés Universitaires*. Saarbrücken: Editions Universitaires Européennes.

Mesnil Z. (2014) *La logique: d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement.* Université Paris Diderot: Paris. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281v3

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-57). Toulouse: Octarès.

Robert A., Lattuati M., Penninckx, J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée: un point de vue didactique*. Paris: Ellipses.

Vandebrouck F. (Ed.). (2008) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.