Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ARTICULATIONS, DIALECTIQUES ET INTERACTIONS ENTRE MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES: ORIGINES ET ÉTATS DU DOMAINE D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Compte-rendu du Groupe de Travail n°1

Lalina COULANGE[*] – Christine DEL NOTARO[**] – Jérôme PROULX[***]

I. INTRODUCTION

Le thème de ce groupe de travail était relativement nouveau. L'articulation des connaissances mathématiques et didactiques avait certes été au cœur du travail du GT1 d'EMF 2012 mais uniquement dans sa dimension liée la formation mathématique des enseignants (Clivaz, Proulx & Sangaré, 2012). Il nous est apparu intéressant d'adopter dans le cadre de ce nouvel EMF 2015 une perspective plus ouverte sur les articulations, les dialectiques et les interactions entre mathématiques et didactiques, qui ne soit pas uniquement relative à des problématiques de formation d'enseignants, et qui soit à même de problématiser des questions épistémologiques sur le domaine de recherche en didactique des mathématiques, sur sa genèse et/ou ses évolutions.

Un total de 9h de travail suivant 5 séances ont permis à un petit groupe de participants (d'une dizaine de personnes sur la première séance) de travailler dans un esprit collaboratif. La première plage de travail a été consacrée à une relecture (par binôme) de textes et à une élaboration de questions aux communicants dont ils pouvaient se saisir lors de leurs présentations. Ce dispositif de travail de questions a semble-t-il été globalement apprécié par les participants et/ou les communicants (qui ont vraiment joué le jeu de participer à rédiger des questions et/ou d'apporter des éléments de réponse aux questions posées à l'occasion de leurs présentations). Cinq présentations de travaux ont ensuite été faites sur la base des communications acceptées dans le groupe de travail. Si on a pu regretter que les participants aient été assez peu nombreux, la diversité des profils représentés dans ce petit groupe de travail (7 didacticiens, 2 mathématiciens, 1 historienne) ont permis des échanges

[*] Université de Bordeaux et ESPE d'Aquitaine – France – lalina.coulange@espe-aquitaine.fr
[**] Université de Genève – Suisse – christine.delnotaro@unige.ch
[***] Université du Québec à Montréal – Canada – proulx.jerome@uqam.ca

Coulange L., Del Notario C., Proulx J. (2105) Articulations, dialectiques et interactions entre mathématiques et didactique en didactique des mathématiques: origines et états du domaine d'étude et de recherche - *Compte rendu du Groupe de Travail n°1.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 67-72.

particulièrement riches en réaction aux présentations et/ou plus généralement sur la thématique annoncée du GT1.

II. L'APPEL DE TEXTES INITIAL ET SA REALISATION

La question de l'articulation entre mathématiques et didactique nous semblait pouvoir intéresser la communauté internationale de didactique des mathématiques (mais aussi d'autres chercheurs, tels des mathématiciens et des historiens des mathématiques). Trois axes de travail complémentaires ont été projetés en amont de ce groupe.

Le premier axe très large concernait la nature de la didactique des mathématiques (son origine, sa source, son émergence, ses contextes institutionnels, etc.). En plus d'offrir un point de vue épistémologique sur ce champ d'étude et de recherche, pour mieux saisir son (ou ses) identité(s), cette entrée quelque peu historico-culturelle avait pour but de discuter les interactions entre didactique des mathématiques et mathématiques et le rôle de ces interactions dans l'émergence du champ de recherche didactique. Le deuxième axe abordait la question de la didactique des mathématiques « aujourd'hui », soit sa nature, ses intentions, ses enjeux et ses orientations contemporaines. Ce deuxième axe concernait également les interactions entre des dimensions mathématiques et didactiques dans les travaux de recherche actuels en didactique des mathématiques. Le troisième axe (davantage en continuité du GT1 de EMF 2012) abordait la question des incidences des interactions entre mathématiques et didactique des mathématiques pour la formation des enseignants.

Dans les faits, les contributions qui ont nourri le travail du groupe ne s'inscrivent pas de manière explicite dans un axe donné. Quatre communications se situent davantage à l'articulation des axes 1 et 2 (sur l'épistémologie et les évolutions du champ de recherche en didactique), tout en recouvrant une diversité d'apports.

La contribution de Mopondi & al. se centre *a priori* sur un objet de savoir mathématique précis (les équations) à enseigner au niveau du secondaire : la présentation a offert l'occasion d'échanger sur des descriptions possibles didactiques et/ou mathématiques de cet objet, et même plus généralement du thème d'étude afférent (l'algèbre). Qu'est-ce qui caractérise l'algèbre et/ou les savoirs algébriques selon différents points de vue : en didactique, en mathématiques et/ou en histoire des mathématiques ?

Les contributions d'Artigue et de Dorier se situent toutes deux à une autre échelle (plus macro-didactique), avec un point de vue davantage surplombant. La communication de Dorier questionne les relations possibles entre l'épistémologie des mathématiques, les mathématiques et certains des courants fondateurs théoriques de la didactique des mathématiques (ce qui a permis de revenir aux « origines du champ didactique »). La présentation a permis d'ouvrir sur des échanges pour de nouvelles articulations possibles. Celles-ci pourraient prendre appui sur l'actualité des recherches en histoire des mathématiques qui tend à rapprocher ce champ de recherche davantage de la didactique (avec des études en histoire des mathématiques à même de nourrir une étude en didactique et/ou inversement) du fait de questions de recherche communes dans l'étude du développement des connaissances mathématiques ou des conditions de leur développement (sociétales ou institutionnelles).

La communication d'Artigue retrace un historique éclairant des configurations et reconfigurations des paysages des communautés de recherche en didactique et en mathématiques. Sa présentation a permis d'ouvrir sur la possibilité d'envisager de nouvelles relations entre les mathématiques et la didactique des mathématiques qui tiendraient compte des évolutions des recherches (en didactique, en mathématiques, en histoire des mathématiques). Il s'agit d'investir des recherches sur des objets communs qui occasionnent des pratiques partagées de mathématiciens, d'historiens des mathématiques et de didacticiens et qui permettent d'expérimenter la valeur ajoutée des complémentarités de ces champs de recherche. Par exemple, des questions liées à la popularisation et/ou la vulgarisation des mathématiques, à l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques dans la transition lycée – université (y compris dans des filières non scientifiques) peuvent représenter des thématiques de recherche porteuses dans ce sens. Pour que de telles pratiques collaboratives voient le jour, la communauté des chercheurs didacticiens doit veiller à renforcer la communication de ses travaux de recherche à l'extérieur du seul champ de la didactique des mathématiques.

Deux communications s'inscrivent davantage dans le troisième axe thématique annoncé. Les communications de Coulange & Robert et de Deruaz & Buenzli renouvellent des questions abordées dans le GT1 précédent en envisageant sous un jour nouveau les relations entre les mathématiques et la formation des enseignants du primaire et du secondaire. Elles ont permis aux participants du groupe de formuler des questions communes au regard des contextes différents de formation évoqués de formation initiale d'enseignants du secondaire et du primaire. La réflexion théorique engagée dans la contribution de Coulange & Robert et le dispositif de formation initiale élaboré et mis en œuvre dans Deruaz & Buenzli reposent sur un pari commun : celui d'un enrichissement réciproque entre mathématiques et didactique des mathématiques dans la formation. La didactique fournit ainsi des outils à la fois théoriques et méthodologiques à même de fonder des dialectiques productives entre les mathématiques et la didactique dans la formation des futurs enseignants du primaire ou du secondaire. Les discussions qui ont suivi les présentations ont porté sur ce qui pouvait fonder de tels cercles vertueux et, par là-même, de conforter la part des mathématiques dans l'activité enseignante.

III. AU FIL DES ECHANGES…

Il serait difficile de retracer les échanges particulièrement riches dans le cadre de ce « petit » groupe de travail. Toutefois, nous pouvons citer quelques-unes des questions qui se sont posées « au fil des échanges » et qui illustrent selon nous la richesse des discussions au sein du GT :

- L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre : en quoi les situations de dénombrement et/ou géométriques peuvent-elles constituer des « bons objets » pour le développement des connaissances algébriques (à la fois d'un point de vue historique et didactique) ? En quoi le « retournement » de formules algébriques, qui convoque le caractère réversible de certaines opérations numériques, représente-t-il un saut conceptuel dans l'activité mathématique ? Comment caractériser les relations entre les opérations (comme la multiplication) et des lois de composition externes ou internes, des dimensions d'espaces vectoriels, et ce, à la fois d'un point de vue mathématique et didactique ?
- L'évolution des pratiques sociales ou mathématiciennes des mathématiques : par exemple en géométrie, comment prendre en compte des changements probables de pratiques sociales d'appréhension et de modélisation de l'espace ? Comment prendre en charge ces évolutions des pratiques mathématiques ou mathématiciennes dans la recherche en mathématiques et en didactique des mathématiques ?
- Les pratiques enseignantes et la formation des enseignants : en quoi des éléments relatifs aux différents raisonnements mathématiques et à la mise en forme de ces raisonnements peuvent-ils se constituer en obstacle dans l'activité enseignante (avec

des phénomènes de tension entre la « forme » et le « fond » au sein de la classe de mathématiques) ? Quelles sont les conditions nécessaires (voire suffisantes) pour une formation initiale (ou continue) d'enseignants à même de conforter ou de renforcer la part mathématique des pratiques enseignantes ?

IV. CONCLUSIONS : PERSPECTIVES POUR UN FUTUR ESPACE DE TRAVAIL COLLABORATIF

Ce groupe de travail nous a semblé très attendu au sein d'un colloque tel que EMF 2015, qui offre la possibilité de temps de travaux communs pour les chercheurs didacticiens, historiens ou mathématiciens, formateurs ou enseignants de mathématiques. Malgré un petit nombre de participants, il a de fait permis des échanges très intéressants et prometteurs que nous avons essayé de retracer brièvement ci-avant. Pour autant, au regard du projet ambitieux que recouvrait l'appel à contribution, on peut en retirer l'impression qu'on « l'attend toujours »…

L'intérêt du travail conduit lors des différentes séances a résidé, en partie, dans les croisements de points de vue entre didacticiens, mathématiciens et historiens des mathématiques sur des objets d'étude possiblement partagés. Plus qu'un espace visant à interroger les articulations entre mathématiques et didactique dans le champ de recherche en didactique des mathématiques, ou pour interroger l'épistémologie de ce champ, c'est peut-être un espace de travail plus ouvert et collaboratif entre les différentes communautés de recherche (en mathématiques, en didactique et en histoire des mathématiques, voire en philosophie des sciences) qu'il s'agit de projeter pour le prochain colloque d'EMF. Les participants du groupe semblaient converger sur ce point. Toutefois, un tel espace de travail partagé ne prend pas nécessairement la forme d'un GT avec appel à communication, du fait de l'absence de travaux de recherche centrés à ce jour sur de telles questions. Cela semble nécessiter d'identifier en amont des chercheurs didacticiens, mathématiciens, historiens ou philosophes potentiellement intéressés et se situant déjà soit de par des premiers travaux collaboratifs, soit de par leurs engagements (par exemple, au sein d'associations) à la croisée de différents champs de recherche en lien avec les mathématiques et leur diffusion, et à même d'impulser ou de coordonner ce type de collaborations. Ces regards croisés peuvent davantage prendre la forme d'une table ronde ou d'un projet spécial, avec un travail à mener en amont pour poser les jalons d'une discussion à venir sur cette thématique, dans le contexte de l'Espace Mathématique Francophone. Une enquête préalable visant à renseigner les collaborations existantes à ce jour ou permettant d'identifier des axes communs de recherche à la croisée de ces différents champs de recherche peut également constituer une voie intéressante. Précisons, enfin, que rien n'empêche en parallèle de ce travail collaboratif de projeter un Groupe de Travail qui se situe davantage en continuité des précédents GT1 : sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques des enseignants dans les pratiques enseignantes et dans leur formation.

LISTE DES CONTRIBUTIONS

Artigue, M. : Didactique des mathématiques et mathématiques : des relations à la fois cruciales et problématiques, culturellement situées.

Coulange, L., Robert, A. : Les mathématiques dans les activités du professeur – conséquences pour la formation.

Deruaz, M., Buenzli, L-O. : L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation en formation des maîtres du premier degré.

Dorier, J-L. : Dimensions épistémologique de la didactique des mathématiques.

Hategekimana Luanda, E. : De la contextualisation à la décontextualisation des connaissances mathématiques en milieu scolaire.

Mopondi Bendeko Mbunbu, A.., Moleka Batumbi, O., Mugaru Dawa, B.: Évolution de l'enseignement de la notion d'équation en République Démocratique du Congo : établissement de la capitale Kinshasa

REFERENCES

Artigue M., Douady R. (1986) Histoire de la didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie* 76, 69-88.

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 1(1), 61- 80.

Bloch I. (1997) Connaissances mathématiques de l'enseignant pour l'enseignement. *Petit x*, 45, 5-24, IREM de Grenoble.

Bulf C., Coulange L. (2012) Usages de la théorie des situations didactiques dans la formation en mathématiques de futurs professeurs des écoles. In Elalouf M., Robert A., Belhadjin A., Bishop M.-F. (Eds.), *Les didactiques en question(s), Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation*. De Boeck, Coll. Perspectives en éducation et formation.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brun J. (1994) Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France***.** Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1981) *La Transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat, Université de Genève.

Clivaz S, Proulx J., Mamadou S. S. (2012). Synthèse du GT#1 – Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2012)*. Genève, Suisse. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Didactique des mathématiques*. Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Del Notaro C. (2013) Colloque *Circulation des savoirs entre recherche et formation* - IUFM de Saint-Germain-en-Laye, 29-30 mai 2013 « Quelle circulation des savoirs entre une tâche issue de la recherche et son application en formation initiale ? »

Houdement C. (2013) *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherches en didactique des mathématiques*. Note de synthèse en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Paris Diderot.

tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/95/71/66/PDF/Houdement_hdr.pdf

Martinand J.-L. (1993) Organisation et mise en oeuvre des contenus d'enseignement. *Actes de colloque Recherches en didactiques: contribution à la formation des maîtres, 13-15 février 1992* (pp. 25-26). Paris: Éditions Jacques Colomb.

Moon B. (1986) *The 'new maths' curriculum controversy: An international story.* London : Falmer Press.

Proulx J., Corriveau C., Squalli H. (2012) *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, orientations et recherches.* Presses de l’Université du Québec.

Proulx J. (2012) De l’existence de mathématiques de la didactique : Réflexions sur l’articulation entre mathématique et didactique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF-2012*. Genève, Suisse : EMF.

Proulx J. (2013) *De la didactique des mathématiques au Québec : entretiens avec ses bâtisseurs.* Québec : Presses de l’Université du Québec.

Sierpinska A. (2002) Perspectives sur les recherches en didactique des mathématiques. ZDM: *The international journal on mathematics education* 34(4), 164-174.

Sierpinska A., Kilpatrick J. (1992) *Mathematics education as a research domain : in search for identity*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Netherlands.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES : DES RELATIONS À LA FOIS CRUCIALES ET PROBLÉMATIQUES, CULTURELLEMENT SITUÉES

Michèle ARTIGUE

Résumé : Dans cette contribution, je m'appuierai d'abord sur mon expérience personnelle pour réfléchir aux relations entre didactique des mathématiques et mathématiques en France, à partir de la vision interne que j'ai de leur histoire depuis les années 70, et des conditions et contraintes qui les ont façonnées. J'essaierai ensuite d'élargir la perspective, en m'appuyant sur mon expérience internationale, pour montrer que cette histoire, bien que singulière, partage avec d'autres des éléments communs, mais aussi que la comparaison avec d'autres contextes peut aider chacun d'entre nous à mieux comprendre sa communauté didactique, avec ses forces et ses faiblesses.

Mots-clefs : Mathématiques, Didactique des mathématiques, Interactions mathématiques-didactique, histoire de la didactique des mathématiques

Abstract – In this contribution, I will use first my personal experience to reflect the relationships between mathematics education and mathematics in France, relying on the internal vision I have of their history since the 70s, and of the conditions and constraints that have shaped them. Then I will try to broaden the perspective, using my international experience, to show that this history, although unique, shares some similarities with others, but also that the comparison with other contexts can help each of us to better understand her didactic community, with its strengths and weaknesses.

Keywords: Mathematics, Didactics of Mathematics, Mathematics education, Interaction between mathematics and didactics, history of mathematics education

I. INTRODUCTION

La question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques est une question complexe car ces rapports comme leur évolution au cours du temps mettent en jeu de nombreux déterminants, scientifiques, institutionnels et humains. Ils sont souvent perçus comme difficiles parce que rabattus sur leur dimension humaine, perçus à travers les rapports de communautés dont les relations sont souvent empreintes d'incompréhension mutuelle, de méfiance, et parfois ouvertement conflictuelles. Dans cette contribution, sans nier cette composante humaine et son influence, je souhaite aussi ne pas me laisser piéger par elle, car cela me semble nécessaire pour apporter une contribution utile aujourd'hui à la réflexion. Je m'appuierai fortement sur mon expérience personnelle et la réflexion sur ce vécu pour faire un certain nombre d'observations et poser un certain nombre de questions. Je me limiterai dans un premier temps à la vision de ces rapports que nous donne à voir l'histoire de la communauté de didactique des mathématiques française à laquelle j'appartiens quasiment depuis ses débuts. Il s'agit là d'une histoire intéressante, riche d'enseignements mais aussi

Artigue M. (2015) Didactique des mathématiques et mathématiques : des relations à la fois cruciales et problématiques, culturellement situées. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 73-80.

d'une histoire particulière. C'est pourquoi dans un second temps, j'élargirai la perspective en essayant de situer cette histoire dans un panorama plus large. Je m'appuiera pour cela, outre sur mon expérience de chercheuse, sur mon expérience au sein de l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) et de son comité exécutif qui m'a amenée à approcher ces questions sous un angle plus international, plus politique aussi. Cette mise en perspective me permettra de montrer que le cas français, bien que singulier, partage avec d'autres bien des éléments communs, mais aussi que la comparaison avec d'autres contextes peut aider chacun d'entre nous à mieux comprendre sa communauté didactique, ses forces et ses faiblesses.

II. MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : UNE HISTOIRE PARTICULIERE

La question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques est une question sur laquelle j'avais déjà eu à travailler pour l'étude ICMI concernant la recherche en éducation mathématique dont les résultats ont été publiés en 1998 (Artigue 1998). Je m'étais déjà penchée à l'époque sur la situation française. J'expliquais que, pour la comprendre, il fallait prendre en compte l'engagement historique dans les questions d'enseignement mathématique de mathématiciens français de premier plan tels Borel, Hadamard, Lebesgue, Poincaré, pour ne citer que quelques noms emblématiques, ensuite la structure si particulière des IREMs (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) qui, dès le début des années 70, ont soutenu l'émergence d'une recherche didactique proche des institutions mathématiques, des collaborations, des migrations, qui ont fait de notre communauté didactique pendant longtemps une communauté considérée comme particulièrement mathématisée[49].

A quelques notables exceptions près, et on ne peut manquer de penser ici à Gérard Vergnaud, l'ancrage disciplinaire des fondateurs de la didactique française était l'ancrage mathématique et, même si dès le départ, ils ont porté l'ambition de constituer la didactique des mathématiques comme un champ scientifique autonome, cet ancrage ne pouvait manquer d'influer sur leur façon de penser la constitution de cette science autonome. En est symptomatique, par exemple, l'inspiration que Guy Brousseau a trouvé dans la logique dialogique de Lorenzen et la théorie mathématique des jeux pour fonder la théorie des situations didactiques. En témoigne aussi à mes yeux l'importance prise dans les travaux de cette communauté didactique par des analyses épistémologico-mathématiques approfondies, ou par des thématiques comme celle de la logique et de la preuve avec des travaux réellement pionniers dans ce domaine, comme les travaux bien connus de Balacheff (1988) et Durand-Guerrier (2005).

Cette communauté didactique a évolué bien sûr mais elle est l'héritière de cette histoire qui a façonné ses modes de pensée, ses cadres théoriques, et a conduit à essayer de préserver des liens institutionnels forts avec la communauté mathématique. En témoigne l'inscription de laboratoires au sein d'UFR[50] de mathématiques, comme c'est le cas par exemple pour le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) qui accueille un pourcentage important des didacticiens et doctorants français, ou le rattachement de nombreux chercheurs à la section 26 de mathématiques appliquées et applications des mathématiques, où leur spécialité est aujourd'hui bien reconnue.

[49] Le lecteur trouvera sur le portail des IREM une présentation réflexive du réseau des IREM et de son histoire réalisée dans le cadre de la candidature du réseau à la médaille Emma Castelnuovo récemment créée par l'ICMI qui met ces caractéristiques en évidence (http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1154).

[50] UFR : Unités de formation et de recherche.

Cette proximité entre mathématiques et didactique des mathématiques reste cependant relative. L'usage de la théorie des jeux par les utilisateurs de la théorie des situations didactiques est resté, à quelques exceptions près faisant partie de l'environnement proche de Brousseau dont Ratsimba-Rajohn (1981) est un parfait exemple, un usage purement métaphorique. Par ailleurs, si l'on excepte l'exemple tout à fait intéressant de l'analyse implicative, la didactique des mathématiques a eu peu de retombées proprement mathématiques. J'ai personnellement beaucoup bénéficié dans mon travail de recherche, tout particulièrement en didactique de l'analyse, d'interactions avec des mathématiciens comme Adrien Douady et Marc Rogalski. En revanche, le travail que j'ai mené pour mon doctorat d'état sur la reproductibilité des situations didactiques (Artigue 1986), que Freudenthal avait qualifié à l'époque de premier travail de mathématiques de la didactique, est resté un travail isolé. J'y avais utilisé des modèles mathématiques probabilistes, d'une part pour montrer les limitations de la vision de la reproductibilité des situations didactiques véhiculée explicitement mais surtout implicitement par les textes didactiques, d'autre part pour simuler des dynamiques possibles, à partir de certaines données d'observation, m'interroger sur le champ des possibles et interroger en retour les dynamiques observées et ce qui avait pu les contraindre par rapport à cet ensemble de dynamiques possibles. Aujourd'hui que j'ai eu, pour d'autres raisons, à me frotter à la modélisation mathématique, je vois bien à quel point ces constructions étaient bricolées, ce qu'aurait pu leur apporter l'interaction avec des spécialistes de modélisation aléatoire, et je me prends à penser que cette interaction aurait pu peut-être me permettre de poursuivre dans une voie pour laquelle j'étais mathématiquement et méthodologiquement insuffisamment outillée.

Ces limites étant soulignées, il n'en demeure pas moins que les rapports bougent avec à la fois des évolutions qui rendent des rapprochements possibles et des évolutions qui les rendent plus difficiles. Parmi les évolutions qui rendent des rapprochements possibles, il y a, à mes yeux, indéniablement, même si l'on ne peut que le regretter, les difficultés croissantes auxquelles font face l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants dans notre pays, le regard que nous renvoient sur notre système éducatif des enquêtes internationales comme PISA[51] pour ce qui est des élèves ou TALIS[52] pour ce qui est des enseignants. Ces difficultés ne peuvent plus être ignorées, quel que soit le niveau auquel on enseigne et il devient de plus en plus audible, malgré la méfiance que suscite toujours le didactique dans de nombreuses sphères, que pour y faire face, il y a besoin de connaissances spécifiques sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, mais aussi qu'il existe de telles connaissances, même si elles sont encore très limitées, trop éparses et parcellaires. En témoigne par exemple l'esprit de collaboration qui porte aujourd'hui certaines actions de la CFEM (Commission Française de l'Enseignement Mathématique) et que met bien en évidence son bulletin mensuel (cf. www.cfem.asso.fr). Il faut cependant bien comprendre que cette évolution génère aussi des demandes et des questions sur ce que la didactique des mathématiques a réellement à offrir à ceux qui voudraient en exploiter les résultats.

Mais il existe aussi des évolutions qui rendent les rapprochements difficiles. Parmi elles, paradoxalement, il y a le développement même du champ didactique qui s'est traduit par l'existence et l'institutionnalisation d'une communauté de spécialistes, et d'une recherche

---

[51] PISA : Programme for International Student Assessment (http://www.oecd.org/pisa/). Ce programme, mis en place par l'OCDE en 2000, est un programme triennal d'évaluation des systèmes éducatifs via celle des compétences et connaissances des élèves âgés de 15 ans.

[52] TALIS : Teaching and Learning International Study (www.oecd.org/edu/school/**talis**.htm). TALIS est une vaste enquête lancée par l'OCDE auprès des enseignants sur leur formation initiale et les activités de formation continue auxquelles ils participent, sur les commentaires qui leur sont adressés concernant leur travail d'enseignant, sur le climat en classe et dans l'établissement, sur leur satisfaction professionnelle et sur leur sentiment quant à leurs propres capacités professionnelles.

dont le développement se nourrit des questions du terrain, d'un questionnement du monde au sens de Chevallard, mais aussi de besoins plus internes d'organisation, de structuration du champ. Je pense par exemple aux travaux qui se sont développés ces dernières années en termes de 'networking' de cadres théoriques pour contenir les effets de l'explosion théorique observée et auxquels j'ai participés. Ils ne font vraiment sens qu'à l'intérieur de la communauté d'éducation mathématique elle-même. Cette progression du didactique s'est de plus inévitablement accompagnée de la construction d'un discours spécialisé avec sa terminologie, ses codes, ses formes spécifiques d'argumentation, ses implicites aussi. S'est ainsi progressivement créée une distance discursive, en un sens naturelle, mais dont l'utilité et la nécessité sont difficilement compréhensibles par les non didacticiens, et en premier lieu par ceux qui ont un rapport professionnel aux mathématiques et s'estiment en droit de comprendre tout ce qui est dit sur leur apprentissage et leur enseignement. Il y a aussi, me semble-t-il, en sens inverse une insuffisante sensibilité de la communauté didactique à l'investissement que demande l'accès à ce discours spécialisé, et donc un investissement insuffisant, par rapport à d'autres communautés, dans l'élaboration collective de niveaux de discours permettant une réelle communication.

Au-delà de ces facteurs d'éloignement, il y a ceux liés à l'évolution des problématiques au sein du champ didactique. Il ne fait pas de doute par exemple que, dans beaucoup de travaux aujourd'hui, même si les mathématiques sont présentes, elles n'apparaissent pas nécessairement comme centrales au questionnement, mais plutôt comme un domaine dans lequel s'inscrit un questionnement plus général, concernant par exemple les pratiques enseignantes ou certaines dimensions de ces pratiques, par exemple leurs pratiques documentaires pour ne citer qu'une des problématiques qui attire une attention croissante, du fait de l'évolution actuelle de ces pratiques. Et je ne saurais bien sûr passer sous silence l'émergence du champ de la didactique comparée portée par l'Association pour les Recherches Comparatistes en Didactique (ARCD), qui en questionnant les rapports entre les différentes didactiques, interroge aussi les rapports entre celles-ci et leurs disciplines respectives. Dans le cadre de ce champ, les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques font l'objet de discussions approfondies, comme le montrent bien les articles publiés régulièrement sur ce thème par la revue *Education & Didactique*, depuis ses débuts.

Au vu de cette situation particulière, il semble bien que mathématiques et didactique des mathématiques entretiennent des relations complexes et qui ne sont en rien figées. Il semble bien aussi que l'on ne peut comprendre cette complexité et les dynamiques associées sans faire intervenir de nombreuses dimensions, épistémologiques, scientifiques, institutionnelles, identitaires, sociétales, les rapports entre divers acteurs et communautés, envisager des conditions et contraintes qui, au sens de la théorie anthropologique du didactique, mettent en jeu l'ensemble des niveaux sur-didactiques. En quoi cette situation particulière est-elle singulière ou non ? C'est la question que j'aborderai dans la partie suivante, en adoptant une perspective plus internationale.

III. MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : UNE PERSPECTIVE INTERNATIONALE

L'histoire de l'éducation mathématique montre que la situation française est moins singulière que l'on ne pourrait le croire. L'investissement très tôt de mathématiciens de premier plan dans les questions d'enseignement par exemple n'est pas propre à la France. Il est à l'origine de la création en 1908 de la CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, aujourd'hui ICMI) au cinquième congrès international des mathématiciens, et c'est le mathématicien allemand Felix Klein, lui-même très investi dans la formation des enseignants et la réforme curriculaire Meran en Allemagne, promoteur des premières chaires universitaires de didactique des mathématiques dans ce pays, qui en prendra la présidence. Quand, après la seconde guerre mondiale, la commission sera refondée, c'est grâce à l'action volontariste de son président, Hans Freudenthal, un mathématicien reconnu, que s'imposera dans cette institution la nécessité de soutenir le développement d'une recherche spécifique, que sera créée la revue *Educational Studies in Mathematics* en 1969 et que sera organisé à Lyon le premier congrès international d'enseignement mathématique, le premier ICME. Quand on consulte les actes de ces premiers congrès, Lyon (1969), Exeter (1972), Karlsruhe (1976), on ne peut qu'être frappé par le nombre de mathématiciens de premier plan qui y interviennent et montrent leur implication dans les questions d'enseignement des mathématiques, particulièrement vives à cette époque marquée par les enthousiasmes, turbulences, puis désillusions de la période des mathématiques modernes. Les mathématiciens sont aussi très présents dans la CIEAEM[53] (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) créée en 1959, et ils sont aussi à l'origine, dès 1962, après un colloque à Bogota, de la première organisation régionale sur l'enseignement des mathématiques, la CIAEM[54] (Commission Inter-Americaine d'Education Mathématique) dont le cinquantenaire célébré à Recife en juin 2012 a permis de retracer l'histoire. Je n'insisterai pas plus sur ce point renvoyant à l'ouvrage issu du symposium organisé pour le centenaire d'ICMI (Menghini, Furinghetti, Giacardi & Arzarello 2009) pour plus de détails.

En revanche, il ne fait pas de doute que suivant les pays, les contextes, les dynamiques des communautés didactiques ont été sensiblement différentes, avec un impact sérieux sur les relations entre mathématiques et didactique. De ce point de vue, l'existence de la structure des IREM en France, la capacité de la communauté didactique française à se doter relativement tôt, dès 1980, de structures collectives comme la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, le séminaire national et les écoles d'été bi-annuelles de didactique des mathématiques, l'énergie collective déployée pour les faire fonctionner, le combat aussi mené pour conserver des liens avec la communauté mathématique, notamment pour les questions de recrutement et de promotion, via le CNU (Conseil National des Universités), ont certainement créé une différence. Quand j'ai été élue par l'assemblée générale de l'IMU (Union Mathématique Internationale), vice-présidente de l'ICMI, en 1998, dans une période de tensions fortes entre l'ICMI et son organisation mère, j'ai pu très vite mesurer à quel point, les relations entre communautés, même si elles n'avaient rien d'idéal en France, étaient différentes de celles vécues dans beaucoup d'autres pays, par exemple aux Etats-Unis où l'on allait jusqu'à parler de Math Wars. Comme je l'ai expliqué dans (Artigue 2009), la question même de la persistance du maintien de l'ICMI au sein de l'IMU était alors posée par nombre de membres de la communauté ICMI qui ne supportaient plus la défiance, voire le mépris, dont ils faisaient l'objet. Dix ans après, en 2008, comme je l'expliquais dans le même texte, la situation avait déjà substantiellement changé, et elle n'a cessé depuis de s'améliorer. Mais je reste bien consciente que les relations entre communautés restent fragiles, sans cesse à consolider, à adapter aux mouvements du monde.

La question des rapports entre mathématiques et éducation mathématique fait souvent l'objet de déclarations mais il est extrêmement rare qu'elle soit prise comme objet d'étude. Cela avait été le cas dans l'étude ICMI déjà citée sur la recherche en éducation mathématique pilotée par Anna Sierpinska et Jeremy Kilpatrick et ce thème avait constitué la sixième et dernière partie de l'ouvrage qui en était résulté (Sierpinska & Kilpatrick 1998). Plus récemment, c'est tout un colloque organisé en l'honneur de Ted Eisenberg qui lui a été

[53] http://www.cieaem.org
[54] http://www.ciaem-iacme.org

consacré et l'ouvrage qui en résulte, nourri de contributions et dialogues de mathématiciens, de chercheurs en éducation mathématique et d'historiens des mathématiques, est donc particulièrement intéressant à considérer (Fried & Dreyfus 2014). En fait, dès le départ de l'ouvrage, ce qui est posé, c'est l'éloignement croissant des communautés auquel Eisenberg, lui-même mathématicien et chercheur en éducation mathématique, était particulièrement sensible, regrettant que le développement de ce champ en un champ académique l'éloigne progressivement des mathématiques, et ayant de plus en plus de mal à se reconnaître dans les approches et problématiques qui y devenaient dominantes. Fried, dans le chapitre introductif, reprend ce point de vue, en ne limitant pas la question à celle des rapports entre communautés de chercheurs, et en citant tout particulièrement les approches relevant de l'éducation mathématique critique qui donnent comme priorité à l'éducation mathématique l'accroissement de la participation démocratique, de l'équité et de la justice sociale, et pour lesquelles chaque notion mathématique doit être examinée dans sa fonction socio-politique. A la recherche de collaborations possibles, et se référant à des sociologues comme Weber, il insiste sur la nécessité de dépasser une vision de la recherche en éducation mathématique comme sous-domaine des mathématiques ou comme mathématique appliquée, pour reconnaître et accepter son inscription dans le champ des sciences humaines et sociales, et donc la spécificité de ses questionnements et méthodologies (p.15). Et il conclut en ces termes :

> It should not be our mission to 'convert' mathematicians to what they cannot be as it would not be theirs to determine what mathematics education researchers should research. And yet, to reiterate what has been said in different ways in this introduction, this cannot be a formula to go in separate ways : the common focus on mathematics, one way or another, will not allow for that. Cooperation begins when there is at the same time the recognition that each side is looking in the same direction but with very different complementary eyes (Fried 2014, p. 15).

De tels exemples de coopération sont présents dans le livre, notamment dans la section à laquelle j'ai contribué, coordonnée par Pat Thompson. Mais l'ouvrage reflète aussi, au fil des chapitres, les tensions qui, de façon plus générale, marquent toujours les relations entre communautés, des tensions qui étaient aussi visibles lors du colloque. Appelé à commenter cet ouvrage dans le dernier chapitre, Jeremy Kilpatrick fait le lien avec l'étude ICMI déjà mentionnée et revient, pour la contester, sur l'idée de distance croissante. Il s'interroge d'abord à juste titre sur ce que recouvrent exactement les différents termes utilisés : mathématicien, « mathematics educator », chercheur, soulignant la difficulté de séparer les catégories, et expliquant aussi qu'en français l'existence du terme didacticien rend les choses un peu plus claires. Ensuite, il défend la thèse que plus qu'un éloignement, ce qui est en jeu c'est une expansion forte du champ d'éducation mathématique avec par exemple un doublement en cinq ans, depuis 2008, du nombre de références fournies par Google Scholar, une expansion qui déplace les centres de gravité et les éloigne peut-être effectivement, mais que ceci ne signifie pas pour autant que les champs s'éloignent. Il donne à titre d'exemple le cas des préparations doctorales dans les deux plus gros programmes doctoraux d'éducation mathématique aux Etats-Unis (à Colombia University et à l'University of Georgia) et des exigences mathématiques formulées pour les thèses. Pour lui, mathématiques et éducation mathématique sont reliées comme le sont le yin et le yang par leur mutuelle attention à l'enseignement. Et, se référant à l'historien des mathématiques Jens Høyrup, il voit la source de cette situation dans la caractéristique propre aux mathématiques de s'être constituées à travers leur enseignement :

> Teaching is not only the vehicle by which mathematical knowledge and skill is transmitted from one generation to the next ; it belongs to the essential characteristics of mathematics to be constituted through teaching. (Høyrup 1994, p. 3)

Dans ces conditions, pour lui, plus que de chercher des terrains communs aux mathématiques et à la didactique des mathématiques, il s'agit de cultiver le terrain commun que nous partageons, celui de l'enseignement des mathématiques.

IV. COMMENTAIRE ET PERSPECTIVES

Dans ce texte réflexif, je me suis interrogée sur les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques, d'abord à travers le filtre de ma propre communauté, puis en élargissant le regard à une perspective plus internationale. J'avais annoncé mon intention de ne pas me laisser piéger par la seule composante humaine, en fait j'y ai sans cesse été ramenée. Les mathématiques, la didactique des mathématiques sont constituées par des pratiques humaines ; comprendre leurs rapports ne peut se faire sans interroger ces pratiques, sans mettre en scène leurs acteurs, et ce qui détermine leurs actions. La référence à la Théorie anthropologique du didactique pourrait s'avérer sur ce point utile comme elle l'a été pour analyser les pratiques de networking (Artigue & Bosch 2014). Cette perspective nous inciterait à poser la question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques en termes de rapports entre des praxéologies, et à relier les collaborations à construire à la construction de praxéologies hybrides, nouvelles, qui dépassent les caractéristiques et possibilités de celles qui nous sont aux uns et aux autres familières, mais qui en respectent l'essence et permettent d'en exprimer les potentialités, comme ce fut le cas pour les méta-praxéologies développées dans le cadre du networking. Car, comme le soulignent à juste titre Michael Fried et Jeremy Kilpatrick, nous avons bien des sensibilités et des objets communs.

REFERENCES

Artigue M. (1986) Etude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.1., 5-62.

Artigue M. (1998) Research in mathematics education through the eyes of mathematicians, in Sierpinska A., Kilpatrick J. (Eds.) *What is research in mathematics education and what are its results ?* (pp. 477-490). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Artigue M. (2009) ICMI: A century at the interface between mathematics and mathematics education. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, pp. 185-198. Istittuto della enciclopedia Italiana. Roma.

Artigue M., Bosch M. (2014) Reflection on Networking through the praxeological lens. In, Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York: Springer.

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège.* Thèse d'état. Université Joseph Fourier. Grenoble.

Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (Eds.) (2014) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York: Springer.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* HDR. Université Claude Bernard - Lyon I.

Fried M..N., Dreyfus T. (Eds.) (2014) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*. Dordrecht : Springer Science.

Høyrup J. (1994) Measure, numbers, and weight : Studies in mathematics and culture. Albany: State University of New York Press.

Kilpatrick J. (2014) We Must Cultivate our Common Ground. In Fried M.N., Dreyfus T. (Eds.) *Mathematics and Mathematics Education : Searching for Common Ground* (pp. 337-343). Dordrecht : Springer Science.

Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) (2009) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Istittuto della enciclopedia Italiana. Roma.

Ratsimba Rajohn R. (1981) *Etude de deux méthodes de mesure rationnelle : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.* Thèse de troisième cycle. Université de Bordeaux 1.

Sierpinska A., Kilpatrick J. (Eds.) (1993) *What is research in mathematics education and what are its results?* (pp. 477-490). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Thompson P. (2014) Collaboration between Mathematics and Mathematics Education. In Fried M.N., Dreyfus T. (Eds.) *Mathematics and Mathematics Education : Searching for Common Ground* (pp. 313-333). Dordrecht : Springer Science.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES MATHÉMATIQUES DANS LES ACTIVITÉS DU PROFESSEUR CONSÉQUENCES POUR LA FORMATION

Lalina COULANGE* - Aline ROBERT**

Résumé – En nous plaçant dans le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski 2002), nous nous attachons à spécifier les mathématiques impliquées dans les activités d'un professeur de mathématiques. Cela demande d'une part, une description spécifique et appropriée des mathématiques pour les pratiques enseignantes. Cela nécessite aussi des transformations des usages que les étudiants et futurs enseignants peuvent avoir de ces mêmes mathématiques apprises pendant leurs études. Cela conduit enfin à élaborer des formations propices à outiller efficacement les débutants pour ces nouveaux usages des mathématiques.

Mots-clefs : activités et pratiques enseignantes, professeur de mathématiques, formation initiale

Abstract – By using the double ergonomic and didactic approach (Robert and Rogalski 2002), we specify the part of mathematics that feeds the activities of a mathematics teacher. This requires specific and appropriate description of mathematics for the *teaching* profession. This also requires changes in the uses of the mathematics that students and future teachers have learned during their studies. Finally, this leads to the development of initial training that allows future mathematics teachers to tackle such new uses of mathematics.

Keywords: Teacher activity and practice, mathematics teacher; initial training

Dans cette contribution nous nous attachons à spécifier les mathématiques impliquées dans les activités d'un enseignant du secondaire dans l'exercice de son métier. Cela demande d'une part, une description spécifique, appropriée, y compris des mathématiques elles-mêmes, comme nous le montrons dans la première partie de ce texte. Cela nécessite aussi des transformations des usages que les étudiants et futurs enseignants pouvaient avoir de ces mêmes mathématiques apprises pendant leurs études, ce que nous illustrons par quelques exemples dans la deuxième partie de notre contribution. Cela conduit enfin à élaborer des formations propices à outiller efficacement les débutants pour ces nouveaux usages des mathématiques, c'est l'objet de la troisième et dernière partie. L'ensemble de la réflexion conduite se place dans un cadre théorique et méthodologique visant l'étude des pratiques enseignantes, la double approche ergonomique et didactique, dont nous rappelons les fondements dans la partie introductive de ce texte.

* E3D-LACES, Université de Bordeaux – France – lalina.coulange@espe-aquitaine.fr
** LDAR, Université Paris Diderot – France – aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Coulange L., Robert A (2015) Les mathématiques dans les activités du professeur – Conséquences pour la formation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 81-94.

I. INTRODUCTION

La double approche ergonomique et didactique (Robert & Rogalski 2002, Vandebrouck & al. 2008) conjugue le mot « activité » au pluriel. Les recherches qui s'inscrivent dans cette approche attribuent une place centrale aux activités que les sujets développent en situation que ce soit du point de vue des apprentissages des élèves ou des pratiques enseignantes. Nous nous intéressons ici aux relations entre les mathématiques et les activités du professeur de mathématiques. Dans le cadre de la double approche, la façon d'appréhender les activités du professeur a ceci de spécifique que l'on considère que le professeur travaille, exerce un métier et qu'on ne peut étudier ses activités sans en tenir compte. Notamment, les activités de l'enseignant sont appréhendées par des finalités variées, qui ne peuvent être réduites à ce qui est directement lié aux apprentissages des élèves ou aux savoirs mathématiques à enseigner. Les pratiques enseignantes renvoient de fait à tout ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long, que ce soit avant, pendant ou après les séances de classe (Robert 2008a). L'étude des pratiques enseignantes amène dès lors à prendre un point de vue global, qui comprend à la fois les activités précises du sujet (considérées sur plusieurs échelles) et les contraintes imposées par le métier de professeur qui pèsent sur ces activités (en relation avec les déterminants institutionnels, sociaux et personnels, liés aux programmes et aux conditions d'exercice du métier d'enseignant). Autrement dit, pour le chercheur, il s'agit à partir des activités précises du professeur et des contextes de ces activités, d'avoir accès à une description complexe des pratiques, à même d'en restituer la cohérence. Quelles mathématiques sont impliquées dans cette description qui se veut « holistique » des pratiques enseignantes ? Comment décrire ou apprécier le (ou les) rôle(s) joué par les mathématiques dans les pratiques enseignantes sans pour autant en réduire la complexité ? Par exemple, comment éviter de découper artificiellement des contenus mathématiques bien répertoriés ou d'isoler des usages des mathématiques en classe qui risquent de les approximer ou de les modifier ? La conception des pratiques inhérente à la double approche implique que les relations entre mathématiques et activités du professeur sont complexes et ne peuvent être appréhendées par une simple « superposition » des connaissances et savoirs mathématiques dont on recueillerait des traces, même outillées par les descriptions des processus d'enseignement et d'apprentissages que certaines recherches en didactique des mathématiques proposent. C'est là que réside l'intérêt de la méthodologie proposée par la double approche ergonomique et didactique dont l'objectif est non seulement de postuler la complexité des pratiques, mais encore de donner les moyens aux chercheurs d'appréhender cette complexité à partir de descriptions selon plusieurs dimensions (les composantes), à recomposer, et selon différents niveaux d'organisation du travail de l'enseignant (à la fois micro, local et macro).

Notre contribution vise à étayer l'hypothèse de travail de la spécificité de la part des mathématiques dans les activités enseignantes, en développant cette hypothèse *via* l'entrée théorique et méthodologique de la double approche ergonomique et didactique. Nous voulons aussi illustrer le travail à accomplir pour y arriver à partir d'une formation universitaire adressée aux futurs enseignants de mathématiques, en documentant notre propos par quelques exemples. Nous listons ensuite des conséquences que nous en tirons pour penser de nouvelles orientations dans la formation initiale des professeurs de mathématiques du second degré.

II. I . PENSER DES DESCRIPTIONS DES MATHEMATIQUES POUR APPRECIER LA PART MATHEMATIQUE DES ACTIVITES DU PROFESSEUR - LE CAS DES DEBUTANTS

1. *Descriptions des mathématiques en didactique*

Les recherches en didactique des mathématiques donnent des outils pour décrire les mathématiques dans leurs relations avec les apprentissages des élèves et l'enseignement par les professeurs. Les descriptions des mathématiques dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques sont adaptées aux questions et aux orientations de recherche qui les fondent et les pilotent, ce qui leur confère une certaine pluralité.

Ces descriptions peuvent en effet, s'avérer différentes selon ce que le chercheur en didactique des mathématiques cherche à appréhender ou suivant la perspective dans laquelle ses travaux de recherche s'inscrivent. Par exemple, le modèle d'organisation praxéologique mathématique issu de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1997, Bosch & Chevallard 1999) constitue une modélisation des pratiques des sujets en lien avec les savoirs mathématiques à enseigner et enseignés au sein d'une institution didactique, dans une perspective liée à la transposition didactique. De la même façon les situations mathématiques à usage didactique (Brousseau 1997) peuvent être considérées comme une modélisation des savoirs et des connaissances mathématiques : elles permettent de décrire des causes pertinentes des connaissances, par rapport aux raisons de ces savoirs (Bessot 2011).

2. *Les mathématiques dans les activités du professeur*

La double approche ergonomique et didactique a ceci de spécifique que les notions de connaissances et de savoirs ne constituent pas un point de départ de son développement théorique. A l'instar d'autres approches, pour la plupart relativement récentes en didactique des mathématiques (voir par exemple, Maheux & Proulx 2014), elle accorde une place centrale aux activités des sujets élèves ou professeurs, appréhendés comme des sujets psychologiques et sociaux. C'est la part mathématique des activités du professeur qui va nous intéresser plus particulièrement ici. Les pratiques du professeur ont ceci de particulier que seule une part de ses activités ont trait aux mathématiques et ce, de façon inextricablement liée aux multiples composantes de ses pratiques. D'ailleurs la double approche ne distingue pas à proprement parler une composante « mathématique » dans l'activité du professeur. Les mathématiques sont intégrées à et nourrissent, de manières variées, les différentes composantes retenues pour caractériser les pratiques enseignantes dans le cadre de la double approche : médiative, cognitive, institutionnelle, sociale et personnelle (Robert & Rogalski 2002, Robert 2008a). Elles imprègnent aussi les différents niveaux d'organisation des pratiques (Masselot & Robert 2007), global (avec les projets et conceptions générales des enseignants, local avec l'attention mathématique aux élèves pendant les déroulements, micro avec ce à quoi s'attachent les gestes automatisés). Dans ce point de vue, les mathématiques jouent sans doute un rôle différent de celui qu'elles jouent dans les activités des élèves et/ou des étudiants en mathématiques. Donnons un exemple un peu simpliste : autant les étudiants peuvent être motivés par la résolution d'un problème un peu difficile pour eux, qui va les préparer aux examens, autant les enseignants se restreignent en général à proposer en classe des problèmes qu'ils savent bien résoudre. Nous essayons ci-après de cerner un peu systématiquement certaines de ces différences qui peuvent outiller le chercheur pour appréhender les transformations d'usages des mathématiques qu'implique potentiellement une entrée dans le métier d'enseignant de mathématiques, notamment *via* la formation initiale.

Les *composantes médiative et cognitive* sont renseignées par et renseignent sur l'organisation et les contenus mathématiques des séances prévues par le professeur ainsi que sur ses actions pendant les déroulements de celles-ci. C'est la manière dont le professeur prévoit et élabore une succession de tâches mathématiques que modélise la composante *cognitive*. Ce type d'activités suppose de positionner ces tâches par rapport aux connaissances visées, mais aussi les unes par rapport aux autres, pour penser une succession cohérente, appréhender différentes dynamiques des connaissances mathématiques à la fois anciennes et nouvelles (relatives aux notions enseignées), prévoir précisément les moments d'exposition des connaissances ; ceci suppose aussi de reconnaître les adaptations de connaissances que recouvre une telle succession de tâches, etc. Jamais un étudiant en mathématiques n'a à envisager l'élaboration d'un texte « complet » du savoir lié à différentes notions, ni à réfléchir, par exemple, à ce qui pourrait représenter une bonne introduction d'une notion nouvelle : ceci représente donc potentiellement une « nouveauté » pour le futur enseignant de mathématiques. Il s'agit également pour le professeur d'anticiper différentes activités possibles d'élèves (et même, de *ses* élèves), en lien avec l'accomplissement de ces tâches mathématiques. Là encore, l'étudiant a classiquement à résoudre des problèmes qu'on lui propose, en lien avec des cours de mathématiques qu'on lui a dispensés, « tout prêts » à l'emploi. Il peut compléter en utilisant des manuels mais dans une perspective simplement cumulative. L'enseignant, lui, choisit les énoncés à proposer, en relation avec les mises en fonctionnement des mathématiques attendues, leur durée probable liée aux difficultés – mais il s'agit de ne pas trop lasser les élèves, les contrôles qu'il prévoit… L'entrée dans le métier d'enseignant recouvre bien un changement de point de vue sur les énoncés de problèmes ou d'exercices, liés aux tâches, mais mettant en jeu des choix importants, liés aussi aux déroulements anticipés. De la même manière, la composante *médiative* des pratiques est renseignée par et renseigne sur les choix du professeur dans les déroulements associés aux énoncés ; cela suppose que le professeur observe et interprète des observables des activités effectives (possibles) des élèves pour inférer sur les connaissances mises en jeu pendant ces activités. Cela le conduit à repérer ce que les élèves arrivent à faire et ce qui ne marche pas – c'est ce qui peut guider le choix de ses aides, procédurales pour débloquer et permettre un début d'activité de certains élèves, ou constructives pour s'appuyer sur ce qui a déjà été fait ou vu en classe, afin de le valider et le généraliser (Pariès & al. 2008, Robert 2008b). Ce n'est plus pour lui-même que l'enseignant fait des mathématiques, pour progresser, ou pour réussir (en tant qu'étudiant ou élève) : ce sont les mathématiques que font ses élèves dans la classe qu'il doit saisir, exploiter et développer, quitte à imaginer des connexions originales.

Les *composantes personnelle, sociale et institutionnelle* jouent un rôle déterminant pour comprendre les pratiques enseignantes. Ces composantes permettent d'appréhender comment le professeur investit une partie des contraintes qui pèsent sur ses pratiques soit du point de vue du métier qu'il exerce (composantes sociale et institutionnelle), soit du point de vue de singularités individuelles (composante personnelle). Ces autres contraintes aussi ont leur part mathématique induite dans les activités du professeur. Par exemple, la composante *institutionnelle* renvoie en partie, à la façon dont le professeur s'approprie, interroge les contenus des programmes officiels ou des ressources mises à sa disposition (comme les manuels), entrevoit « entre les lignes » le *relief* des notions qu'il a à enseigner, leur spécificité (Robert 2007) et envisage des possibles liés à ce relief dans un espace institutionnel contraint (horaires d'enseignement, inspections…). De même la composante *sociale* correspond à l'empreinte de l'inscription des activités du professeur au sein de collectifs, établissement, équipes enseignantes, groupes d'élèves avec leurs spécificités sociales et /ou langagières…) ; cela peut induire des choix de tâches et de déroulements liés à des convictions « socialement partagées » sur l'enseignement et les apprentissages. Par exemple, ces choix peuvent être faits en fonction des potentialités et des limites cognitives attribuées à des publics d'élèves spécifiques (comme en collège ou lycée de Zones d'Education Prioritaire). Il se peut que ce soit des raisons plus liées aux déroulements qu'aux convictions sur les apprentissages qui amènent à réduire les difficultés des activités proposées en classe ou les durées des moments d'exposition des connaissances. Cela engage dans des choix particuliers, ne relevant pas toujours des mathématiques elles-mêmes. La composante *personnelle* peut quant à elle, renvoyer à la perception que l'enseignant a des mathématiques *via* ses expériences passées ou présentes d'enseignant mais aussi d'ex-élève ou étudiant en mathématiques. On voit à travers cette déclinaison dans les différentes composantes des pratiques enseignantes comment le rapport aux mathématiques des futurs enseignants se complexifie.

Toutes ces activités de l'enseignant analysées à l'aune des différentes composantes des pratiques ont bel et bien une part mathématique. Elles nécessitent de revisiter les notions, les connaissances et les savoirs mathématiques en vue de leur enseignement mais aussi de mettre en œuvre des activités mathématiques qui sont peut-être parfois difficiles à reconnaître et à (re-)convoquer car non strictement notionnelles ou convoquant une distance inhabituelle avec le savoir, permettant par exemple des commentaires « méta » sur les notions à enseigner (nous y reviendrons ci-après). Quoiqu'il en soit, il semble y avoir nécessité de réorganiser, réorienter ces « mathématiques » dans les activités du professeur. La double approche ergonomique et didactique permet, par le passage aux composantes, des descriptions originales de la part mathématique de ces activités, inextricablement liées aux différentes composantes des pratiques enseignantes, et dès lors imbriquées. En cela, elle nous permet, nous-semble-t-il, de nous saisir de la nécessité qu'il y a (re)penser les mathématiques pour exercer le métier de professeur, ou former à l'exercice de ce métier. Répétons à ce stade de notre propos que d'autres travaux pointent d'ailleurs cette nécessité. Par exemple, Bednarz et Proulx (2009) parlent de décisions mathématiques, didactiques et pédagogiques de l'enseignant, difficiles à démêler du fait d'une imbrication et d'une mobilisation simultanée de ces connaissances, ce qui conduit Proulx (2012) à parler quant à lui, de « connaissances mathématiques didactisées » ou de « connaissances didactiques mathématisées ».

3. Besoins mathématiques des étudiants futurs professeurs

Un postulat communément admis est qu'il est nécessaire que le professeur sache plus de mathématiques que celles qu'il a à enseigner. Mais que signifie ce « plus » ? N'y a-t-il pas plutôt à introduire un « autrement » ? On pourrait par exemple, considérer en l'état actuel du système institutionnel français de formation que, du seul point de vue des savoirs disciplinaires, tout (futur) enseignant de mathématiques a fréquenté des mathématiques pendant en moyenne « au moins trois années de plus » que ses (futurs) élèves. Mais dans quelle mesure et comment les mathématiques apprises par l'étudiant qu'il a été ou est toujours sont-elles nécessaires ou disponibles pour le professeur de mathématiques qu'il est ou sera dans un avenir relativement proche ?

En lien avec la spécificité de la part mathématique des pratiques enseignantes, défendue ci-avant d'un point de vue théorique, nous disposons de plusieurs exemples liés à des épisodes vécus en formation qui nous semblent illustrer que ces mathématiques apprises à l'université ne peuvent être *a priori* considérées d'emblée comme disponibles directement dans le travail du (futur) professeur de mathématiques. Ainsi a-t-on pu observer de manière récurrente des phénomènes de « non disponibilités » ou de cloisonnement de connaissances mathématiques (mais aussi didactiques[1]), de rigidification de postures (étudiantes ou enseignantes), de naturalisations parfois étonnantes.

a) un exemple emblématique

Ainsi, nous avons demandé à des étudiants (en première année de master lié à l'enseignement des mathématiques)[2] d'analyser la production ci-après d'une élève de collège français (classe de quatrième – élève de 13-14 ans) en réponse à la question suivante :

Vrai ou faux ? Prouvez-le ! Le produit de deux nombres impairs consécutifs est multiple de 5.

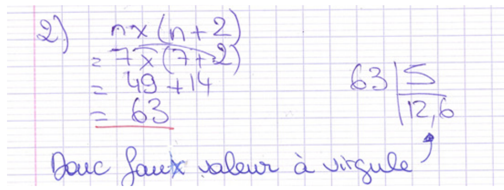


Figure 1 *– Enoncé d'exercice - Production d'élève*

La majorité des étudiants interrogés considèrent que la réponse donnée par cette élève était erronée, et ce, pour différentes raisons. Nous citons quelques extraits des productions écrites de ces étudiants recueillies lors de cet épisode de formation : « *faux car l'élève utilise un exemple numérique », « La réponse donnée est fausse. Elle montre les difficultés de cet élève dans le passage du numérique à l'algèbre », « l'élève aurait dû trouver une preuve qui utilise la lettre », « l'élève tente de résoudre une équation sans y arriver ».* Pourtant on peut considérer que la preuve produite par la collégienne concernée qui s'appuie sur l'usage d'un contre-exemple (7 et 9) est valide.[3] Qu'est-ce qui motive ces futurs enseignants à rejeter la dite production ? Les raisons avancées à l'écrit et/ou lors des échanges oraux qui ont suivi au cours de la formation sont de fait multiples. Par exemple, les étudiants se sont interrogés sur l'usage d'un contre-exemple numérique dans la preuve attendue. Certains ont même cherché à produire ou expliciter des attentes à l'égard d'une preuve « plus algébrique » de l'énoncé. Ce qui rend l'usage du contre-exemple difficilement acceptable pour ces étudiants qui se destinent au métier d'enseignant tient à différents éléments avancés de manière imbriquée et simultanée dans la discussion : confusion possible entre exemple et contre-exemple en algèbre pour cette (ou les) élève(s) (en gros « rien ne prouve » que l'élève reconnaît ou cible l'usage d'un contre-exemple) ; usage incorrect de l'écriture algébrique (n remplacé par 7) ; écriture numérique « naïve » (poser l'opération), etc. Les arguments avancés par les étudiants nous semblent typiques de ce qui pose question par rapport à la part mathématique du travail du professeur et de ce qui peut poser question, de manière récurrente, en formation initiale (voire continue ?) d'enseignants. Quels critères un futur professeur se donne-t-il (à la fois sur la forme et/ou sur le fond) pour évaluer les activités mathématiques de ses élèves ou les traces de ces activités ? Comment situe-t-il ces activités au regard de scénarios d'enseignement (globaux et/ou locaux) ? Comment appréhende-t-il la construction de tels scénarios ?

---

[1] Par connaissances didactiques, nous entendons connaissances sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, que celles-ci soient ou non directement liées à des savoirs produits par la recherche en didactique des mathématiques et diffusés en formation.

[2] Précisons que ces étudiants avaient déjà fait un stage de pratique accompagnée en binômes dans des classes de collège.

[3] L'usage de contre-exemples numériques dans la preuve en algèbre élémentaire avait pourtant été évoqué avec ces mêmes étudiants quelques semaines auparavant dans un cours de didactique. On peut par ailleurs raisonnablement penser que l'usage de contre exemples dans la démonstration représente un mode de raisonnement familier pour des étudiants en mathématiques de ce niveau..

b) D'autres constats

On assiste à des phénomènes liés à des exigences de ces étudiants et futurs enseignants qui peuvent ainsi *a priori* paraître étrangement positionnées relativement à l'exercice d'une rigueur en mathématique. La rigueur « de la forme » semble parfois l'emporter sur les exigences sur le fond ou être privilégiée lors d'épisodes observés en classe, y compris dans la production d'écrits intermédiaires d'élèves au tableau qui devraient d'emblée respecter certains canons conventionnels d'écriture mathématiques selon ces étudiants. On observe aussi des erreurs mathématiques et des abus de sens ou de langage, liés à des objets de savoirs qui semblent être transparents ou « naturalisés » chez certains futurs professeurs : comme par exemple, le fait de rabattre la nature d'un nombre (décimal ou fraction) à son écriture (décimale ou fractionnaire), le fait de dénommer des points liés à la représentation graphique d'une suite sur un graphique donné par u_0 ; u_1 ; u_2...au lieu d'indiquer la correspondance attendue entre ordonnées et les termes de la suite. La naturalisation des savoirs mathématiques peut également se traduire par des implicites dans le discours des enseignants débutants : concernant par exemple des changements de point de vue sur des notions (comme le passage subreptice, non explicité, de l'existence –connue - d'un angle droit dans un triangle rectangle à l'énoncé de la perpendicularité des droites supports des côtés), ou encore dans l'absence de distinction entre ce qui relève du sens ou de la technique, etc. De tels phénomènes parfois interprétés comme le seul fait d'une « ignorance mathématique » (ou d'une absence de maîtrise des savoirs mathématiques) nous semblent plus complexes qu'il n'y paraît. En effet, ils pourraient être révélateurs d'obstacles liés à la décontextualisation et à la recontextualisation des *mathématiques* en formation (initiale ou continue) d'enseignants. En disant « mathématiques » ici, nous ne voulons d'ailleurs pas uniquement parler de savoirs mathématiques, mais bien de la part mathématique d'activités d'élèves, d'étudiants et d'enseignants (ou futurs enseignants). C'est bien ce qui nous paraît au cœur du débat ! Il est intéressant de noter que ces obstacles concernent au moins autant, si ce n'est plus, ce qui n'est pas strictement notionnel comme des modes de raisonnement (par disjonction de cas, par l'absurde, par l'utilisation de contre-exemples, etc.), des modes de représentation (liés à l'usage de différents cadres et/ou à des changements de cadres[4]) ou à des aspects sémiotiques (systèmes d'écritures symboliques, figure/dessin en géométrie, etc.). Ils semblent renvoyer souvent à ce que l'une d'entre nous a appelé des niveaux de conceptualisation « non identifiés » ou qui se « brouillent » (Robert 2003), voire à des notions non encore formalisées ou formalisables à un niveau scolaire donné (Pouyanne 2004).

Il nous paraît dès lors nécessaire de (re)penser les descriptions des mathématiques, afin de les rendre disponibles en vue de leurs adaptations dans le métier d'enseignant, et de les (re) penser avec des outils didactiques : cela représente un pari d'enrichissement réciproque des mathématiques et de la didactique que nous pensons nécessaire dans le contexte actuel de la formation d'enseignants. Il s'agit en quelque sorte pour revenir au postulat « naïf » de départ, de penser le « plus » en mathématiques outillé par la didactique.

c) Quelques résultats de recherche sur les pratiques de professeurs débutants

Des travaux menés avec la double approche ont montré qu'une des difficultés des enseignants débutants tient au manque de repères globaux (vue d'ensemble d'un chapitre, d'une année, des élèves) et très fins (automatismes). C'est ce qu'on identifie comme une surcharge au niveau local (du « quotidien » de la classe) au sein des composantes médiatives et cognitives des pratiques enseignantes. Ces professeurs débutants sont « réduits » à élaborer au jour le

[4] Douady (1986)

jour, en partie à l'aveugle, leurs séances, et pendant la classe, ils ne disposent pas encore de moyens d'apprécier ce qui se passe globalement ni de réagir très localement. C'est, en particulier, lié au fait qu'ils ne peuvent pas transférer directement des dispositifs qu'ils ont appréciés comme élèves à des procédés didactiques qu'ils utiliseraient comme enseignants, vu la différence fondamentale de posture entre les deux positions. Par exemple ils ne reprennent pas le travail vécu en petits groupes dans un dispositif didactique à l'université (même s'ils en ont été très contents durant leur formation universitaire), peut-être parce que le gérer en tant qu'enseignant convoque d'autres activités mathématiques et que la simple expérience de ce dispositif en position d'étudiant ne suffit pas à s'y lancer. Des recherches montrent que certains passent tout leur temps à donner des aides individualisées aux élèves, perdant le fil de leur projet, tandis que d'autres restent figés sur leur projet sans tenir compte des activités effectives des élèves (Chesné 2008, Coulange 2012). Le lien entre les mathématiques fréquentées jusqu'ici et celles dont ils ont besoin se fait mal au quotidien, ce qui semble se cumuler avec des manques de repères au niveau de la gestion des activités des élèves. Les besoins ressentis par les enseignants débutants sont, en effet, d'abord liés à la gestion de la classe, charge aux formateurs de rétablir un équilibre entre déroulements et choix de contenus (Coulange & Train 2014). Les analyses didactiques des couples {tâches/déroulement}, privilégiées dans nos descriptions sont donc *a priori* un bon outil à cet égard, d'autant qu'elles s'appuient sur le niveau local de l'activité de l'enseignant et qu'elles permettent petit à petit d'engager dans des réflexions plus globales (sur un ensemble de tâches, un scénario, les programmes, la nature des notions enseignées…).

Compte tenu du contexte des stages, ces réflexions ne sont pas organisées à partir d'un contenu à enseigner, mais à partir d'exemples de pratiques en classe ; vu ce caractère opportuniste, inductif, on peut penser que ce n'est que petit à petit qu'elles permettent aux débutants de reconstituer quelque chose de plus général, cela se faisant d'autant mieux que les formateurs y veillent, aidés par les descriptions précédentes.[5]

d) *Une prise en compte du travail de l'enseignant et de ses spécificités*

Cette nécessaire remontée à un niveau global dans les pratiques de professeurs débutants va de pair avec la prise de conscience des spécificités du métier d'enseignant qui impose peu à peu ses contraintes mais aussi ses marges de manœuvre, en lien avec les composantes institutionnelles, sociales et personnelle des pratiques. Ainsi le travail de l'enseignant est-il individuel et libre apparemment, mais aussi collectif et contraint, de manière plus cachée. On ne peut pas « copier » des pratiques enseignantes[6] mais on peut bénéficier de l'observation des classes d'enseignants expérimentés (par exemple des tuteurs sur les terrains de stage), s'appuyer sur des éléments de pratiques comme les progressions et les devoirs communs pour s'en inspirer. On doit tenir compte des programmes et des habitudes d'un établissement. On peut être mis au courant de régularités liées aux contextes et aux contraintes, on peut apprendre sur quoi portent les diversités des pratiques, et là encore les descriptions évoquées y sont propices...

Le travail du professeur comporte différentes phases, en partie liées, mais aussi en partie indépendantes : préparation et déroulement des séances qui sous-entendent à la fois de l'anticipation et de l'improvisation, appréhendées par les composantes cognitive et médiative des pratiques enseignantes. D'autre part, les activités des élèves et leur transformation en apprentissages ne dépendent pas seulement du professeur avec le véritable deuil que cela peut représenter pour les professeurs débutants : il y a des phénomènes liés aux apprentissages

[5] D'où l'importance d'une culture commune des formateurs, de constituer des équipes, et de les former !

[6] Quand des enseignants novices tentent de "copier" des pratiques, cela peut conduire à des effets "caricaturaux" observés dans leurs pratiques (Chesné 2008).

mathématiques des élèves qui se passent nécessairement à son insu.[7] Nos descriptions des pratiques enseignantes permettent de travailler ces questions.

Enfin une spécificité importante du métier d'enseignant réside dans le fait qu'il n'y a pas vraiment d'évaluation directe possible du travail du professeur. Ceci est lié au fait qu'il n'y a pas d'experts reconnus en tant que tels, contrairement à beaucoup d'autres professions, ce qui tient à la très grande difficulté d'apprécier les effets sur les élèves d'un enseignement précis (on a une boucle). Cela contribue à conférer au métier de professeur un caractère incertain, dynamique, voire changeant, ce qui amène Durand et al. (2002) à parler d'une culture en action des enseignants. À la limite on peut apprécier ce qui ne va vraiment pas, et encore ! Cette absence de « pratiques enseignantes expertes » qui pourraient servir de références absolues nous amène à travailler plutôt en termes de palettes de choix possibles qu'en termes prescriptifs, et c'est une difficulté de plus – même si à terme c'est plutôt un avantage lié à une certaine liberté, et à des possibilités de renouvellement individuel. On peut s'entendre sur le fait que des pratiques adéquates sont associées à des apprentissages partagés par beaucoup d'élèves mais cela reste vague et hors de portée des recherches et peut-être plus encore, de la formation d'enseignants.

III. QUELLES DESCRIPTIONS DES MATHEMATIQUES POUR PENSER LES FORMATIONS D'ENSEIGNANTS : CONTINUITE ET SPECIFICITE

La réflexion que nous allons mener maintenant est très liée au système français de formation, où les futurs enseignants de mathématiques du secondaire ont à effectuer à l'Université, après leur licence, deux années d'études leur permettant d'obtenir un master tout en préparant un concours de recrutement. L'expression « formation professionnelle initiale » renvoie à ces deux seules années, dans la mesure où les étudiants qui s'engagent dans cette formation, le font pour devenir enseignant, après une formation en mathématiques de trois ans à l'université, avec d'autres étudiants. Ce système a évolué ces dernières années, mais il reste que ce concours comporte une partie écrite mathématique, classique, et une partie orale un peu plus liée à l'exercice futur de la profession, notamment limitée aux programmes scolaires. Divers stages en établissements sont proposés aux étudiants, et la deuxième année, pour la quasi-totalité d'entre eux, ils ont à effectuer un service d'enseignement partiel dans un établissement. Il y a beaucoup de variantes dans les parcours de formation possibles au sein des actuels masters en enseignement de mathématiques universitaires mais il y a une constante : l'existence de ces stages en responsabilité durant lesquels les « étudiants stagiaires » exercent le métier d'enseignant auprès d'élèves qui les considèrent comme tels. C'est une étape qui selon nous détermine un « avant » et un « après » dans la formation, en lien avec l'expérience du terrain.

Nous faisons l'hypothèse qu'à partir du moment où les étudiants sont confrontés à la réalité des classes en tant que professeurs, même si c'est bref, ils peuvent vraiment commencer à construire une posture professionnelle et à être perméables à des éléments sur les pratiques enseignantes. On rentre alors dans le domaine de la formation professionnelle des pratiques. Ce qui est fait « avant » alimente bien entendu cette partie de la formation mais reste la plupart du temps décalé par rapport aux pratiques réelles, enrichissant davantage les connaissances que directement les pratiques, de manière nécessaire évidemment mais non suffisante. Nous postulons qu'on peut travailler « après », à partir des stages, dans une certaine continuité avec ce qui a été fait avant, pour que ce qui a été acquis jusqu'aux stages soit prolongé, adapté en connaissance de cause, qu'il n'y ait pas rupture et ce, en vue d'une

[7] Les ergonomes disent que les enseignants gèrent de ce fait, un environnement dynamique et ouvert (Ria 2008).

plus grande efficacité de la formation. Et il nous semble que la didactique fournit des outils très précieux à ce titre, pour penser la continuité et expliciter les transformations en jeu, en ajoutant que l'élaboration et la mise en place de modalités adéquates de ce type d'interventions en formation restent fondamentales. Dans ce qui suit nous nous centrons sur la partie spécifiquement professionnelle de la formation initiale, qui commence avec les stages, pour illustrer ce postulat.

1. Des hypothèses générales

Les théories disponibles sur le développement des pratiques nous amènent à adopter pour cette partie « professionnelle » de la formation, portant sur les pratiques, une hypothèse générale, empruntée à Vygostki, à la psychologie ergonomique et à la didactique professionnelle : pour qu'un travail en formation enrichisse les pratiques – et pas seulement les connaissances, il est nécessaire de s'appuyer sur des pratiques, notamment en classe, au cœur du métier. Il ne s'agit pas seulement de développer par exemple des connaissances sur les mathématiques à enseigner[8] mais bien de partir des pratiques de l'enseignant en classe et de leur complexité, dans des séances effectives (qui peuvent être filmées), pour à terme enrichir les pratiques des formés. Tenir compte de la complexité des pratiques amène à faire travailler ensemble au moins ce qui relève du cognitif et du médiatif, contenus et déroulements, choix des tâches et gestion correspondante de la classe, tant ces éléments sont de fait imbriqués dans l'exercice quotidien du métier. Non seulement en effet dans les études antérieures il est peu tenu compte des programmes d'enseignement mais encore on ne fait travailler que les aspects cognitifs des savoirs, indépendamment de ce qui doit être ajouté si on prend en compte les déroulements. C'est cet ajout que nous visons, sauf qu'en réalité ce n'est pas un ajout mais bien une nouvelle façon d'interroger conjointement, simultanément, avec les étudiants, les choix de contenus et de déroulements. Il s'agit aussi d'aborder dès le début, et sans cacher la réalité, les contraintes liées au métier qui pèsent sur ces choix et de discuter des marges de manœuvre qui restent, liées davantage aux diversités des singularités individuelles en présence. C'est finalement à travers l'élaboration partagée d'une palette de contenus et de déroulements possibles qu'on y arrive, par exemple en faisant discuter les étudiants sur des alternatives proposées par eux (expérimentées ou non) pour une séquence précise.

Une autre hypothèse s'introduit, à la suite, qui concerne les modalités des formations. Pour qu'un tel travail enrichisse les pratiques individuelles, il est essentiel d'intervenir sur des éléments dont les débutants peuvent avoir conscience, sur lesquels ils ont des ressentis, voire des besoins – qu'ils peuvent « accrocher » à ou qui sont proches de leurs propres pratiques. C'est notre manière d'adapter les hypothèses de Vygotski sur la ZPD (zone Proximale de Développement), en introduisant l'idée de travailler en formation au plus près des ZPDP (Zone de Développement Proximal des Pratiques ou Professionnelle) des futurs enseignants. Pour cela le travail collectif est essentiel pour permettre la discussion, l'échange et la prise de conscience de ce qui est en jeu, aidé par des mots pour dire le professionnel introduits dans les formations. La formation consiste alors à organiser l'émergence de ces dires collectifs, par des questionnements systématiques, puis à s'appuyer sur les ressentis et les besoins exprimés des futurs enseignants pour introduire les ressources dont le formateur suppose que ces débutants ont besoin. Ressources qui, nous le pensons, enrichiraient leurs pratiques en remontant des tâches et déroulements précis discutés aux scénarios plus globaux, en passant par le relief sur les notions visés et les exigences du métier (Robert & al. 2012 ; Robert & Vivier 2013).

[8] A la fois mathématiques et didactiques.

2. *Une dernière hypothèse spécifique et une trajectoire possible dans le cadre de la formation initiale actuelle*

À l'évidence les futurs enseignants ont donc besoin de connaissances mathématiques (disponibles), de connaissances sur les mathématiques à enseigner – en lien avec les programmes, de connaissances didactiques pour bâtir des scénarios cohérents et gérer les déroulements, et d'expériences d'enseignement accompagnées et travaillées. Mais ce n'est pas d'une juxtaposition de ces connaissances dont ils ont besoin mais bien d'une appropriation combinée, cohérente, adaptable, qui leur convienne et qui s'insère de manière naturelle dans leurs premières expériences… Nous faisons l'hypothèse que la formation peut y contribuer à condition de respecter une certaine progressivité, sans tout mélanger non plus…

Le travail mathématique avec des outils didactiques[9] pour décrire les mathématiques peut participer à l'organisation nécessaire des connaissances à acquérir pour que l'enseignant s'engage dans ces activités mathématiques spécifiques. Cela concerne notamment la réflexion sur les méthodes, et le fait d'avoir des idées un peu synthétiques sur les mathématiques à enseigner, au fur et à mesure qu'on les fait (re-)travailler. Cela peut nourrir le besoin de disposer du relief sur les notions avant d'en envisager l'enseignement. Cela peut contribuer ainsi à une plus grande disponibilité des connaissances mathématiques à utiliser en participant à leur restructuration, et garantir des possibilités d'adaptations de ces connaissances, ultérieures, dans les classes. Cela peut enfin nourrir plus localement des choix des tâches et la possibilité d'en suivre le déroulement en classe, côté élèves, en disposant de repères issus du travail sur les tâches. Par exemple les types de problèmes en géométrie que Marion et Ovaert. (1980), Amalberti et al. (1988) avaient dégagés peuvent alimenter ce type de travail. D'autres exemples sont donnés dans Robert (1995). On peut aussi proposer quelques problèmes originaux pour donner du sens à une notion, du niveau des connaissances travaillées (avec l'hypothèse qu'il pourra y avoir transfert de ce qui joue alors, surtout si c'est explicité) : par exemple un travail sur les carrés magiques réels et les systèmes générateurs, présenté comme servant à « compter » l'infinité d'éléments d'un espace vectoriel. De manière continue, en commençant avant le début des stages et en continuant après, on peut habituer petit à petit les étudiants à repérer, dans les connaissances mathématiques qu'ils travaillent, non seulement celles qui sont à mettre en fonctionnement dans un exercice donné, mais aussi ce qui est objets, outils, cadres, registres (types d'écriture, de langage), types de raisonnement, niveaux de rigueur, comme dans Pian et Robert (1999) par exemple. Autant de repères permettant à la fois l'élaboration de tâches variées, riches, et la possibilité d'en suivre les déroulements en classe.

A l'occasion d'épisodes de formation dédiés à des anticipations plus précises sur le métier d'enseignant (temps de préparation de stage de pratiques accompagnées, travail sur des questions orales ou écrites à dimensions « professionnelles » posées au concours du CAPES) on peut commencer à faire analyser les adaptations de connaissances qui sont convoquées dans un exercice et les activités correspondantes potentielles d'élèves - que ce soit la reconnaissance de connaissances indiquées ou non, anciennes ou moins, ou le type de traitement à utiliser, avec des mélanges de cadres ou de points de vue par exemple, ou l'organisation des raisonnements qui est en jeu (par étapes)[10]. A un niveau plus global, on peut aussi chercher à faire identifier des niveaux de conceptualisation et des types de stratégie

[9] Comme les analyses de tâches par exemple.
[10] avec des outils comme des grilles d'analyse d'énoncés, inspirés de la double approche ergonomique et didactique (Coulange et Train 2014).

relatifs à ces niveaux en partant de problèmes « bien choisis » comme ceux cités pour la géométrie, dans Robert (2003).

Après le début des stages, on peut commencer à introduire en continuité les questions liées aux apprentissages et à la conceptualisation visée. Les outils déjà cités permettent également d'identifier des origines potentielles des difficultés des élèves, de repérer des malentendus, des implicites ignorés des effets de contrat, d'interroger des proximités supposées (mais erronées) entre les activités mathématiques des élèves et leurs apprentissages,... On introduit en situation l'idée d'apprendre à gérer ensemble tâches et déroulements, en tenant compte des activités des élèves (ou des traces, des observables liés à ces activités devenues effectives). Interviennent aussi des connaissances sur les liens entre les activités des élèves et leurs apprentissages, compte tenu de contextes de classe. L'objectif est d'assurer un rapprochement effectif entre les activités attendues des élèves et les activités que les élèves peuvent développer en classe (en vrai !) – compte tenu du choix fait de l'organisation prévue du travail des élèves. On peut introduire « naturellement », en continuité, des repères sur la mise des élèves en activité (et leur maintien dans l'activité), le type d'improvisation à penser (en s'appuyant sur la préparation et le repérage de ce que font les élèves), sur le type d'aides à donner : on a un objectif précis, coller le plus possible aux activités mathématiques prévues ou plus exactement, à leur potentiel au regard des apprentissages ou de la conceptualisation visée !

Contribuer à élaborer un rapport aux mathématiques riche, qui s'enrichit par l'expérience sur le terrain, qui nourrit leur enseignement et s'adapte aux nécessités des apprentissages des élèves et plus généralement du métier de professeur,[11] voilà ce qui pourrait résumer notre projet de description de l'intervention des mathématiques dans le cadre de la formation des enseignants. Il nous faut ici insister sur la difficulté qu'une telle trajectoire de formation initiale partant des pratiques enseignantes (et non des seules connaissances et savoirs mathématiques, ni même didactiques) peut recouvrir, du fait des mises en lien parfois délicates entre ce qui peut être travaillé avant, « juste avant », pendant et après les stages de ces futurs enseignants, dans différents contextes de formation (à teneur plus ou moins didactique ou mathématique, visant la préparation du concours, l'accompagnement des stages…) ou de stages (de pratique accompagnée, en responsabilité avec des tuteurs…) et avec différents acteurs de la formation (mathématiciens, didacticiens, enseignants intervenant dans la formation ou le tutorat). Les différences de postures (étudiants / enseignants), les différences d'univers de savoirs et de connaissances mathématiques fréquentés (au niveau du secondaire et/ou du supérieur), les « mathématiques » diffuses et imbriquées dans les composantes des pratiques enseignantes sont en cause, objectivement. De telles mises en lien nécessitent des allers-retours entre pratiques enseignantes et « mathématiques », un temps long, une progressivité (et un *timing*) dans la formation des étudiants / futurs enseignants de mathématiques, une mise en cohérence qui passe par un projet partagé et des arrière-plans didactiques et mathématiques communs pour les différents acteurs de la formation. Cela nécessite peut-être également d'éviter un modèle trop « successif » entre formation mathématique *stricto sensu* et professionnelle d'étudiants se destinant à devenir enseignants comme c'est peut-être le cas en France actuellement. C'est aussi un pari d'enrichissement réciproque entre mathématiques et didactique dans la formation des futurs enseignants qui nous paraît envisageable, et même souhaitable.

Notons enfin, en guise d'ouverture (qui nous semble adaptée à la thématique globale de ce colloque), que la nécessité que nous venons de pointer, d'élaborer des rapports spécifiques et

[11] Qui ne soit ni réduit aux seuls apprentissages mathématiques, ou à de « belles mathématiques » que l'on peut vouloir enseigner.

riches aux mathématiques, *via* des activités contextualisées et une remontée à partir de pratiques, ne concerne pas que la formation d'enseignants de mathématiques. Elle touche aussi à de « nouveaux » usages des mathématiques comme ceux liés nouvelles technologies ou relatives à d'autres types de formations professionnelles…. La didactique des mathématiques fournit des descriptions à même de prendre en compte et de renouveler, voire de contribuer à transformer les usages des mathématiques en (re-)contextualisant ces usages dans les activités, les pratiques qui les convoquent. C'est en tout cas ce qui nourrit nos projets.

REFERENCES

Bednarz N., Proulx J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 11-17.

BESSOT A. (2011) L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE AU CŒUR DE LA RECHERCHE EN THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES. IN MARGOLINAS C. et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1997) La théorie des situations didactiques (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal). *Interactions didactiques.* Genève.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1) 77–124.

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(3) 17-54.

Durand M., Ria L., Flavier E. (2002) La culture en action des enseignants. *Revue des sciences de l'éducation* XXVIII (1) 83-103.

Maheux J.-F., Proulx J. (2014) Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques *Annales de didactique et de sciences cognitives* 19, 17-52.

Masselot P. et Robert A. (2007) Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de professeurs enseignant les mathématiques, *Recherche et formation* 56, 15-32.

Marion J., Ovaert J.L. (1980) Sur l'enseignement de la géométrie au lycée, *GREG IREM de Marseille,* 12.

Amalberti R., Arnal J.-P., Beniamino J.-C., Castelli A., Clou J.-P., Marion J., Ovaert J.-L., Proudhon D., Vernet J.-M. (1988) *Géométrie I.* Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré, *Educationnal studies of mathematics* 68, 55-80.

Pian J., Robert A. (1999) Comment élaborer des énoncés mathématiques? Un exemple. *Brochure de l'IREM Paris-Sud*, N°89. Paris.

Pouyanne N. (2012) Notions non encore formalisées. In Robert et al. (Eds.) *Une caméra au fond de la classe.* Besançon : Presses universitaires de Franche Comté.

Proulx J. (2012) De l'existence de mathématiques de la didactique – réflexions sur l'articulation entre mathématique et didactique, In Dorier et al. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF 2012*. Genève, suisse : EMF.
http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ria L. (2008) Ergonomie du travail enseignant. In Van Zanten A. (Ed.) *Dictionnaire de l'Education* (pp.282-284). Presses Universitaires de France.

Robert A. (1995) *L'épreuve sur dossier à l'oral du capes de mathématiques (Géométrie).* Paris : Ellipses.

Robert A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation *Petit x,* 63, 7-29.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation, *Recherches en didactique des mathématiques* 27/3, 271-312.

Robert A. (2008a) Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 11–22). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008b) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–54). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008c) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59–65). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A., Lattuati M., Penninckx J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée*. Paris : Ellipses.

Robert A., Penninckx J., Lattuati M. (2012) *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe.* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignantes de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologie*s 2(4), 505–528.

Robert A., Vivier L. (2013) Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques, *Éducation et didactique 7-2,* 115-144.

Vandebrouk F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès Editions.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'UTILISATION DES DEGRÉS DE CERTITUDE COMME OUTIL DE PROFESSIONNALISATION EN FORMATION DES MAÎTRES DU PREMIER DEGRÉ

Michel DERUAZ[*] - Luc-Olivier BUENZLI[**]

Résumé – On attend des futurs enseignants du premier degré un changement de positionnement face aux mathématiques. Ils doivent, pendant leur formation, quitter le rôle d'élève qui attend une validation de son enseignant pour endosser celui moins confortable d'expert des mathématiques qui sera le sien dans sa classe. Pour favoriser cette transition, nous utilisons, dans un cours de formation initiale, des degrés de certitude lors de sondages construits à l'aide de QCM. Nous proposons, dans cette contribution, de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été menée pour évaluer les conséquences de l'utilisation de ces degrés de certitude sur la formation.

Mots-clefs: degrés de certitude, questions à choix multiples, mathématiques, formation des enseignants.

Abstract – On attend des futurs enseignants du premier degré un changement de positionnement face aux mathématiques. Ils doivent pendant leur formation quitter le rôle d'élève qui attend une validation de son enseignant pour endosser celui moins confortable d'expert des mathématiques qui sera le sien dans sa classe. Pour favoriser cette transition, nous utilisons dans un cours de formation initiale des degrés de certitude lors de sondages construits à l'aide de QCM. Nous proposons, dans cette contribution, de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été menée pour évaluer les conséquences de l'utilisation de ces degrés de certitude sur la formation.

Keywords: degrees of certainty, multiple-choice questions, mathematics, teacher training.

I. INTRODUCTION

1. *Notre positionnement didactique*

Pour commencer, nous allons, comme le demandent les coordinateurs, tenter d'expliciter notre vision de ce qu'est la didactique en disant quelques mots sur notre positionnement face à cette discipline, positionnement fortement lié à nos parcours professionnels. Avant d'intégrer l'équipe des formateurs de l'Unité de Recherche et d'Enseignement Maths Sciences (UER MS) de la Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP VD) pour participer à la formation des maîtres, nous avons une expérience d'enseignants; en mathématiques dans un Gymnase (Lycée) pour le premier auteur, à l'école primaire pour le second. Assez rapidement, nous avons éprouvé le besoin de compléter notre formation pour mieux comprendre les

[*] HEP Vaud – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch
[**] HEP Vaud – Suisse – luc-olivier.bunzli@hepl.ch

Deruaz M, Bünzli L.-O. (2015) L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation EN formation des maîtres du premier degré. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 95-107.

enjeux de la formation et essayer d'intégrer des éléments plus théoriques dans les cours; en suivant le *Master en didactique des disciplines Spécialité Professionnelle : Formation des formateurs* en mathématiques de l'Université Paris Diderot pour le premier auteur, un *Master en Sciences de l'Education* à l'Université de Genève pour le second. À la suite de ces formations, nous participons à des colloques et contribuons à des recherches, mais essentiellement avec un regard de formateur.

2. *Le contexte de cette contribution*

Cette contribution se situe dans la continuité de celle que nous avions présentée dans le groupe de travail GT1 à EMF 2012 (Deruaz & Clivaz 2012). Nous avions alors décrit la mise en place d'un cours de savoir disciplinaire dans le cadre de la formation initiale des maîtres du premier degré à la HEP VD.

En automne 2012, un nouveau plan d'études a été mis en œuvre pour la formation de ces maîtres. L'UER MS a reçu le mandat de proposer deux modules spécifiques à l'enseignement des mathématiques, l'un au deuxième et l'autre au cinquième semestre de formation. Lors de la conception de ces deux modules, nous avons essayé d'intégrer les conclusions des travaux du GT1 et plus particulièrement les remarques qui ont suivi notre présentation. Nous avons aussi évidemment tenu compte d'autres résultats obtenus dans le cadre d'une recherche dont l'objectif était d'évaluer la mise en oeuvre de notre cours de savoirs disciplinaires. En particulier en ce qui concerne l'utilisation d'une plateforme en ligne pour les exercices et l'utilisation de questions à choix multiples lors de la certification du module (Deruaz 2015).

Dans leurs conclusions, les coordinateurs du GT1 mettaient en évidence l'importance de l'articulation entre connaissances didactiques et connaissances mathématiques:

> Dans les analyses de pratiques d'enseignants, autant en contexte de formation (Deruaz, Passaro, Proulx) qu'en contexte d'enseignement (Clivaz), il n'était pas toujours facile de distinguer ce qui relevait d'une connaissance didactique ou d'une connaissance mathématique.
>
> À cet égard, les discussions ont fait ressortir l'intérêt de dissocier ces deux types de connaissances pour ensuite les faire fonctionner et les articuler. Il s'agit également de clarifier le rôle de la formation pour permettre cette articulation. (Clivaz, Proulx, Sangaré, & Kuzniak 2012, pp. 156-157)

Pour permettre à nos étudiants de faire plus facilement des liens entre les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et l'enseignement des mathématiques, nous proposons un module qui met en évidence cette articulation avec une partie *cours en amphithéâtre* sur les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement au sens de Ball et de son équipe (Ball, Thames & Phelps 2008), mais en intégrant le plus souvent possible des liens avec des tâches issues des moyens d'enseignement officiels (manuels). La partie *séminaires* (20 à 30 étudiants) a elle été construite à partir d'éléments estimés propices à faire des liens entre les contenus du cours et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Nous avons aussi décidé d'évaluer les contenus mathématiques et les contenus didactiques lors d'un seul examen construit à l'aide de QCM et en utilisant des degrés de certitude (Deruaz & Clivaz 2012). Dans cette contribution, nous allons essayer de montrer comment l'utilisation de degrés de certitude pendant le cours et lors de l'examen peut agir sur le positionnement des futurs enseignants du premier degré face aux mathématiques.

II. LA DESCRIPTION DU MODULE

Les objectifs de ce module et l'utilisation des degrés de certitude ont déjà été présentés dans des travaux antérieurs (Deruaz 2015, à paraître). Pour faciliter la lecture de cette contribution, nous avons estimé qu'il était important de les faire figurer dans ce texte, mais ce chapitre reprend très largement les textes cités ci-dessus.

1. Les objectifs de la formation

La plupart des étudiants qui choisissent cette formation viennent de filières non scientifiques du Gymnase. Leur posture est donc souvent celle d'un élève qui répond à une question qui lui a été posée et qui attend que sa réponse soit validée par un expert, en général son maître de mathématiques. Dans ses futures classes, même s'il s'en défend parfois, ce même étudiant sera l'expert en mathématiques qui devra se positionner face aux questions ou aux réponses des élèves. Ce rôle d'expert que doit exercer l'enseignant en mathématiques a été décrit par Robert, Lattuati et Penninckx (1999) pour ce qui concerne l'enseignement au lycée. Ces auteures définissent ce qu'elles nomment les *pratiques expertes* des mathématiciens à l'aide de cinq caractéristiques. La première de ces caractéristiques nous semble aussi adéquate pour les futurs experts des mathématiques de l'école primaire:

> La disponibilité des connaissances (le fait que des connaissances peuvent être utilisées à bon escient sans même avoir été rappelées), leur organisation et les rapports entre elles.
>
> Ce caractère disponible des connaissances de l'expert se traduit, par exemple, par sa capacité à pouvoir chercher systématiquement la solution d'un problème en dehors du strict cadre où il est posé, à essayer de mettre le problème en relation avec d'autres questions lorsque la solution n'est pas immédiate. Cette aptitude à réaliser des changements de perspectives, à pouvoir aller chercher d'autres savoirs que ceux qui étaient *a priori* en cause, traduit la disponibilité des connaissances chez l'expert. De plus, lorsque cette recherche n'est pas guidée par les termes apparents du problème, l'expert ne la conduit pas complètement au hasard: elle est orientée par l'organisation des connaissances dont il dispose. Nous insistons sur le fait que ce ne sont pas seulement les connaissances qui sont disponibles, mais aussi, et de manière intimement liée, les rapports entre ces connaissances.
>
> Cette disponibilité se traduit aussi par l'inscription (active et personnelle) de toute nouvelle connaissance dans les précédentes. (Robert & al. 1999, pp. 13-14)

De notre point de vue, cette disponibilité des connaissances, et surtout des rapports entre des connaissances qui ne semblent pas liées entre elles, sont fondamentaux dans le travail de l'enseignant de mathématiques. De nombreuses recherches (par exemple Vandebrouck 2008) montrent que ce n'est souvent pas le cas chez les enseignants débutants, même au niveau secondaire où les enseignants de mathématiques ont pourtant une formation académique importante dans cette discipline. On peut donc faire l'hypothèse que ce manque de disponibilité des connaissances et de certains liens entre elles est aussi présent chez les futurs enseignants primaires vaudois, dont le bagage mathématique ne dépasse pas celui enseigné à l'école secondaire.

Clivaz (2011) montre que cette disponibilité des connaissances et de certains liens entre elles, s'ils sont nécessaires pour le maître secondaire, sont aussi importants au niveau primaire. Ces concepts permettent notamment à l'enseignant de donner du sens aux savoirs qu'il enseigne et aux connaissances qu'il utilise pour préparer ses cours et pour gérer les situations didactiques en classe. Pour que les liens entre les différentes connaissances mathématiques soient disponibles à l'enseignant débutant, il est nécessaire qu'ils soient mis en évidence et travaillés pendant sa formation et que leur importance soit relevée tant dans la résolution de problèmes liés directement aux connaissances spécifiques travaillées dans le cours que dans des situations proches de celles qui seront vécues en classe. Or des travaux récents, notamment Clivaz et Deruaz (2013), Dias et Deruaz (2012) permettent d'affirmer que, pour une grande partie des étudiants futurs enseignants, ces liens ne sont pas disponibles.

Cette disponibilité des connaissances et des liens entre elles devrait non seulement permettre à l'enseignant débutant de préparer ses cours et de donner du «sens» à ce qu'il veut faire apprendre à ses élèves, mais elle devrait aussi lui permettre de se positionner sur des faits mathématiques. En effet, comme nous l'avons vu plus haut, dans la relation pédagogique, il sera l'expert et les élèves attendront de lui des réponses et des validations. Il faudra donc qu'il soit capable non seulement de donner une réponse ou de se positionner sur la réponse d'un élève, mais qu'il puisse évaluer son degré de certitude à propos de sa réponse pour décider s'il peut la fournir telle quelle aux élèves ou s'il doit se renseigner avant de le faire.

Pour se prononcer de manière définitive sur un résultat qu'il ne connaît pas encore, l'expert en mathématiques doit soit exhiber un contre-exemple, soit démontrer le résultat. Ce processus peut être long et n'est pas toujours possible en classe dans le feu de l'action. L'enseignant doit alors se contenter d'une estimation de la vérité du résultat, d'une preuve pragmatique et non formelle. Proposer une réponse n'est donc pas suffisant, on attend de l'enseignant qu'il puisse associer à sa réponse un niveau de certitude qui, évidemment, lui est propre.

2. *Les degrés de certitude*

Comment intégrer les objectifs de ce module, qui portent autant sur le positionnement face aux mathématiques et à leur enseignement que sur les contenus mathématiques eux-mêmes dans le processus de certification? Les forces de l'UER MS ne lui permettent pas de corriger de manière satisfaisante plus de 200 copies d'un examen écrit traditionnel dans les délais impartis. Elle a donc opté pour la réalisation d'un examen standardisé en utilisant des Questions à Choix Multiple (QCM) avec Degrés de Certitude (DC). Comme nous le disions déjà dans notre contribution à EMF 2012:

> «Ce n'est pas ce que nous ignorons qui nous cause des problèmes, mais ce que nous savons ... et qui est faux. Reconnaître (...) ses degrés d'incompétence est une habileté fondamentale, une compétence cruciale pour tout apprenant.» (Gilles 2010, p. 101). À la suite des travaux de Gilles, nous estimons qu'il est important, voire même essentiel pour un enseignant d'être capable d'estimer son degré de certitude par rapport à une affirmation qu'il peut être amené à faire, en particulier lorsqu'il répond à un élève ou lorsqu'il se positionne par rapport à une proposition d'un élève. L'ignorance ignorée est ainsi particulièrement dangereuse. Les DC permettent de tenir compte, dans le barème, de la certitude avec laquelle l'étudiant a choisi sa réponse parmi les solutions proposées. Nous avons donc utilisé les DC avec l'échelle donnée dans le tableau 1. (Deruaz & Clivaz 2012, p. 191)

Si vous considérez que votre réponse a une probabilité d'être correcte comprise entre	DC N°	Vous obtiendrez les points suivants en cas de réponse	
		correcte	incorrecte
0 % et 25 %	0	+13	+4
25 % et 50 %	1	+16	+3
50 % et 70 %	2	+17	+2
70 % et 85 %	3	+18	+0
85 % et 95 %	4	+19	-6
95 % et 100 %	5	+20	-20

***Tableau 1** – Échelle DC classiques (Gilles, 2010, p. 69)*

Les résultats de cette première expérience avec le cours de savoirs disciplinaires s'étant avérés globalement positifs (Deruaz 2015), il a été décidé de la prolonger dans le nouveau module, non seulement pour l'examen, mais également pendant les séances de cours dans le but de rendre actifs les étudiants et de les faire réfléchir sur les processus de vérification des résultats possibles ou non en fonction des questions posées; de leur faire prendre conscience qu'en mathématiques, dans la mesure du possible, on ne relit pas sa réponse, mais on la vérifie.

Nous proposons dans cette contribution de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été mise en œuvre pour essayer d'évaluer les conséquences de cette utilisation élargie des degrés de certitude sur le positionnement de nos étudiants face aux mathématiques.

III. L'UTILISATION DES DEGRES DE CERTITUDES PENDANT LE COURS

Les résultats ci-dessous ont été récoltés au printemps 2014. Le cours décrit est constitué de 12 séances de 90 minutes dont trois ont porté sur le thème de la logique et des ensembles. 360 étudiants étaient inscrits au cours et 350 se sont présentés à la session d'examen. Si la logique n'est pas enseignée à l'école primaire, le programme officiel mentionne dans son chapeau, sous «visées prioritaires»:

> Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace. (Plan d'étude romand 2010)

Plus loin dans le texte, on trouve des expressions du type «tri et organisation des informations (liste, schéma,…)», «déduction d'une information nouvelle à partir de celles qui sont connues» ou encore «vérification, puis communication d'une démarche (oralement) et d'un résultat en utilisant un vocabulaire ainsi que des symboles adéquats». Ceci dès les premières années de la scolarité. Pour reprendre la terminologie utilisée par Mesnil dans sa thèse (Mesnil 2014), il ne s'agit pas d'enseigner aux futurs enseignants de l'école primaire des bases de logique mathématique, mais de les sensibiliser à la logique des mathématiques.

Notre objectif est de leur préciser quelques notions comme la conjonction, la disjonction, la négation, l'implication et l'équivalence en mettant en évidence les liens avec la théorie des ensembles et les notions d'intersection, de réunion, d'inclusion ou de complémentarité, mais aussi les difficultés liées aux significations parfois différentes dans la langue naturelle (Mesnil 2014, pp.118-139). Dans un second temps, et c'est ce qui sera décrit dans les deux séances analysées plus précisément par la suite, nous cherchons à mettre en évidence quelques difficultés récurrentes comme:

1. Ce n'est pas parce qu'un résultat est vrai que le raisonnement qui a permis d'obtenir ce résultat est correct. Nous pouvons illustrer cela avec l'exemple ci-dessous sur lequel nous reviendrons dans notre analyse:

   Les canards sont des oiseaux,
   Or les palmipèdes sont des oiseaux,
   Donc les canards sont des palmipèdes.

   Les canards sont bien des palmipèdes, les deux prémisses et la conclusion sont vraies, mais la déduction n'est pas correcte.

2. Pour écrire la négation d'une conjonction (respectivement d'une disjonction), il faut prendre la disjonction des négations (respectivement des conjonctions).

Plusieurs auteurs ont déjà relevé ce type de difficultés, par exemple:

> Alors que les mots «et» et «ou» peuvent, dans certains cas, être dans la langue usuelle des opérateurs sur les propositions qui correspondent aux connecteurs ET et OU, il n'y a pas dans la langue française d'opérateur sur les propositions qui serait l'analogue du connecteur NON.

> Ainsi, là où la conjonction des propositions «n est pair» et «n est un multiple de 3» est «directement» la proposition «n est pair ET n est un multiple de 3», la négation de la proposition «n est pair», qui est à strictement parlé la proposition «NON(n est pair)», ne sera pratiquement jamais formulée ainsi; on dira plutôt éventuellement «n est non pair», ou plus souvent «n n'est pas pair» et même encore plus souvent «n est impair». (Mesnil, 2014, p 122)

Une autre difficulté est liée à une *mise en facteur*, dans le langage courant, du sujet et du verbe dans le but d'alléger le texte. Par exemple dans la phrase «j'ai mangé du riz et du poulet» que l'on doit développer en «j'ai mangé du riz et j'ai mangé du poulet» avant de pouvoir en prendre la négation qui est «je n'ai pas mangé de riz ou je n'ai pas mangé de poulet».

1. Une première séance de cours

Pendant le cours, nous affichons des questions sur l'écran de projection et nous demandons aux étudiants d'y répondre sur la plateforme moodle à l'aide de leur téléphone portable, tablette ou ordinateur. Tous les étudiants ne répondent pas, mais nous arrivons, en général, à obtenir plus de 200 réponses. Nous avons utilisé ce procédé pour la première fois au tout début de la seconde séance de cours en posant deux questions relatives à l'affirmation ci-dessous:

Les carrés ont quatre côtés de même longueur,
Or les losanges ont quatre côtés de même longueur,
Donc les carrés sont des losanges.

A la question *le raisonnement ci-dessus est il correct?,* 66% des étudiants ont répondu positivement et à la question *les carrés sont-ils des losanges?,* 45% des étudiants ont répondu positivement. On remarque donc qu'à ce moment-là du cours, beaucoup d'étudiants ne maîtrisent pas l'enchaînement de propositions logiques et qu'une partie non négligeable (nécessairement plus de 20%) de ces étudiants prétendent que le raisonnement est correct, mais contredisent ensuite la conclusion de ce même raisonnement en affirmant que les carrés ne sont pas des losanges! Evidemment ces deux questions mettent en évidence plusieurs difficultés au niveau de la logique des mathématiques; il y a la non correction de l'enchaînement logique et le fait que si formellement les carrés sont des losanges, à l'école primaire ce n'est pas nécessairement le cas! Nous estimons toutefois qu'il est important que l'enseignant de l'école primaire sache que si dans sa classe les carrées ne sont pas nécessairement des losanges pour les élèves, lorsque ceux-ci seront à l'école secondaire, alors les carrés seront des losanges. Les bonnes réponses n'ont pas été données aux étudiants. Il leur a simplement été dit que cela serait repris à la fin de la séance.

Lors de cette même séance de cours, après avoir travaillé un moment sur la différence entre appartenance à un ensemble et inclusion d'un sous-ensemble dans un autre sous-ensemble d'un même ensemble, on a proposé le syllogisme ci-dessous comme exemple d'introduction:

Les chiens sont des mammifères,
Or les mammifères sont des animaux,
Donc les chiens sont des animaux.

En l'illustrant avec un diagramme de Venn. Immédiatement après, nous avons proposé un nouveau sondage en introduisant cette fois des degrés de certitude en proposant le syllogisme ci-dessous:

Les truites sont des poissons,
Or les poissons savent nager,
Donc les truites savent nager.

A la question *le syllogisme est-il correct*?, nous avons obtenu 98% de réponses positives avec une répartition des degrés de certitude donnée dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
0%	3%	5%	18%	23%	52%	88,8%

Tableau 2 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On observe donc que lorsqu'il s'agit d'appliquer directement un résultat qui vient d'être vu, les étudiants le font correctement et utilisent majoritairement des degrés de certitude élevés.

Après avoir discuté quelques minutes de ces résultats avec les étudiants, on a proposé le sondage suivant:

Les canards sont des oiseaux,
Or les palmipèdes sont des oiseaux,
Donc les canards sont des palmipèdes.

A la question *le syllogisme est-il correct?*, nous avons obtenu 26% de réponses positives avec une répartition des degrés de certitudes données dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
0%	5%	9%	21%	24%	41%	85,2%

Tableau 3 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On observe que lorsqu'il ne s'agit plus d'une application simple du résultat précédent, environ un quart des étudiants se retrouvent en difficulté et que, même s'ils sont un peu moins élevés, les degrés de certitude utilisés par les étudiants à ce sondage sont proches de ceux utilisés lors du sondage précédent.

Nous avons ensuite discuté avec les étudiants, notamment à l'aide du syllogisme ci-dessous:

Les canards sont des oiseaux,
Or les pingouins sont des oiseaux,
Donc les canards sont des pingouins.

Cet exemple nous permet d'insister sur le fait que ce qui nous intéresse n'est pas la validité de la troisième affirmation, mais la correction de l'enchaînement entre les prémisses et la conclusion. Nous avons alors pris une trentaine de minutes pour rappeler aux étudiants les définitions des quadrilatères usuels ainsi que quelques propriétés de ces quadrilatères. Avant de terminer cette seconde séance de cours, nous avons proposé un dernier sondage aux étudiants:

Les carrés ont quatre côtés de même longueur,
Or les losanges ont quatre côtés de même longueur,
Donc les carrés sont des losanges.

Nous leur avons alors uniquement demandé si ce syllogisme était correct et nous avons obtenu que 42% de réponses affirmatives ce qui est meilleur que les 66% obtenus lors du premier sondage, mais nettement moins bien que les 26% obtenus lors du troisième sondage pour lequel la structure logique était identique. Nous pouvons constater que les étudiants ont plus de difficultés à appliquer ces raisonnements logiques lorsque le contexte est géométrique que lorsqu'il est indépendant des mathématiques. Ce n'est pas surprenant car s'ils savent probablent tous que les canards sont des palmipèdes, ils hésitent encore sur les inclusions entre les différents ensembles de quadrilatères pour lesquelles les règles sont différentes dans le contexte du cours de mathématiques que ce qu'ils utilisent en dehors du cours. Ils ne peuvent donc pas se fier à leur intuition. C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles nous utilisons ces exemples, car nous faisons l'hypothèse que s'ils ne peuvent plus se fier à leur intuition, ils seront le plus enclins à utiliser les outils de la logique des mathématiques que nous leur proposons. Pour ce qui est des degrés de certitude, nous avons obtenu les résultats ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
1%	3%	15%	25%	18%	38%	83,1%

Tableau 4 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On ne peut que constater que, lors de cette première séance dans laquelle les DC sont utilisés et sur ce chapitre particulier, les DC choisis par les étudiants sont très stables, ceci même pour des questions pour lesquelles les taux de réussite sont relativement différents. Nous relevons toutefois qu'il s'agit de la première utilisation des degrés de certitude dans ce module et que nous les proposons sur des contenus nouveaux et difficiles pour lesquels les étudiants n'ont, pour l'instant pas beaucoup d'outils de vérification à disposition.

A l'issue de la séance, nous avons mis à la disposition des étudiants un test en ligne composé de QCM avec degrés de certitude pour leur permettre de s'exercer. Ils avaient en particulier la possibilité d'effectuer plusieurs fois le test pour mesurer l'impact du choix des degrés de certitude sur la note obtenue.

2. *Une deuxième séance de cours*

En analysant les résultats d'un pré-test qui a été proposé aux étudiants avant la première séance de cours, nous avons observé qu'à la question:

Je suis une fille et je n'ai pas les yeux bleus
Quelle est la négation de cette phrase?
Veuillez choisir une réponse:

1. *Je suis une fille et j'ai les yeux bleus*
2. *Je suis un garçon et je n'ai pas les yeux bleus*
3. *Je suis une fille ou j'ai les yeux bleus*
4. *Je suis un garçon ou j'ai les yeux bleus*

Seuls 41% des étudiants ont répondu correctement. C'est à la suite de ce constat que nous avons proposé, au début de cette séance de cours qui allait en particulier porter sur la négation d'une affirmation et le complémentaire d'un sous-ensemble, le sondage qui suit:

La négation de l'affirmation

Alice est drôle et Bill le lézard n'est pas lourd

est la proposition

1. Alice est drôle et Bill le lézard est lourd
2. Alice n'est pas drôle et Bill le lézard est lourd
3. Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard n'est pas lourd
4. Bill le lézard est lourd ou Alice n'est pas drôle

5. Bill le lézard n'est pas lourd et Alice est drôle
6. Aucune de ces propositions.

Nous avons alors obtenu les résultats suivants:

1	2	3	4	5	6
2%	57%	7%	19%	8%	7%

***Tableau 5** – Réponses choisies par les étudiants*

On constate que le taux de réponses correctes (19%) est encore plus faible que lors du pré-test. Ceci est peut-être dû au fait que certains étudiants cherchaient la réponse *Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard est lourd* et ont ainsi choisi la réponse *aucune de ces propositions*. Mais même en ajoutant ces deux résultats, on obtient un résultat (26%) encore inférieur à celui obtenu lors du prétest (41%). Le fait que la phrase de départ ne soit pas habituelle a peut-être perturbé certains étudiants qui ont répondu spontanément de manière correcte lors du pré-test et qui ont cherché à utiliser un modèle mathématique qu'ils ne maîtrisent pas encore lors du sondage pendant le cours. Lors du pré-test, le feed-back proposé aux étudiants était simplement vrai ou faux, mais ne donnait pas la réponse correcte. Il est possible que certains étudiants qui étaient convaincus par leur réponse incorrecte ont été déstabilisés et ont répondu au hasard lors du sondage, pour lequel nous avons obtenu les degrés de certitude ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
7%	13%	24%	26%	17%	13%	68,1%

***Tableau 6** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On constate que les étudiants ont globalement choisi des degrés plus prudents que lors de la séance de cours précédente. Il est possible que cela soit lié à leur première expérience et à leur entraînement à l'utilisation des degrés de certitude, mais il est aussi possible que cela soit lié au fait qu'une question analogue qui n'avait pas donné de bons résultats a été posée lors du pré-test. Pour répondre partiellement à cette interrogation, nous avons proposé un sondage avec une question d'une autre nature immédiatement derrière ce premier sondage:

Effectuer la soustraction 1011010 - 649709.
Dans quelle boîte se trouve le résultat?

A	B	C	D	E
200691	205351	215051	244721	250261
218961	223871	257681	263921	263681
244441	309591	304601	342291	289301
251741	316971	308531	361301	324941
314971	355511	312061	369981	335971
356001	377451	369961	393321	369211

Le passage par les boîtes est ici nécessaire pour que les étudiants ne puissent pas transformer ce problème de soustraction en un problème d'addition à partir des solutions proposées. Par contre, ils peuvent, une fois qu'ils ont trouvé un résultat à cette soustraction, le vérifier à l'aide d'une addition. Dans ce cas, ils ont utilisé un outil d'expert qui leur permet de choisir un degré de certitude plus élevé que s'ils avaient uniquement effectué la soustraction, sans possibilité de la vérifier.

Il se trouve que 89% des étudiants qui ont répondu à cette question y ont répondu correctement. Un certain nombre d'étudiants n'ont pas eu le temps d'y répondre. Les degrés de certitude utilisés par les étudiants sont mentionnés dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
3%	3%	7%	13%	16%	58%	86,7%

***Tableau 7** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

Nous constatons donc que si nous proposons aux étudiants une tâche simple et isolée pour laquelle un certain nombre d'entre eux a la possibilité de vérifier son résultat, ils choisissent des degrés de certitudes plus élevés, même si la question n'a pas été travaillée pendant le cours. Nous avons ensuite commenté ces résultats auprès des étudiants et mis en évidence la possibilité de vérification offerte par cette question.

Nous avons alors travaillé sur le complémentaire d'un sous-ensemble et mis en évidence les lois de De Moivre $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ sans faire le lien avec les négations d'une conjonction ou d'une disjonction.
Puis nous avons reproposé le premier sondage aux étudiants:

La négation de l'affirmation

Alice est drôle et Bill le lézard n'est pas lourd

est la proposition

1. Alice est drôle et Bill le lézard est lourd
2. Alice n'est pas drôle et Bill le lézard est lourd
3. Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard n'est pas lourd
4. Bill le lézard est lourd ou Alice n'est pas drôle
5. Bill le lézard n'est pas lourd et Alice est drôle
6. Aucune de ces propositions.

Nous avons alors obtenu les résultats ci-dessous:

	1	2	3	4	5	6
Sondage 1	2%	57%	7%	19%	8%	7%
Sondage 3	1%	20%	13%	61%	4%	1%

***Tableau 8** – Réponses choisies par les étudiants*

Nous pouvons constater qu'une partie importante des étudiants ont su interpréter les résultats ensemblistes mis en évidence pendant le cours dans le contexte équivalent, mais différent de la logique. Au niveau des degrés de certitude, nous obtenons les résultats ci-dessous:

	0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
1	7%	13%	24%	26%	17%	13%	68,1%
3	5%	6%	19%	21%	23%	27%	76,7%

***Tableau 9** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On constate qu'un certain nombre d'étudiants a choisi des degrés de certitude plus élevés après avoir suivi le cours qu'avant, ce qui laisse penser qu'ils sont plus sûrs de leur réponse. Malheureusement, les outils que nous avons à disposition pour effectuer nos sondages ne nous permettent pas de relier le degré de certitude utilisé par un étudiant avec la réponse qu'il a choisie. Nous ne pouvons donc pas savoir si, individuellement, les étudiants utilisent les degrés de certitude de manière performante, ce que nous pouvons par contre faire lors de l'examen. (Deruaz à paraître)

Si nous reprenons le contenu de cette seconde séance de cours, nous pouvons constater que, dans un premier temps la plupart des étudiants ne savent pas retrouver la négation d'une conjonction et que même s'ils utilisent les degrés de certitude de manière plus prudente que lors du cours précédent, cette utilisation n'est pas encore optimale. Pendant le cours, mettons en évidence que dans certains cas, il y a des possibilités de vérifier son résultat et d'ainsi pouvoir choisir des degrés de certitudes plus élevés. Nous montrons ensuite que dans le cas de la négation d'une conjonction, on peut se référer à un résultat général (formule de De Moivre) qui peut s'énoncer dans le cadre de la logique ou dans celui de la théorie des ensembles. Nous montrons aussi que si l'on passe dans le cadre de la théorie des ensembles, il y a une possibilité relativement simple de retrouver cette formule en hachurant des diagrammes de Vienne. En procédant ainsi, nous mettons en évidence des liens entre différentes connaissances provenant de cadres différents, mais voisins. Ce passage entre le cadre de la logique et celui de la théorie des ensembles est un outil souvent utilisé par le mathématicien expert pour répondre rapidement à une question ou pour valider sa première réponse en utilisant les outils d'un autre cadre. Nous faisons l'hypothèse que la mise à disposition d'un résultat décontextualisé (formule de De Moivre), mais aussi la mise en évidence de l'opportunité du changement de cadre et ainsi la possibilité de répondre à une même question avec plusieurs outils différents devraient petit à petit permettre aux étudiants de changer de posture face aux mathématiques et de prendre le risque de se positionner en expert et de ne plus systématiquement aller chercher un résultat dans sa mémoire.

D'autres analyses des résultats des examens (Deruaz à paraître) mettent en évidence le fait que les étudiants choisissent des DC plus élevés lorsque les tâches sont simples et isolées (Robert 2008, p. 49) ou lorsque des outils de vérification sont à disposition que pour les autres questions.

IV. CONCLUSION

Dans une étude qui questionne les effets des modalités d'évaluation sur le rapport au savoir et à la formation de futurs enseignants du premier degré, Breithaupt et Clerc-Georgy interrogent des étudiants sur leur perception de deux examens, dont celui du module décrit dans cette contribution.

> Céline aime beaucoup les maths. Elle est *plus mathématique que langues*. Elle se souvient avoir *fait beaucoup de méthodes pour trouver la réponse*, au moins deux ou trois méthodes (…). Pour l'examen de maths le procédé [utilisation des DC] lui semble logique, car les mathématiques sont vérifiables. (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître)

Céline indique spontanément le lien entre une utilisation, pertinente de son point de vue, des degrés de certitude et des possibilités de vérification qu'offrent les mathématiques de vérifier ces résultats en utilisant des méthodes différentes pour les obtenir.

Dans son entretien, une autre étudiante, Marie, insiste sur le fait qu'elle a eu une histoire particulière avec les mathématiques. «Elle a *toujours fait partie des nuls en maths, des filles qui avaient peur des maths, qui n'étaient pas bonnes*. Elle a entendu *des milliers de profs* lui dire "*Mais enfin, fais un effort, c'est logique*".» (Op. cité). Elle met toutefois aussi en évidence le lien entre outils de vérification et choix du degré de certitude.

> Le fait d'être capable de vérifier plusieurs fois ses réponses permet à Marie d'indiquer de hauts degrés de certitude, exception faite des questions de contenus didactiques. (…). *Pour les maths c'est plus logique, ça reste du calcul, c'est juste c'est faux, il n'y a pas d'entre-deux.* (…) Indiquer un haut degré de certitude signifie être *convaincue*, ce qui ne peut se faire sur des questions didactiques où il faudrait *suivre la première intuition, c'est souvent la bonne*. Le fait de ne pas pouvoir vérifier, le fait de ne pouvoir être sûre malgré les relectures engendrent de l'incertitude. (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître)

Ce témoignage montre que Marie a changé de posture face aux mathématiques entre le début et la fin du module. Elle a acquis des outils d'expert, puisqu'elle cherche à vérifier ses résultats lorsque c'est possible. Peut-être que l'utilisation des degrés de certitude pendant le cours a contribué à cette évolution, non seulement chez Marie, mais chez une partie des étudiants qui ont suivi ce module et donc que nous avons au moins partiellement atteint cet objectif. Nous avons pu mettre ne évidence dans un autre article (Deruaz à paraître), une utilisation plus pertinente des degrés de certitude lors de l'examen qui a suivi le cours de 2014 (celui dont nous traitons dans cette contribution) que dans le cours de 2013 lors duquel nous avions beaucoup moins utilisé des sondages avec degrés de certitude pendant le cours, mais nous n'avons pas d'outils qui nous permettent d'affirmer que l'un est une conséquence directe de l'autre mêm si c'est le seul changement significatif qu'il y a eu entre les deux occurrences du cours. Par ailleurs, les résultats de 2014 ont été confirmés en 2015 avec une organisation similaire du cours. Pour étayer notre propos, nous pouvons aussi signaler que dans le cadre de la HEP VD, un autre examen utilise les degrés de certitude. Il s'agit un examen mis en place pour tester les compétences des étudiants en français comme langue de communication qui doit être réussi par tous les étudiants de l'école pendant leurs études. Lors de leurs études, alors qu'aucune question ne portait sur cet examen, Breipthaupt et Clerc Georgy (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître) ont relevé que tous les étudiants interrogés ont mentionné la différence qu'il y avait dans l'utilisation des degrés de certitude en mathématiques et en français et à quel point il la trouvait peut justifiable dans le cas de l'examen de français lors duquel ils n'ont pas d'outils de vérification à disposition.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Breithaupt S., Clerc-Georgy A. (à paraître) Effets des modalités d'évaluation sur le rapport au savoir des étudiants en formation à l'enseignement. *Mesure et Evaluation en Education*.

CIIP (2010) *Plan d'études romand.* CIIP: Neuchâtel. Retrieved from https://www.plandetudes.ch

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* (Thèse de doctorat), Université de Genève, Genève. Retrieved from http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Clivaz S., Deruaz M. (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N* 91, 15-33.

Clivaz S., Proulx J., Sangaré M. S., Kuzniak, A. (2012) *Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement. Pratiques et formation.* Paper presented at the Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012, Geneva.

Deruaz M. (2015) Un dispositif pour évaluer des savoirs mathématiques au début, pendant et à la fin d'un module de formation. In Blais J-G., Gilles J.-L., Tristan-Lopez A. (Eds.), *Évaluation des apprentissages et technologies de l'information et de la communication: Bienvenue au 21e siècle* (Vol. 3, pp. 77-111). Berne: Peter Lang.

Deruaz M. (à paraître). Une utilisation des degrés de certitude en formation des maîtres du premier degré. *Mesure et Evaluation en Education*.

Deruaz M., Clivaz S. (2012) *Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires.* Paper presented at the Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012, Geneva.

Dias T., Deruaz M. (2012) Dyscalculie: et si les enseignants reprenaient la main? *A.N.A.E. approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant,* 120-121.

Gilles J.-L. (2010) *Qualite Spectrale Des Tests Standardisés Universitaires*. Saarbrücken: Editions Universitaires Européennes.

Mesnil Z. (2014) *La logique: d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement.* Université Paris Diderot: Paris. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281v3

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-57). Toulouse: Octarès.

Robert A., Lattuati M., Penninckx, J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée: un point de vue didactique*. Paris: Ellipses.

Vandebrouck F. (Ed.). (2008) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIMENSION EPISTÉMOLOGIQUE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES[1]

Jean-Luc DORIER[*]

Résumé – Epistémologie expérimentale c'est le nom qu'a failli recevoir ce champ de recherche naissant à la fin des années 70, qui deviendra la didactique des mathématiques. Une référence tout autant à l'épistémologie historique des mathématiques qu'à l'épistémologie génétique de Piaget. Dans ce texte, nous nous proposons de caractériser la dimension épistémologique des trois grandes théories de didactique des mathématiques française : la théorie des situations de Brousseau, la théorie des champs conceptuels de Vergnaud et la théorie anthropologique du didactique de Chevallard.

Mots-clefs : épistémologie, genèse, transposition didactique, situation fondamentale, champs conceptuels.

Abstract – Experimental epistemology is the name that was nearly given, at the end of the 70s, to this emerging field, which will finally be called "didactique des mathématiques". This was as much a reference to the historical epistemology of mathematics than to Piaget's genetic epistemology. In this text we explore this epistemological dimension of the three main theories of French didactics of mathematics: Brousseau's theory of didactical situations, Vergnaud theory of conceptual fields and Chevallard anthropological theory of didactics.

Keywords: epistemology, genesis, didactical transposition, fundamental situation, conceptual fields.

I. INTRODUCTION

La didactique des mathématiques se définit comme l'étude des processus de transmission des connaissances mathématiques. Dans le paradigme de la théorie des situations de Brousseau, un concept centrale st celui de situation fondamentale :

> Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. (Brousseau 1981, p.109).

Par l'objet même de son étude, la recherche en didactique des mathématiques présente un caractère expérimental, cependant le travail « de terrain » (observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc.) est sous-tendu par un travail préalable important ayant trait à « l'étude du savoir mathématique ». Cette étude est une phase fondamentale pour que le chercheur puisse prendre ses distances par rapport aux enjeux didactiques. Le sens des concepts, les problèmes qui s'y rattachent, la position relative d'un élément de savoir dans un

[1] Ce texte s'appuie sur une partie de ma note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches (Dorier 1997b).

[*] Université de Genève – Suisse- Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Dorier, J.-L. (2015) La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 108-118.

savoir plus large qui l'englobe, mais aussi la variabilité de ces données en fonction des périodes et des institutions, etc. sont autant de questions qui aident à mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique. C'est dans ce sens qu'à leur début Brousseau et Vergnaud ont hésité à nommer ce champ de recherche naissance « épistémologie expérimentale ».

Or, comme le souligne Legrand (1993) :

> Chercher une situation fondamentale, c'est alors se rebeller contre la logique implacable de la présentation scientifique, logique de présentation très linéaire où la clarté et la rigueur du discours, la trivialité des assertions intermédiaires se paie le plus souvent par un émiettement et un laminage de significations principales, par une perte de contrôle de l'élève sur la validité et la pertinence de ce qu'on lui enseigne. (Op. cité, p. 126).

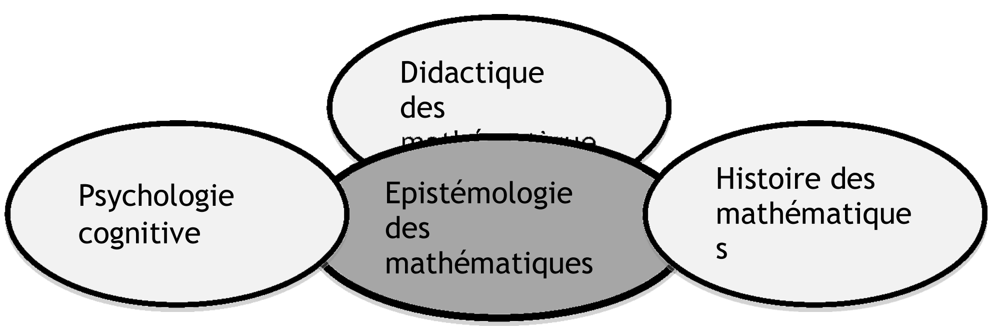
On voit donc que l'épistémologie à l'œuvre dans le travail didactique doit inventer de nouveaux outils, se défier du seul fonctionnement des mathématiques savantes et investiguer de nouveaux territoires. De plus, le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. C'est en particulier ce qu'exprime Chevallard (1991) quand il nous dit que :

> […] le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire, distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire […] C'est l'un des instruments de la rupture que la didactique doit opérer pour se constituer en son domaine propre ; il est ce par quoi l'entrée du savoir dans la problématique de la didactique passe de la puissance à l'acte. (Op. cité, p.15)

Ainsi une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment-là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour « se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique » (ibid., p.15).

D'ailleurs, la pertinence de la référence à l'histoire du savoir depuis ses origines dans la sphère savante ne se limite pas au travail spécifique d'analyse de la transposition didactique mais touche à la plupart des aspects de la recherche en didactique des mathématiques française.

Notre étude repose sur les quatre pôles : épistémologie, didactique et histoire des mathématiques et psychologie cognitive. L'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique, le travail de psychologie cognitive et le travail didactique :



Autrement dit, l'épistémologie joue un rôle transversal car elle interagit à la fois avec la didactique et l'histoire des mathématiques mais aussi la psychologie. L'*épistémologie* au sens strict peut apparaître soit comme le nom savant de la philosophie des sciences soit comme l'étude des conditions de production des connaissances scientifiques.

Bachelard distingue l'histoire et l'épistémologie d'une science :

> C'est […] l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier d'épistémologue de celui d'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un obstacle ou une contre-pensée.
> […] L'épistémologue doit donc s'efforcer de saisir les concepts scientifiques dans des synthèses psychologiques effectives, c'est-à-dire dans des synthèses psychologiques progressives, en établissant, à propos de chaque notion, une échelle de concepts, en montrant comment un concept en a produit un autre, s'est lié avec un autre. Alors il aura quelque chance de mesurer une efficacité épistémologique. Aussitôt la pensée scientifique apparaîtra comme une difficulté vaincue, comme un obstacle surmonté. (Bachelard 1938, pp.17-18).

Il ne faudrait pas voir dans le travail de Bachelard une péjoration du travail historique. La distinction qu'il soulève montre au contraire la complémentarité des deux approches et revendique l'importance de la réflexion épistémologique dans le travail historique sans dénigrer l'importance de ce dernier.

Le sens du terme *épistémologie* s'est largement étendu depuis plusieurs années. Cette évolution doit beaucoup au développement de domaines tels que l'histoire des sciences ou les sciences cognitives qui entretiennent avec l'épistémologie des rapports étroits. Ainsi le terme d'épistémologie s'est-il appliqué à de nouvelles problématiques, son sens s'est alors élargi. En particulier, il n'est pas rare aujourd'hui qu'épistémologie désigne la théorie des méthodes ou des fondements de la connaissance, ce qui est le sens du terme *epistemology* en anglais, le terme français de *gnoséologie* n'étant plus guère usité. L'usage introduit par Piaget dans l'expression *épistémologie génétique* témoigne aussi de cet élargissement d'emploi :

> La méthode génétique revient à étudier les connaissances en fonction de leur construction réelle ou psychologique, et à considérer toute connaissance comme relative à un certain niveau du mécanisme de cette construction. (Beth et al. 1957, p.19).

Du coup, cette épistémologie quitte l'attachement à la philosophie pour se constituer en science humaine et expérimentale. D'avoir donné à l'épistémologie un aspect expérimental n'est pas le moindre mérite de Piaget, et certainement une condition nécessaire à l'existence de la didactique des mathématiques.

Piaget (1967, pp. 6-7) donne deux approximations pour définir l'épistémologie :

i) Etude de la constitution des connaissances valables.

Le terme « constitution » montre l'idée d'un processus, alors que l'usage du pluriel insiste sur la différenciation disciplinaire et que le terme « valables » révèle une conception normative du savoir.

ii) Etude du passage des états de moindre connaissance aux états de connaissance plus poussée.

Cette position induit la dimension de genèse d'une connaissance, et en détermine la nature.
Ces deux points de vue coïncident si l'on considère que la constitution des connaissances n'est jamais achevée. Or c'est ce qu'expriment Beth et al. (1957) :

> Déterminer comment s'accroissent les connaissances implique que l'on considère, par méthode, toute connaissance sous l'angle de son développement dans le temps, c'est-à-dire comme un processus continu dont on ne saurait jamais atteindre ni le commencement premier ni la fin. Toute connaissance, autrement

> dit, est à envisager comme relative à un certain état antérieur de moindre connaissance, et comme susceptible de continuer elle-même un tel état antérieur par rapport à une connaissance plus poussée. (Op. cité, p.18)

On retrouve l'idée de genèse d'une connaissance qui est très importante dans l'œuvre de Piaget. C'est aussi un point de convergence avec la perspective de Bachelard. Il ne faudrait cependant pas croire que ces deux auteurs ont une perception uniforme et linéaire de la genèse de la connaissance. Au contraire, dans des domaines assez différents, ces deux types de travaux ont permis de dégager des notions liées à l'idée de rupture et d'obstacle , qui mettent en évidence justement le caractère non uniforme et non linéaire de la progression de la connaissance.

Piaget relie par ailleurs son approche à ce qu'il appelle la méthode historico-critique, proche de l'épistémologie historique de Bachelard. Pour lui :

> […] la méthode complète de l'épistémologie génétique est constituée par une collaboration intime des méthodes historico-critique et psychogénétique, et cela en vertu du principe suivant […] : que la nature d'une réalité vivante n'est révélée ni par ses seuls stades initiaux, ni par ses stades terminaux, mais par le processus même de ses transformations. […] Or, de cette constitution progressive, la méthode psychogénétique fournit seule la connaissance des paliers élémentaires, même si elle n'atteint jamais le premier, tandis que la méthode historico-critique fournit seule la connaissance des paliers, parfois intermédiaires mais en tous cas supérieurs, même si elle n'est jamais en possession du dernier […] (Ibid., p.23).

Ainsi Piaget établit-il un lien entre phylogenèse et ontogenèse. Il se garde toutefois de dire que la deuxième serait une réplique de la première à petite échelle, mais il établit plutôt un lien de filiation, comme si l'évolution d'une connaissance chez un individu était constitutive de la genèse globale de cette connaissance. La didactique des mathématiques a repris et dépassé cette idée en combinaison avec d'autres, essentiellement issues de Bachelard. On pourra à ce sujet consulter les textes fondateurs de Artigue (1991) et Radford (1997).

Soulignons également que l'histoire des mathématiques, depuis plusieurs années prend beaucoup plus en compte les dimensions sociales et culturelles et que le champ de l'éthno-mathématique a aussi ouvert de nouvelles approches qui ont permis d'enrichir les approches épistémologiques.

Nous allons maintenant brièvement montrer comment la dimension épistémologique est prise en compte dans les trois grandes théories de didactique des mathématiques française. Faute de place nous ne développerons pas d'exemples détaillés, ce que nous pourrons faire lors de la présentation orale.

II. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES (TSD)

L'enseignement vise à recréer dans la classe une genèse des concepts mathématiques que l'élève doit s'approprier. On peut dire que cette genèse est artificielle, dans la mesure où ce n'est pas la genèse historique, elle est aussi expérimentale, parce qu'elle est liée à l'expérience de la classe et de chaque élève.

> Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse (Artigue 1991, p. 244).

On peut dès lors bien sûr envisager de réorganiser les évènements de façon à ne choisir que les étapes essentielles, en raccourcir certaines, en regrouper d'autres, etc. Mais un tel travail comporte aussi le danger d'être exposé à l'arbitraire et au subjectif. Il doit s'intégrer dans une problématique bien définie et s'appuyer sur un cadre d'analyse théorique qui devra englober des outils didactiques.

> Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. […] Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. (Brousseau 1981, p. 48).

De plus, le contexte de l'enseignement reste une contrainte incontournable qui soulève beaucoup de problèmes d'adaptation. Le problème du temps tout d'abord : comment en effet recréer une genèse de plusieurs décennies (voire siècles) en quelques heures (même sur plusieurs années) ? Le problème des contraintes cognitives ensuite : l'organisation du savoir enseigné ne suit pas dans son ensemble la progression historique du savoir savant, comment alors intégrer le passé mathématique de l'élève au modèle du processus historique ? Plus généralement, les différences en termes sociaux, psychologiques ou institutionnels sont telles que la genèse artificielle à l'œuvre dans la classe ne peut suivre que de très loin la genèse historique. Dans l'analyse de la genèse historique, plus que l'énumération et la fonction de différentes étapes de l'évolution, il importe de pouvoir déterminer les conditions qui ont permis de passer d'une étape à une autre ou au contraire ce qui a pu faire obstacle. La question centrale est : comment s'assurer que le problème posé est bien pertinent par rapport au savoir ? Quelles relations a le problème posé avec la raison d'être de l'objet de savoir, enjeu de l'enseignement ? Quel sens donne t-il au savoir ?

C'est un problème épistémologique pour lequel Brousseau (1986) affirme qu'« il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct (par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique). […] Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale. »

Dans la TSD une situation fondamentale d'une connaissance est une modélisation de cette famille de situations mathématiques à potentiel didactique spécifiques du savoir visé. Un problème particulier peut donc être envisagé comme découlant d'une situation « fondamentale » : cette situation « fondamentale » est représentée par un ensemble fini de variables didactiques, pertinentes par rapport à la signification du savoir, enjeu d'enseignement. Inversement, en donnant des valeurs à ces variables, on génère des situations particulières donnant au savoir une signification particulière. De fait, la construction des significations des concepts par les élèves se pose en terme d'usages dans des situations. C'est un des points clefs, qui donne tout son sens au terme de situation dans la TSD. Pour plus de détail on pourra voir à ce propos le cours de Bessot (2011) à l'école d'été sur les ingénieries didactiques.

Par exemple dans le cas de l'apprentissage du nombre, un des points essentiels des premiers apprentissages est que les élèves prennent conscience de l'importance de la notion de quantité d'une collection. Les travaux de Brousseau (voir Margolinas & Wozniak 2013) ont ainsi permis de dégager une première situation fondamentale consistant à créer des collections équipotentes (mettre exactement autant, pas plus, pas moins d'œufs dans une collection de coquetiers). A travers un jeu sur les variables didactiques (proximité ou éloignement du stock d'œufs, nécessité de tout amener en une fois dans un panier, demande différée dans le temps, commande à autrui, possibilité d'avoir des jetons, un crayon et du papier…) on peut ainsi imaginer une progression commençant par une situation d'action, puis des situations de formulation de plus en plus complexes, permettant aux élèves de construire le sens de l'équipotence à travers la construction de collections intermédiaires. Ce travail s'inspire de pratiques avérées dans l'histoire de l'humanité comme celle du berger qui met un caillou sur un tas chaque fois qu'un mouton sort de l'enclos, et qui en enlèvera un à chaque mouton qui rentre le soir. Ou encore les coches sur des bouts de bois ou d'os datant du paléolithique, qui servaient à garder la mémoire d'une quantité.

Le type de démarche évoqué ci-dessus montre un rôle que peut jouer l'analyse historique dans la construction d'ingénieries didactiques et dans les choix globaux déterminant les grandes lignes de la genèse expérimentale que l'enseignement vise à produire. A un niveau plus local, l'analyse historique joue également un rôle pertinent dans les diagnostics d'erreurs. En effet, l'histoire fournit des exemples de processus d'évolution des connaissances, dont une analyse épistémologique permet de mettre en évidence, les ressorts, les sauts conceptuels, la fonctionnalité, etc. Une confrontation des erreurs des élèves à ces exemples peut permettre d'interpréter ces erreurs de façon plus satisfaisante. En particulier, l'analyse historique peut permettre de distinguer les erreurs de nature épistémologique, des erreurs plus contingentes qui peuvent être de nature cognitive ou didactique.

> L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié que l'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques et behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. (Brousseau 1983, p. 171).

En s'inspirant de Bachelard, les chercheurs en didactique des mathématiques vont importer dans leur domaine la notion d'obstacle épistémologique. Bachelard introduit ainsi cette notion :

> Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens de l'esprit humain : c'est dans l'acte de connaître, intimement, qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. […] En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. (Bachelard 1938, p. 13).

Bachelard avait a priori écarté les mathématiques de son propos, pour lui « en fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. » (Ibid., p.22). Néanmoins la notion d'obstacle a été beaucoup étudiée en didactique des mathématiques (voir entre autres, (CIRADE 1989) et (Perrin-Glorian 1993)). Il nous semble cependant qu'il y a un danger à la trop banaliser. En effet, dans une polémique qui l'a opposé à Glaeser (1981) à propos de l'enseignement des nombres relatifs, Brousseau avait exprimé des exigences très fortes quant à la consistance de l'analyse historique pour qu'elle puisse aider de façon pertinente à la mise en place d'un dispositif didactique en termes d'obstacles épistémologiques :

> Se posait-on ces problèmes ? Comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre ? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet « état de connaissances » paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il stable ? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là ? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail "latéral" soit

accompli, mais lequel ? Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances […] (Brousseau 1983, pp. 190-191)

Ces exigences montrent la difficulté d'analyse liée à la détermination d'un obstacle épistémologique. Du point de vue de l'histoire, la notion d'erreur ou seulement de difficulté est très problématique, les questions précédentes nous y renvoient. Dans ce contexte, le parallèle avec la situation d'enseignement doit être suffisamment contrôlé. De plus, il nous semble difficile (voire dangereux) de faire jouer à l'exemple de la genèse historique un caractère trop prédictif. Cela suppose au moins une analyse comparée très minutieuse des conditions et des contraintes du contexte historique et du contexte didactique visé. Une analyse didactique qui se donnerait la recherche d'obstacles épistémologiques comme but essentiel doit prendre en compte au moins l'ensemble des questions énoncées par Brousseau, pour ne pas risquer d'introduire un biais dans l'analyse historique. Autrement dit, la notion d'obstacle épistémologique présuppose une réflexion épistémologique fine qui repose sur une analyse historique particulièrement dense.

III. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Il est moins courant de penser au travail de Vergnaud (1990) quand on parle d'épistémologie en didactique des mathématiques. Pourtant cette approche vient directement de l'épistémologie génétique et elle comprend de fait une dimension épistémologique[2] forte que je voudrais illustrer ici de façon succincte à l'aide d'un exemple tiré de la classification des problèmes additifs, que Verganud a réalisée dans les années 80. Je m'appuierai ici sur un texte récent qui reprend ce travail (Vergnaud 2009).

Dans son approche, Vergnaud met en évidence l'importance pour la signification d'un concept mathématique de la classe des problèmes dans lesquels il prend ses différents sens. C'est sur cette base que pour le champ conceptuel de l'addition, il a réalisé une classification des problèmes additifs, c'est-à-dire des problèmes qui nécessitent pour être résolus d'utiliser une addition ou une soustraction. Alors que du point de vue mathématique un problème additif revient toujours soit à un calcul direct $a + b$ ou $a – b$ soit à résoudre une équation du type $a + x = b$, Vergnaud montre que du point de vue des représentations et des schèmes d'action c'est plus complexe. Il met ainsi en évidence une classification des problèmes additifs qui repose sur une analyse épistémologique de la nature du problème plus fine que ce que les outils classiques de mathématiques peuvent offrir, mais qui montre bien la nature mathématique profonde des problèmes. Ce travail a été d'une grande importance pour apporter des explications alternatives de celles des psychologues ou des linguistes aux difficultés des élèves. Sans rentrer dans les détails, je voudrais illustrer cette idée en comparant les trois problèmes suivants :

1. Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?

2. Robert vient de perdre 5 billes ; il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?

3. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a perdu 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Dans la résolution de ces trois problèmes, la réponse s'obtient *in fine* par l'addition $7 + 5 = 12$. Pourtant il est facile de voir, ce qui est confirmé par les expérimentation que :

[2] Certes la dimension historique est peu présente ici, mais il s'agit bien d'une réflexion de nature épistémologique, qui se base sur des observations cliniques, mais aussi sur une réflexion interne aux objets mathématiques en jeu. En ce sens, ce travail est loin d'une démarche purement psychologique.

- le premier est très simple (réussi par la quasi totalité des élèves de fin de première année primaire), il s'agit d'un modèle *état – transformation – état*, et comme la transformation est positive c'est presque aussi simple que le cas le plus élémentaire *partie – partie – tout*.

- le deuxième est un peu plus complexe et n'est généralement réussi qu'en fin de deuxième ou troisième année primaire. La recherche de l'état initial (connaissant la transformation et l'état final) nécessite la construction d'un théorème-en-acte pour inverser la transformation.

- le troisième est beaucoup plus complexe et souvent n'est pas réussi par des élèves en fin de primaire. On pourrait croire que la difficulté principale vient de la complexité de l'énoncé et donc soit avant tout de nature linguistique.

Pourtant si l'on considère le problème suivant :

3b. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 5 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 7 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Il présente exactement les mêmes caractéristiques langagières, mais sera beaucoup plus facilement réussi. En effet le fait qu'on l'on mette en rapport un gain partiel moindre qu'un gain total, permet de se ramener à un problème de *partie – partie – tout* ou l'on cherche une des parties.

De même avec le problème :

3c. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a perdu 5 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?
Où il suffit de raisonner sur des pertes au lieu des gains.

Le problème 3d est un peu plus complexe que les deux précédents sans atteindre le niveau de difficulté du 3.

3d. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

On peut en effet le ramener à la recherche d'une transformation quand on passe de l'état 7 billes à l'état 5 billes.

Par contre le problème 3e. est aussi complexe que le 3.

3e. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a perdu 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Ici on ne peut pas se ramener à un des deux cas précédents, car on a mis en rapport une perte et un gain. Il est nécessaire de penser en termes de composition de transformations. Ce problème est de fait un bon problème d'entrée dans la compréhension des opérations avec les nombres négatifs.

Ainsi on voit bien que la classification des problèmes additifs par Vergnaud repose sur une analyse épistémologique où la signification mathématique que le sujet peut donner au problème détermine le niveau de difficulté. La dimension cognitive est bien ici spécifique des mathématiques en jeu et pas seulement de marqueurs linguistiques ou culturels.

IV. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE (TAD)

Dans l'introduction nous avons clairement montré la dimension épistémologique de la transposition didactique, qui est à l'origine de la TAD. En fait, dès la deuxième édition de la *Transposition Didactique*, Chevallard (1991) positionne très clairement son programme de recherche par rapport à l'épistémologie. C'est ce que nous allons rappeler brièvement ici sans analyser les développements les plus récents de la TAD (faute de place).

Dans la postface à la deuxième édition de la *Transposition Didactique*, il s'interroge sur la place de la didactique, et propose de la situer dans le champ de l'anthropologie (*l'étude de l'Homme*). Très schématiquement, son point de vue est le suivant. Il distingue savoir et connaissance :

> Une certaine connaissance, c'est-à-dire une certaine qualité du rapport à un objet, se donne à voir. Au lieu qu'un savoir est toujours supposé. Il se présente à nous par ses emblèmes (sa dénomination, etc.), et nous le rencontrons comme présent *in absentia*, comme une potentialité - ou un manque, quand nous voulons « l'apprendre ». (Op. cité, p. 209).

Il parle alors de la didactique de la connaissance, ou didactique cognitive. Or celle-ci ne saurait être incluse dans la seule anthropologie cognitive, il y manque encore la composante relative à l'intention didactique, c'est pourquoi l'auteur introduit le terme d'anthropologie didactique de la connaissance. Par ailleurs, comme il a associé l'adjectif cognitif au terme de connaissance, il associe l'adjectif épistémologique au terme de savoir[3], il identifie ainsi l'anthropologie des savoirs à l'anthropologie épistémologique et finalement à l'épistémologie. Ce jeu sur les mots est pour lui le moyen de montrer non seulement les liens entre la didactique et l'épistémologie, mais aussi l'apport de l'approche de la didactique, dans sa dimension anthropologique, pour l'épistémologie :

> Il est assez clair maintenant que l'épistémologie telle qu'elle existe s'est donnée jusqu'ici avec passion à l'étude quasi exclusive de la production des savoirs et à l'étude de leurs producteurs ; et qu'elle a négligé et leur utilisation, et leur enseignement. Or ceux-ci ne peuvent être écartés d'une étude anthropologique des savoirs. (Ibid., p. 211).

Ce vocabulaire étant mis en place, l'auteur est prêt à nous fournir la clé de sa définition de la didactique, définition qui la situe dans le champ de l'anthropologie :

> Au croisement de l'anthropologie des savoirs et de l'anthropologie didactique de la connaissance, il y a l'anthropologie didactique des savoirs, dont l'objet est la manipulation des savoirs dans une intention didactique, et en particulier l'enseignement des savoirs. Là aussi, écourtons. De même qu'on a parlé de didactique de la connaissance (ou didactique cognitive), parlons, pour faire bref, de didactique des savoirs. Celle-ci est donc à la fois une division de l'anthropologie des savoirs ou épistémologie (en notre sens) et de la didactique cognitive. C'est exactement elle que je nommerais désormais -nouveau raccourci - didactique, sans plus. (Ibid., p.211).

Cette approche par les définitions et partant du principe que la didactique est une partie de l'anthropologie est complétée par Chevallard, qui précise, plus loin, le rôle primordial que joue la sphère de production dans la légitimité épistémologique des choix d'enseignement :

> Une des plus fortes leçons qu'ait procurée la didactique […] c'est que l'enseignement d'un savoir, plus largement sa manipulation didactique en général, ne peuvent, en bien des aspects, se comprendre si l'on ignore et ses utilisations et sa production […] (Ibid., pp.211-212).
>
> Dans le cas d'un savoir savant, en effet, la sphère de la production en vient à assumer, par le biais notamment de l'Ecole et de la transposition didactique, un rôle bien plus large que celui de production *stricto sensu*.[…] La sphère de la recherche en un savoir savant est un belvédère d'où peuvent s'observer, et où finissent toujours par trouver quelque écho, les mouvements affectant le monde complexe et naturellement opaque des pratiques de ce savoir. Tout tend à monter vers elle, parce que tout tend à rechercher l'investiture épistémologique et culturelle du savoir savant qui y est produit. (Ibid., p.233).

[3] Ce choix résulte en partie d'une différence dans la séparation des termes connaissance et savoir, mais aussi de la volonté de Chevallard de garder un sens plus restreint au mot épistémologie (n'englobant pas, entre autres, le sens d'épistémologie génétique) pour mieux montrer l'apport de la dimension anthropologique (cf. la citation qui suit). On va voir que cette différence dans l'utilisation du terme épistémologique sera quasiment gommée dans la dernière étape de l'élaboration de définitions par Chevallard.

Dans ce sens, les outils qu'offre la TAD peuvent inspirer le travail historique en renforçant d'une part l'importance de l'étude des lieux de transmission et plus globalement, les dimension sociales et culturelles de la production scientifique, dont on a déjà dit plus haut qu'elles étaient de plus en plus présentes dans les recherches actuelles.

Faute de place nous ne pouvons développer ici plus avant les dimensions épistémologiques qui se sont développées dans les apports plus récents de la TAD. Pour plus de détails nous renvoyons les lecteurs à nos propres travaux sur l'algèbre linéaire (résumés dans Dorier 1997a et b) ainsi qu'à une étude mettant en avant l'approche écologique dans Ba et Dorier (2006).

V. CONCLUSION

Ce rapide survol des dimensions épistémologiques dans les trois grandes théories de la didactique des mathématiques francophone est un moyen de montrer le rapport privilégié que la recherche en « éducation mathématique », pour reprendre le terme anglo-saxon, entretient en France avec les mathématiques. De par la spécificité de la Théorie de situations mathématiques à usage didactique et de la Théorie anthropologique du didactique (et son origine dans la transposition didactique) c'est avant tout une référence à l'épistémologie historique (avec Bachelard mais aussi bien d'autres) qui est visible. Néanmoins la dimension expérimentale et la nécessité de prendre en compte le processus cognitif et les interactions renvoie à une dimension plus psychologique avec les travaux de Piaget, mais aussi de Vygotski. Ceux-ci ont inspiré Brousseau mais aussi Vergnaud, dont nous avons montrer que la théorie des champs conceptuels relève elle aussi d'une approche épistémologique, qui si elle ne s'inspire guère de la dimension historique n'en reste pas moins essentielle pour montrer la spécificité des connaissances mathématiques dans les phénomènes d'apprentissage. Bien sûr la didactique des mathématiques s'est étoffée de plusieurs autres approches et cadres théoriques dont la dimension épistémologique est moins marquée, mais la plupart des didacticiens de culture française se revendiquent plus ou moins de ces trois grandes théories dont le fort ancrage épistémologique dessine de façon unique un rapport à la discipline mère des mathématiques. Pour compléter ce bref panorama on pourra se reporter à la conférence d'ouverture de Kilpatrick (2008) à la célébration du 100e anniversaire de la création de la CIEM sur le thème « The development of mathematics education as an academic field » et ma réaction à sa conférence dans le même volume (Dorier 2008) ou un texte sur le même thème en français (Dorier 2012).

REFERENCES

Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 10(2/3), 241–286.

Ba C., Dorier J-L. (2006) Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXème siècle, *l'Ouvert*, 113. 17-30.

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique,* 13° éd.. Paris : Vrin, 1986.

Bessot A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In Magolinas C. & al. (Eds.) En amont et en aval des ingénieries didactiques – XVe école d'été de didactique des mathématiques Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009 (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Beth W.E., Mays W., Piaget J. (1957) *Epistémologie génétique et recherche psychologique,* Etude d'épistémologie génétique I. Paris : P.U. F.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1(1), 37–127.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 165–198.

Brousseau G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Chevallard Y. (1991) *La transposition didactique*, 2ème éd.. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CIRADE (1989) *Construction des savoirs - Obstacles et conflits,* Actes du colloque du CIRADE à Montréal. Ottawa : Arc éd.

Dorier J.-L. (2012) La didactique des mathématiques : émergence d'un champ autonome au carrefour des mathématiques, de la psychologie et des sciences de l'éducation. In Elaouf M.-A., Robert A., Belhadjin A., Bishop M.-F. (Eds.) *Les didactiques en question(s) - Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (pp. 42–48). Bruxelles : de Boeck (col. Perspectives en éducation et formation).

Dorier J.-L. (2008) Reaction to J. Kilpatrick's talk: The development of mathematics education as an academic field. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 40–46). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997a) L'algèbre linéaire en question, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dorier J.-L. (1997b) *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*. Note de synthèse HDR - Université Joseph Fourier - Grenoble 1 - 20 mai 1997. Paru sous la forme d'un cahier du laboratoire Leibniz, Cahier n°12. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400/document

Glaeser G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2(3). 303–346.

Kilpatrick J. (2008) The development of mathematics education as an academic field. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 25–39). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Legrand M. (1993) Le concept de situation fondamentale. Richesse et limites de ce concept. In Noirfalise R. (Ed.). *Actes de la VIIe école d'été de recherche en didactique des mathématiques* (pp.121–130). Clermont-Ferrand : IREM.

Margolinas C., Wozniak F. (2013) *Le nombre à l'école maternelle – Une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Perrin-Glorian M.-J. (1993) Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques, *Cahier du Séminaire de Recherche / réflexion / Interaction*, année 1992-93. Grenoble : IUFM, 1–21.

Piaget J. (Ed.) (1967) *Logique et connaissance scientifique*. Encyclopédie de la Pléiade. Paris : Gallimard.

Radford L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics* **17**(1), 26–33.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3), 133–170.

Vergnaud G. (2009) Activité, développement, représentation. Colloquium de didactique des mathématiques 2008. In Coulange L., Hache C. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 7–29). Paris : IREM et ARDM. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR10001.pdf.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DE LA TRANSPOSITION DES SAVOIRS MATHEMATIQUES A LEUR DE-TRANSPOSITION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Emmanuel HATEGEKIMANA LUANDA[*]

Résumé - La transposition didactique qui permet d'extraire les savoirs scolaires des savoirs savants est un processus de transformation qui adapte et exprime ce savoir au niveau des apprenants par des situations didactiques. Ces savoirs exprimés en contextes produisent de manière intuitive des connaissances subjectives et diffèrent des savoirs savants de départ. Notre analyse montre que le fonctionnement et l'évolution de la pensée mathématique devait s'appliquer au cursus de formation scolaire pour faire évoluer le cognitif des élèves jusqu'à l'acquisition des connaissances se rapprochant au savoir savant. Ce processus, appelé dé-transposition, peut être vu comme une opération inverse à la transposition didactique.

Mots-clefs: Transposition didactique, contextualisation, formalisation des savoirs, situations didactiques, connaissances des élèves.

Abstract - The didactic transposition that helps to extract the school knowledge to the scientific one is a process of transformation that adapts and expresses this knowledge at the level of the learners by didactic situation. This knowledge in context produce in a intuitive manner of subjective knowledge that differ from the scientific knowledge. Our analysis prouves that the function and the asserment of mathemematic thought should be applied in the course of school function to make evolve the cognitive of pupils to the acquisition of knowledge close to the scientific knowledge. This process calls upon transposition may be seen as an inverse operation to a didactic transposition.

Keywords: Didactic transposition, contextualisation, knowledge formalisation, didactic situation, learners' knowledge.

I. INTRODUCTION

La communication des savoirs mathématiques en théorie des situations exige que les savoirs savants soient transformés en savoirs didactiques enseignables par un processus de transposition didactique. Ils doivent être contextualisés pour devenir des savoirs didactiques pouvant générer des connaissances que les élèves pourront se construire eux-mêmes en agissant sur le milieu didactique dûment construit au préalable par le professeur. Cette exigence communicationnelle permet donc, suivant le lieu, la région où vit l'élève et les cultures de diversifier les cognitifs des élèves car alors les objets du savoir se transmettent intuitivement en se fondant sur des jeux ou des problèmes réels relatifs à la région vitale des élèves qui doivent manipuler et agir sur les objets qui leur sont familiers. Cet état de chose conduit à une diversification des savoirs scolaires selon les mœurs et les coutumes de chaque société, savoirs pouvant être qualifiés de culturels car contextualisés et pouvant différer les uns des autres.

[*] Université de Goma – République Démocratique du Congo – hategekimanaemmanuel68@yahoo.fr

Hategekimana Luanda E. (2015) De la transposition des savoirs mathématiques à leur dé-transposition dans l'enseignement secondaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 119-128.

Le fonctionnement des connaissances dans le processus de formation au primaire et au secondaire permet cependant de passer de ces connaissances intuitives, qui sont le cognitif généré par le savoir-en-acte suivant une transformation évolutive aux connaissances relatives au savoir pur, savoir abstrait de la communauté scientifique. Ce passage se fait par une évolution des rapports aux objets de savoir dans le processus éducatif en spirale. C'est donc une forme de décontextualisation mieux encore de dé-transposition successive s'opérerant dans le processus de formation scolaire et que certains appellent ''objectivation''. La décontextualisation des connaissances intuitives des élèves doit alors être réalisée en un fonctionnement évolutif des connaissances de sorte que le cognitif puisse se développer et passer de l'état ''contextualisé'' à l'état ''universel'' comme se présentent les théories mathématiques achevées, état que Y. Chevallard qualifie de cognitif pur. (Brun J. & al., p.34). Rouchier e(1991), cité par Brun, parle d'une transformation des connaissances à partir du cognitif primaire, connaissances qui apparaissent comme produit des situations a-didactique et qui doivent être transformées pour se rattacher à un domaine plus savant où la connaissance n'est pas dans l'action et ainsi arriver à un cognitif plus ou moins pur.

Aussi, l'histoire des mathématiques montre que les savoirs mathématiques se sont construits au début à partir d'observations ou manipulations de la réalité concrète répondant aux questions posées par les réalités vitales. Progressivement, ils se sont formalisés au fur des âges pour se constituer en théorie axiomatiques, toujours par l'évolution des rapports individuels aux savoirs en question. Le fonctionnement des connaissances mathématiques montre ainsi que les cognitifs des mathématiciens ont évolués par étapes pour donner des savoirs savants que nous utilisons actuellement. Ce fonctionnement évolutif des savoirs historiques peut-il être assimilable au développement des connaissances dans le cursus de formation des élèves dans notre système d'enseignement dit ''à spirale'', après leur contextualisation ?

Considérons le processus de fonctionnement des certains savoirs scolaires décrit par A. Mercier, qu'il appelle ''objectivation des connaissances en acte'' tel que l'explique J. Brun :

> Le rôle de transformer les connaissances en acte en objets de connaissances ou savoirs est dévolu à un hypothétique processus d'abstraction, à la manière de Dienes : de la manipulation concrète, on passe directement à la présentation des actions, ce qui laisse supposer que le relais entre connaissances objectivées va de soi, que leur jonction est immédiate et que les connaissances en acte se transforment comme naturellement en savoirs. Ces connaissances en actes structurent les savoirs enseignés … Si les connaissances implicites structurent les savoirs, la question de relais des unes aux autres, reste posée. C'est le problème de l'objectivation des connaissances en acte. (p.34)

Ces savoirs obtenus par des connaissances en actes sont entachés de subjectivité car exprimés en termes de situations d'apprentissage. Puisque les savoirs enseignés diffèrent des savoirs savants auxquels ils sont déduits, nous nous tournons au processus de l'objectivation des savoirs intuitifs, de transformation du cognitif primaire caractérisant les savoirs en actes en savoirs savants en nous basant sur des cas précis de l'enseignement des nombres et de la géométrie au niveau élémentaire et secondaire en RD Congo pour analyser comment évoluent les savoirs en acte durant la formation de base à travers les contenus d'apprentissage dans le système d'enseignement à ''spirale''. Une progression "en spirale" permet à l'élève de revenir plusieurs fois sur la même notion au cours de sa formation, lui laissant ainsi le temps de la maturation, de l'assimilation et de l'appropriation… ». (Inspection des mathématiques des sciences physiques et chimie, p.2). Cela suppose ainsi une évolution au cours de la formation pour assurer la maturation des rapports au savoir en étude, en plusieurs étapes.

Puisqu'il s'agit de l'objectivation des connaissances, nous nous sommes tournés vers la théorie logique de LADRIERE J. pour l'évolution de la pensée mathématique en partant des savoirs intuitifs pour arriver aux savoirs purs. Cette dite théorie distingue quatre phases de l'évolution de l'axiomatisation des savoirs mathématiques à partir des savoirs intuitifs jusqu'aux savoirs formalisés. Nous avons ainsi proposé, en comparaison avec l'objectivation dans l'évolution des savoirs-en-actes, les phases d'un processus que nous nommerons « dé-contextualisation ou dé-transposition didactique des savoirs mathématiques scolaires » pouvant produire au bout de compte des savoirs savants, savoirs objectifs. Ces phases correspondent même à l'évolution historique des savoirs mathématiques de base.

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, le fonctionnement de cette dé-contextualisation permet de dé-culturaliser et d'universaliser le contenus mathématiques scolaires par un enseignement hiérarchisé des savoirs scolaires par les niveaux d'abstractions à travers la formation en spirale. Ce travail d'analyse théorique constitue le préliminaire du fonctionnement évolutive du cognitif des élèves de l'école maternel à l'université et notamment au secondaire en suivant cas par cas des notions précises afin d'en dégager les failles des ruptures qui ne sont jamais relancés.

II. LA THEORIE DES SITUATIONS ET LES CULTURES

Une situation étant l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu, elle est donc sujette à la culture de l'enseignant et même de l'élève. Cela puisque les situations didactiques créent des conditions qui favorisent l'apprentissage, situations comprises comme l'environnement de l'élève mis en œuvre et manipulé par l'enseignant comme un outil. Aussi, les conditions d'une des utilisations particulières d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation » et puisque ces conditions dépendent de l'environnement de l'élève et plus souvent aussi du professeur, elles dépendent des cultures. Donc les situations didactiques servant à l'enseignement des mathématiques peuvent différer d'un contexte à un autre, d'une culture à une autre et peuvent donner lieu à une diversité des connaissances scolaires dans l'enseignement de base.

Par ailleurs, une situation d'usage en classe se définit comme un jeu hypothétique qui explicite un système minimal de conditions nécessaires dans lesquelles un savoir mathématique peut se manifester par les décisions aux effets observables d'un actant sur un milieu. Ces conditions se définissent sur base de la culture du contexte dans lequel est située l'école et ces jeux qui sont une manifestation des cultures caractérisent les milieux susceptibles de constituer une diversité des sources d'apprentissages des savoirs mathématiques. Cette diversité peut influer sur le sens et l'entendement des concepts qu'apprennent les élèves, ce qui fait dire à Guy Brousseau que :

> La définition des connaissances, par leur fonction dans une situation, entérine le fait que pour une même notion mathématique, chaque actant (société, professeur, élève) développe des connaissances a priori différentes suivant les conditions dans lesquelles il les utilise, les crée ou les apprend. Valides ou non d'un point de vue académique, elles sont d'une certaine façon ainsi légitimées, reconnues. (p.17)

Les situations d'enseignement des mathématiques ne peuvent être puisées que dans l'environnement social des élèves pour leur permettre de réaliser des accommodations nécessaires pour la construction de leur propre connaissance à partir de leur sens et de leur signification contextuelle. Elles sont donc intuitives et il y a nécessité d'un processus de décontextualisation par une purification successive de l'intuition ou de la subjectivité dans ces savoirs enseigné.

> Le processus d'enseignement part des savoirs à enseigner, puis il cherche à atteindre (induire) la connaissance au moyen des transformations des situations relatives à ces savoirs et se conclut par le retour à ces savoirs de départ. (Brun & al., p.303)

On voit donc qu'il y a un autre processus de transformation des connaissances dans l'enseignement, le retour aux savoirs de départ qui est une transformation évolutive se faisant grâce à une transformation situationnelle dont le but est d'atteindre le savoir de départ, savoir savant du patrimoine de la communauté scientifique. C'est donc une forme de dé-transposition qui consiste à faire évoluer le rapport avec ce savoir enseigné au départ pour que l'élève puisse acquérir le savoir savant, dé-transposition qui peut s'entendre comme une déculturation des savoirs culturels scolaires.

III. PROCESSUS DE LA DECONTEXTUALISATION DES CONNAISSANCES DANS L'ENSEIGNEMENT

Le problème de la décontextualisation du cognitif déduit des savoirs-en-actions dans le cursus d'enseignement des savoirs mathématiques a été abordé par quelques auteurs sous plusieurs aspects que nous voudrions succinctement passer en revue et le comparer au développement de la pensée mathématique pour étayer nos propos généralisant.

La question du changement de statut des connaissances dans les processus cognitif à l'œuvre sur les situations, c'est-à-dire le relai qui se forme entre les organisations cognitives et les savoirs à apprendre en situation didactique a été abordé par A. Rouchier (1997), quand il a invoqué le concept de '*'cognitif primaire*'' qui doit être transformé pour se rattacher à un domaine plus savant où la connaissance n'est plus dans l'action et Y. Chevallard (1992) l'affirme lorsqu'il distingue '*'le cognitif pur*'' qui relève du rapport personnel de l'individu au savoir et les transformations de ces rapports personnels qu'il conçoit en ces termes :

> Mais on doit alors tenir compte d'une réalité incontournable dans nos sociétés : le cognitif pur n'existe pas, ou presque pas. Les changements dans les rapports personnels y sont très fréquemment liés à une intention institutionnelle que changent ces rapports ; ils sont institutionnellement, c'est-à-dire anthropologiquement corrélés avec l'apparition d'intentions didactiques. (Brun & al., p. 34)

Le rapport au savoir en action conduit d'abord à des connaissances dites primaires, que l'on acquiert par le premier contact de l'individu apprenant, au savoir contextualisé est entaché de plusieurs irrégularités qui l'écartent de la vraie connaissance savante par l'effet de la transposition. Donc le premier rapport de l'individu aux objets d'apprentissages doit subir des transformations dans le cursus d'apprentissage afin d'évoluer jusqu'à se rapprocher du rapport plus ou moins clair et juste qu'on pourrait qualifier de connaissances purs se rattachant aux savoirs purs. Cette transformation de la connaissance fait évoluer l'individu qui apprend dès le début de sa formation scolaire jusqu'à sa fin est la dé-transposition. Par cette transformation, les savoirs-en-actes sont décontextualisés jusqu'à se rattacher aux savoirs savant donnant à l'apprenant des connaissances objectives. Aussi, ce savoir est transformé par le changement d'intentions institutionnelles qui changent les rapports aux savoirs présentés en des contextes différents car lorsque l'apprenant passe d'une institution à une autre, son contexte cognitif change de façon évolutive.

Selon G. Vergnaud, dans ses aspects pratiques et théoriques, ce développement évolutif du cognitif s'est observé aussi dans la formation des savoirs scientifiques et doit s'observer aussi dans l'enseignement actuel, mais cela ne se fait pas actuellement et la tendance est d'enseigner des manières à faire des algorithmes (Op. cité, p.52). Les connaissances de l'apprenant devait évoluer avec les objets du savoir à enseigner car l'institutionnalisation doit marquer le terme du processus d'objectivation à la fin du parcourt continu de formation où s'enchaineraient et se convertiraient harmonieusement le rapport de savoir et le rapport institutionnel. (Brun & al., pp. 41-42). C'est donc le temps didactique qui organise de façon cumulative, linéaire et harmonieuse, dans le processus de formation en spirale, la succession et l'évolution des objets de savoir. Cette évolution se caractérise ainsi par des ruptures et des filiations d'objets d'apprentissage, des conversions réciproques entre connaissances spontanées venant de l'intuition par rapport à l'appréhension des connaissances, et les différentes organisations personnelles des connaissances suivant les différents niveaux institutionnels. Au sujet des savoirs-en-actes évoluant suivant les niveaux pour générer à la fin du cursus, des savoirs savants par leur hiérarchisation dans l'abstraction, Guy Brousseau dit que :

> La production et l'enseignement des connaissances mathématiques demandent un effort de transformation de ces connaissances en savoir, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui tendent à effacer les situations historiques (les jeux) qui ont presidé à leur apparition. (…) Le champ des problèmes relatifs à une connaissance ne cesse à son tour de se transformer au fur et à mesure de l'évolution de la théorie. (Brousseau, p.94)

On voit ainsi cette nécessité de faire évoluer les connaissances scolaires pour éliminer progressivement tout recours à la réalité concrète et aux jeux et pour qu'enfin de compte les élèves puissent les acquérir comme connaissances se rattachant aux savoirs savants de la communauté scientifique, ce que A. Antibi et G. Brousseau (2000) appellent la dé-transposition des connaissances scolaires.

La notion de système formel correspondant en logique au perfectionnement de la méthode axiomatique et représentant le degré suprême d'abstraction peut s'appliquer ici à travers des contenus hiérarchisés suivant les niveaux d'études et donc d'abstractions dans la formation prôné par le système d'enseignement à spirale. En effet, lorsque les intentions institutionnelles changent et évoluent, les contenus d'enseignement changent aussi parallèlement et évoluent suivant le schéma classique de l'évolution de la pensée mathématique et en même temps le sens de notions apprises évolue aussi. R. Douady dit que savoir des mathématiques, c'est avoir fonctionnellement ces savoirs comme outil, pour s'en servir. Ces savoirs, pour les acquérir doivent évoluer dans un contexte qui fasse évoluer le sens, et étant alors décontextualisé, ils doivent être recontextualisés pour être enseignés. (Douady, p.2). Les élèves qui les apprennent pour la première fois doivent agir sur le milieu didactique relatif au contexte, donc ces savoirs sont appris intuitivement.

L'intuition désigne toute forme de connaissance directe et sans aucune médiation, qu'elle soit d'ordre temporel ou logique, entre le sujet connaissant et l'objet connu : l'objet n'est pas appréhendé successivement mais donné comme une totalité présente à l'esprit, il n'est pas connu discursivement selon un rapport de principe à conséquence. (Baraquin & al. 2005, p.192). Lorsqu'un individu fait connaissance d'un savoir qu'il appréhende pour la toute première fois et apprend des savoirs-en-actes en agissant sur un milieu construit à cet effet. Des connaissances qu'il acquiert à ce niveau sont primaires, subjectives et intuitives.

André Revuz parle de l'importance de l'intuition dans l'éducation mathématique mais regrette que l'intuition avec laquelle le mathématicien appréhende les réalités est écartée. Il le précise enfin en ces termes :

> J'ai insisté sur le fait que dans le travail du mathématicien la rigueur et l'intuition collaboraient constamment et qu'une séparation stricte de leur domaines d'activité ne correspondait pas à la réalité. Or quand on observe le déroulement des classes de mathématiques, on a l'impression que l'exigence de rigueur y est toujours présente, mais qu'à priori on ne compte pas sur l'intuition des élèves et que l'on considère comme exceptionnel ceux qui en montrent. L'éducation de la rigueur serait un des objectifs de l'enseignement mathématiques, le développement de l'intuition serait hors de sa portée car elle résulterait d'un ''don'' sur lequel on serait sans pouvoir ». (Revuz, pp.92-93)

En fait, la théorie des situations aide à développer l'intuition car lorsqu'on organise un milieu didactique, on aide les élèves à agir sur ce milieu et à appréhender ainsi, de manière intuitive les connaissances. Ces connaissances qu'ils saisissent ne résultent pas d'un raisonnement logique, mais d'une intuition qui les leur fait connaitre et qui peuvent ainsi être qualifiés d'intuitives, ou de personnelles. Aussi, pour les intuitionnistes,

> La réalité mathématique est indépendante du langage mathématique et de la logique qui est un pur instrument de la communication. L'existence mathématique est réduite à la constructibilité : l'être mathématique n'a pas une réalité autonome, il n'existe que dans l'acte par lequel il est engendré. Toute la pensée mathématique est fondée sur une intuition originaire, celle de la division de l'unité, source de dualité. (Ladiere 1957, pp.26-27)

Les premières connaissances que les élèves construisent à partir des situations didactiques sont intuitives et subjectives car leur appréhension résulte d'une action de l'intelligence sur le milieu et non d'un raisonnement logique. L'activité de la pensée mathématique consiste donc à partir du niveau intuitif au niveau formalisé de manière évolutive. La distinction entre système et propriétés du système prend toute sa portée et l'on ne peut se passer d'un recours ultime à l'intuition car les mathématiques reposent en définitive sur l'accomplissement des gestes concrets. Et de ce point de vue, l'apport intuitionniste est capital du fait qu'en insistant sur l'exigence de constructivité, elle met en relief une caractéristique de la pensée mathématiques. Cela justifie donc l'usage des situations didactiques dans la formation de la pensée mathématique dans une institution d'enseignement. D'où l'adéquation entre cette évolution de la pensée mathématique et l'évolution des connaissances en milieu scolaire.

IV. LE DEVELOPPEMENT DE LA PENSEE MATHEMATIQUE A TRAVERS LA FORMATION SCOLAIRE

La reconstruction de savoirs scolaires par une évolution situationnelle pour amoindrir l'écart de transposition vue comme une purification progressive et hiérarchisée des aspects intuitifs caractérisant le cognitif primaire issu des savoirs en acte, ne peut pas se faire en un jour mais suivant une série des paliers progressifs à des niveaux institutionnels d'apprentissage que l'élève devrait franchir pour acquérir le vrai savoir savant des scientifiques. C'est cela le vrai caractère d'organisation en spirale de l'enseignement scolaire qui doit faire évoluer les connaissances des élèves. Etant donné la convergence des différentes réflexions des auteurs précités, selon Hategekimana (2014, p.36), les phases de formalisation de Ladière (1957, pp. 55-57) s'appliquent en enseignement pour faire cheminer les connaissances des élèves du cognitif primaire au cognitif plus ou moins purs, des connaissances intuitives issues des savoirs-en-actes aux connaissances formalisés se rattachant aux savoirs savants pour avoir la ‘'décontextualisation'' des savoirs scolaires.

- La première, l'axiomatique intuitive, s'élabore à partir du concret et didactiquement parlant, à partir des situations d'enseignement, de manière intuitive par les élèves dans une classe de mathématique. Il s'agit du système des connaissances qui s'élabore lorsque la contextualisation des savoirs savants a eu lieu pour que l'élève puisse, sous le guide du professeur, construire soi-même ses connaissances. Donc les savoirs-en-actes à ce niveau produisent une axiomatique intuitive, les cognitif étant subjectif.
- La deuxième, correspond à l'axiomatique abstraite et consiste à préciser le contenu des concepts fondamentaux dégagés des situations didactiques d'apprentissage et donc, une phase de construction des savoirs, non plus en partant des situations mais en partant des constructions mathématique élémentaires de cette connaissance.
- L'axiomatique formelle consiste à définir les concepts fondamentaux, non de façon intuitive mais à partir des relations établies entre ces concepts. Il s'agira de définir les opérations et toutes les notions connexes au savoir en étude. C'est un premier essai de formalisation axiomatique des connaissances.

- Enfin, le système formel pur peut se faire avec la définition axiomatique, après que tout le reste soit fait au préalable. Ici, il ne serait plus question de définir les concepts à partir des situations ni des constructions mathématiques de cette connaissance mais de manière axiomatique.

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, « la décontextualisation ou dé-transposition des connaissances dans l'enseignement actuel de mathématiques devra suivre le cheminement logique de la formalisation des connaissances mathématiques dans l'usage des situations didactiques afin de faire acquérir des savoirs abstraits ». Cette formalisation des mathématiques contextualisées permet de réunifier et d'universaliser les différentes connaissances issues de plusieurs types de contextualisations culturelles des savoirs scolaires dans toutes les cultures et donne lieu à un savoir universel dégagé des particularités culturelles

1. *Cas de l'enseignement de la Géométrie au secondaire et en formation des maîtres*

Les premiers travaux de géométrie ont été menés il y a trois mille ans à Babylone pour résoudre des problèmes d'astronomie et en Egypte pour retrouver les limites des terrains qui avaient été recouverts par les eaux du fleuve Nil pendant les crues. Les mathématiciens de cette époque ont établi des formules pour déterminer l'aire des surfaces limitées par des polygones élémentaires (triangle, trapèze, parallélogramme,…), le volume de l'espace limité par le prisme droit, …et des formules approximatives concernant le cercle. A cette époque, la géométrie était utilitaire et pratique dicté par le besoin de résoudre les problèmes pratiques.

Vers le 6ème siècle avant Jésus-Christ, les grecs ont fondé une géométrie philosophique et scientifique en quittant ainsi le seul aspect pratique. La géométrie devint un objet de réflexion pour elle-même et aussi déductive en fondant les propriétés des figures par les démonstrations. Avec Platon, les géomètres ont commencé à distinguer les objets du monde réel et les objets géométriques qui sont abstraits et parfaits. Ce fut le passage du concret à l'abstraction et donc de la modélisation.

Au 3ème siècle avant Jésus-Christ, Euclide organisa les savoirs géométriques de manière logique à partir des définitions, des axiomes et des propriétés démontrées. Ce fut donc le début de la formalisation et de la théorisation de la géométrie, de manière cohérente et de la structuration logique.

Du 9ème au 13ème siècle après Jésus-Christ, les mathématiciens arabes traduisirent les ouvrages grecs en les commentant et enrichirent la trigonométrie dans laquelle ils développèrent des méthodes de calcul d'aires et des volumes et la géométrie sphérique pour les besoins de l'astronomie. Aussi, le dessin et la peinture ont conduit au développement de la géométrie projective et la géométrie devint algébrique par l'introduction des repères et des équations. C'est l'organisation des savoirs fondés sur un système axiomatique cohérent pouvant permettre leur structuration en une théorie hypothético-déductive.

Et à partir du 18ème siècle, des recherches se font intenses en géométrie surtout lorsque les mathématiciens commencèrent à questionner la théorie géométrique notamment sur les axiomes d'Euclide. Ce fut le développement et l'expansion théorique de la géométrie. (Nzitakera 1995)

On obtient donc à partir de l'évolution de la géométrie dans le temps, quatre étapes principales que la géométrie a pu franchir pour devenir une science avec des méthodes et des théories. Puisque cette évolution de la pensée géométrique s'inscrit dans le schéma global du développement de la pensée mathématique, nous pouvons associer les synthèses théoriques de Houdement et Kouzniak (1998-1999, pp.71-72) en trois types de géométrie :

- La géométrie naturelle qui se confond avec la réalité (G1), dont la source de validation est la réalité, le sensible et qui comprend trois aspects : l'intuition, l'expérience et la déduction s'exerçant sur des objets matériels grâce à la perception et la manipulation d'objets.
- La géométrie axiomatique naturelle qui est un schéma de la réalité (G2) dans laquelle les aspects non rigoureux et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus possible.
- La géométrie axiomatique formalisée (G3) pour laquelle le cordon ombilical avec la réalité est coupé et dans laquelle les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible, sur l'intuition mais la primauté du raisonnement logique s'impose.

Pour Houdement et Kouzniak, l'évolution de la géométrie ne doit pas être vue comme une suite des ruptures mais comme une vision unificatrice de la géométrie évolutive entre divers pôles et doit concourir à la formation des maîtres. Il a donc pensé s'en servir pour une bonne formation des maîtres. Cette classification rejoint la procédure de l'enseignement de la géométrie telle que l'a proposé Henri (1999) cité par Parzysz (pp.2-3), qui distingue trois types de rapports à l'espace en enseignement de la géométrie qui sont la situation concrète, une première modélisation par une schématisation et une mathématisation élaborée à partir du modèle. Sur base de cette approche, l'enseignement de la géométrie comporte ainsi un cadre théorique basé sur quatre paradigmes dont deux de la géométrie non axiomatiques : la géométrie concrète (G0) constituée les résultats de l'observation des figures dans l'espace (phase axiomatique intuitive) et la géométrie spatio-graphique (G1) constituée par des schémas graphiques de ce que l'on observe dans l'espace (axiomatique abstraite), et deux de la géométrie axiomatiques : la géométrie proto-axiomatique (G2) constituée par une modélisation de la réalité (axiomatique formelle) et la géométrie axiomatique qui est la formalisation finale (G3) (axiomatique formelle pure). (Parzysz, p. 130). Ce processus est une mathématisation, une décontextualisation des savoirs-en-acte qui consiste à généraliser et à dégager des définitions mathématiques à partir des observations, des réalisations et leurs schématisations et à produire un discours du type déductif appliqué aux données de l'énoncé.

2. *L'enseignement des ensembles de base (*$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$*)*

En République Démocratique du Congo, les ensembles s'enseignent sous forme intuitive en première, deuxième et troisième secondaire et constituent un savoir de base à toute la formation mathématique au secondaire. En se basant sur les idées de Ladrière, et la formation des structures mathématiques, Banwitiya et al. (p.4) et Hategekimana (2006) ont proposé un enseignement des structures algébriques par leur hiérarchisation par *un enseignement qui considère les différentes structures comme des classes hiérarchiques dont le passage d'une classe à une autre suppose d'abord la maîtrise de la première et l'existence d'un besoin d'obtenir des propriétés supplémentaires pour résoudre certains problèmes jugés nécessaires.* Ce qui est corroboré par Servais (Gattegno & al., p.38) pour qui, l'algèbre peut s'apprêter dans son enseignement au modèle de décontextualisation qui occasionnerait un enseignement hiérarchisé permettant d'asseoir l'abstraction mathématique des structures algébriques :

> L'algèbre, d'abord conçue comme un système d'opérations sur des nombres de nature déterminée, est, par une libération progressive, apparue de plus en plus clairement comme un système opératoire pouvant agir sur des êtres de nature les plus diverses. Par une abstraction nouvelle, on néglige toute ces interprétations pour considérer des êtres indéterminés sur lesquels s'exercent des opérations qui ne sont autrement précisées que par des règles de composition données de façon explicite.

Il en résulte une structuration de l'enseignement de l'algèbre générale tenant compte de la hiérarchisation des structures et des niveaux d'abstractions des mathématiques, pouvant s'appliquer à l'enseignement des structures algébriques suivant quatre niveaux ou degrés différents et successifs et comme un processus qui intègre chaque fois le cheminement du formalisme des connaissances mathématiques, et donc de leur décontextualisation :

- Premièrement, l'enseignement intuitif, basé sur les problèmes de la vie liés à la genèse des nombres et des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$ d'une manière hiérarchisée. Ces situations permettraient de contextualiser les définitions des nombres comme classes d'équivalences induisant une relation d'équivalence.
- Deuxièmement, les ensembles sont définis non plus à partir des situations, mais à partir de la relation d'équivalence déduite précédemment par la situation.
- Troisièmement, le principe du raisonnement mathématique étant bien acquis, on généralise les structures des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ aux demi- groupes pour $\mathbb{N}$, groupes et anneaux pour $\mathbb{Z}$ et les corps pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et on reprend les constructions de leurs constructions, le passage de l'un à l'autre se faisant par hiérarchisation des structures et non d'une manière axiomatique.
- Quatrièmement, on définit les savoirs de manière axiomatique sans recourir aux constructions, ces dernières étant bien maîtrisées à l'avance.

La hiérarchisation des structures signifie que les structures sont présentées aux élèves par pallier, le passage de l'une à l'autre se faisant par construction motivée par la résolution d'un certain nombre de problèmes préalablement posés dans la structure de base (Hategekimana 1993). Pour améliorer le rendement de l'enseignement des mathématiques, nous émettons l'hypothèse qu'il serait nécessaire d'appliquer ces phases dans l'enseignement des mathématiques chaque fois que les connaissances sur les ensembles des nombres comme une procédure de décontextualisation des connaissances à partir des situations ou des jeux.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les savoirs savants sont rendues culturels par l'effet de transposition didactique et lorsqu'elles sont contextualisées par des situations ou des jeux culturels et peuvent ainsi différer et donner lieu à une diversité des connaissances scolaires de base. Pour les rendre impersonnelles et les dégager de toute connotation contextuelle et culturelle, les étapes de la décontextualisation s'avèrent nécessaire afin que les connaissances finales apprises au bout de compte soient ''déculturalisées'' (contextualisées) et ainsi universalisées. Cette évolution des connaissances scolaires se réalise dans notre système d'enseignement à spirale par les modifications des intentions institutionnelles et des transformations des situations didactiques de sorte que les contenus d'enseignement évoluent en même temps que les rapports des élèves aux objets d'enseignement. Ce processus des transformations peut être qualifiée de dé-transposition car elle fait évoluer les savoirs en actes aux savoirs purs ayant fait l'objet de transposition. Cette façon de faire est déjà appliquée pour l'enseignement de la géométrie et peut donc être généralisées à l'enseignement de toutes les connaissances mathématiques notamment des structures algébriques. De ce fait, les connaissances que les élèves auront acquis seront générales et pourront comprendre leurs constructions, leurs sens et significations ainsi que leurs formes finales axiomatisées.

Ce qui reste, c'est d'analyser exactement ce qui se fait dans les pratiques d'enseignement dans nos écoles et de proposer comment réaliser cette évolution. Cependant, cela ne peut se faire que s'il y a eu une bonne transposition et si les savoirs scolaires sont contextualisés autrement dit si les enseignants connaissent et utilisent à bon escient les théories de la transposition didactique et des situations didactiques. Mais aussi, des expérimentations peuvent se réaliser conjointement en prévoyant, les situations didactiques des notions données construites expérimentalement ainsi que leur dé-contextualisation ou dé-transposition.

REFERENCES

Antibi A., Brousseau G. (2000) La dé-transposition des connaissances scolaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 20(1), 7-40.

Banwitiya Y., Indenge Y., Hategekimana L-E., (2013) Enseignement par hiérarchisation des structures et des niveaux d'abstractions. *CERIGO* 6, 1-25

Baraquin N. et al. (2005) *Dictionnaire de Philosophie*. Paris : Armand Colin.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Brousseau G. (2000) Education et didactique des mathématiques. *Education matematica* 12(1), 5-39.

Brun J. et al. (1996) *Didactique des mathématiques*. Paris : Delachaux et Niestél.

Dorier J-L. et al. (2002) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques.* Paris : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. *Repères IREM 15.* Topiques Éditions.

Gattegno et al. (1958) *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques.* Paris : Delachaux et Niestlé.

Hategekimana L. (1993) *Etude comparative de quelques complétions des structures en mathématiques*. ISP/Bukavu : Mémoire de Licence.

Hategekimana L. (2014) *Sur l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*. Thèse de Doctorat. Kinshasa : Université Pédagogique National.

Hategekimana L. (2006) Enseignement par hiérarchisation des structures en mathématique, une piste pour la résolution du problème d'enseignement des mathématiques. *Cahiers du CERUKI, Nouvelle Série* 33, 53-67.

Houdement C., Kuzniak A. (1998-1999) Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres. *Grand N, CRDP-IREM* 64, 65-78.

Inspection de mathématiques et de sciences physiques et chimiques (2010) *Pourquoi une progression annuelle en spirale ?*.

Ladriere J. (1957) *Les limitations internes des formalismes*. Paris : Gauthier-Villars.

Nzitakera S. (1995) Le postulat d'Euclide sur les parallèles et l'approche axiomatique moderne de la géométrie. *Revue de pédagogie appliquée* XI, 1-4.

Parzysz B. (2006) La géométrie dans l'enseignement au secondaire et en formation des professeurs des écoles. De quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in didactica* 17, 128-161.

Revuz A. (1980) *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* Paris : PUF

Vergnaud G. (1990) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. *Petit x* 22, 51-69.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION D'EQUATION EN REPUBLIQUE DEMOCRATIQUE DU CONGO : CAS DE QUELQUES ETABLISSEMENTS DE LA CAPITALE KINSHASA

Alexandre MOPONDI BENDEKO MBUMBU[*] – Octave MOLEKA BATUMBI[**]– Benjamin MUGARU DAWA[***]

Résumé – L'apprentissage ou l'enseignement de toute notion mathématique, la notion d'équation dans notre cas, comprend toujours deux aspects : l'aspect sens ou signification de ce qu'on veut enseigner, « le à quoi ça sert ? », et l'aspect résolution des problèmes en rapport avec la notion en question.

Nous constatons qu'en RDC, du moins dans ce que nous avons constaté dans l'échantillon d'écoles de la capitale Kinshasa, l'enseignement de la notion d'équation porte plus sur la résolution des problèmes en rapport avec l'équation qu'à la signification qu'on veut lui donner. Toute la progression conduisant à la généralisation de l'écriture ou de la présentation d'une équation commence bien de la maternelle jusqu'à la fin de l'école primaire. Arrivé en secondaire général, la forme générale d'une équation est donnée sans expliquer ce qu'elle représente ; on passe directement à parler de quelques équations types et à la résolution. Il y a donc un saut informationnel entre l'écriture généralisée de l'équation et la résolution des équations. Il reste à compléter la chaîne pour que la progression soit continue et surtout pour que les élèves arrivent à mobiliser l'équation lorsque cela semble nécessaire.

Mots-clefs : équation, expression, signification, résolution, mobilisation.

Abstract – Learning or teaching of any mathematical notion, the notion of equation in our case, includes always two aspects: the sense or meaning of what you want to teach, the "what's the point?', and the aspect of resolution of the problems related to the concept in question.

We note that in the DRC, at least in what we found in the sample of schools in the capital Kinshasa, education of the concept of equation is more on the resolution of the problems in connection with the equation that the meaning we want to give him. Any progress leading to the widespread use of writing or presentation of an equation starts well from nursery school to the end of primary school. Arriving in general secondary, the general form of an equation is given without explaining what it means. It passes to speak of some type equations and resolution. So there is an informational jump between generalized equation writing and solving the equations. It remains to complete the chain to make continuous progress and above all so that students come to mobilize the equation when it seems necessary.

Keywords: equation, expression, meaning or significance, resolution, mobilization

[*] Université Pédagogique Nationale– RDC – bendekomopondi@yahoo.fr
[**] Université Pédagogique Nationale– RDC – octavemoleka@yahoo.fr
[***] Université Pédagogique Nationale– RDC – benjamin.dawa@yahoo.fr

Mopondi A., Moleka O. B., Mugaru B. D. (2015) L'Enseignement de la notion d'équation en République Démocratique du Congo : cas de quelques établissements de la capitale Kinshasa. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 129-138.

I. PROBLEMATIQUE

Notre vécu d'élève et notre expérience d'enseignant ont montré que la notion d'équation en mathématique soulève des problèmes d'apprentissage et de réinvestissement en République Démocratique du Congo (RDC). Le travail de l'état de lieu, qui est le nôtre, cherche à interroger l'enseignement en s'inspirant directement d'un questionnement didactique et mathématique. Le questionnement va porter sur la désignation de l'objet mathématique (équation), la définition cet objet mathématique, la signification, donc le sens, donnée à cet objet à travers la définition et son réinvestissement.

Tout nous semble partir de la désignation de l'objet mathématique qui est constitué de trois composantes (deux polynômes et un signe d'égalité). Le signe d'égalité semble jouer dans la désignation de cet objet mathématique.

L'expression mathématique ainsi obtenue, équation, se trouve ainsi au centre de l'apprentissage de cet objet mathématique où tout tourne autour du signe d'égalité $=$. Il faut dire que dans beaucoup de cas de désignation d'objets mathématiques, le mathématicien se réfère à leurs composantes fondamentales, aux éléments qui forment leur structure de base. La figure géométrique qui est composée de trois côtés et de trois angles est désignée par ses trois angles, triangle. Cela montre déjà la difficulté qu'ont les mathématiciens à désigner les objets de leur travail. Les enseignants sont donc censés prendre en compte cet aspect des choses dans leur enseignement pour éviter de réaliser un apprentissage basé uniquement sur la désignation et non sur l'essence même de l'objet mathématique.

Comme nous venons de le signaler, l'objet mathématique désigné par l'équation a, pour l'exprimer, trois composantes principales qui sont : le signe d'égalité et deux polynômes, appelés membres *($ax + b = cx + d$)*. Pour le désigner ils se sont basés essentiellement sur la composante égalité, d'où est sortie l'équation. Ce qui a conduit au signe d'égalité pour le traduire.

En définitive, l'objet mathématique désigné par l'équation se présente par deux polynômes placés de part et d'autre de ce signe d'égalité pour lequel il faut trouver la valeur de l'inconnue qui constitue le polynôme. Le plus souvent et cela de façon presque systématique, l'enseignant congolais définit l'objet mathématique équation comme *une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs attribuées à l'inconnue* et après cette définition il passe directement aux méthodes de résolution qui conduisent à trouver la valeur de cette inconnue. Il ne pense presque pas à la signification, c'est-à-dire au sens qu'il donne à cet objet mathématique indépendamment de sa désignation. Nous pensons que si l'apprenant n'as pas le sens de cet objet mathématique appelé équation, il va avoir du mal à mobiliser cette notion au moment utile et à la réinvestir quand il le faut. Donc pour nous, si difficulté il y a à l'apprenant congolais, c'est certainement au niveau du sens, de la signification, du concept pour lequel il n'a pas été entrainé.

Dans ses travaux de thèse sur « les tribulations de signe = dans la moulinette de la bonne réponse », Laurent Theis met en évidence les connaissances, liées à ce signe d'égalité, qui font l'objet de la progression de l'apprentissage de la notion d'équation dans les programmes officiels de l'enseignement en RDC. Il s'agit de l'équipotence, de l'équivalence et de l'égalité.

Il existe évidemment des différences fondamentales entre ces trois notions qui cependant correspondent toutes à l'équivalence. En clair, l'égalité représente un cas particulier de l'équipotence et l'équipotence un cas particulier de l'équivalence.

L'équivalence suppose les trois propriétés : la réflexivité, la transitivité et la symétrie. L'équipotence est l'équivalence quantitative. La notion d'égalité est un cas particulier d'équipotence ; il ne suffit pas que deux collections aient le même nombre d'éléments pour qu'elles soient égales, il faut en plus que ces éléments soient exactement les mêmes. Ainsi, sur le plan ensembliste deux ensembles A et B sont dits égaux si et seulement si, tout élément de A appartient à B et tout élément de B appartient à A. l'égalité correspond également à l'équivalence quantitative à la seule différence que les mêmes objets physiques se retrouvent dans les ensembles en question.

En mathématique le signe = (égal), placé entre deux termes symbolise la relation d'égalité, ces deux termes désignent exactement le même objet mathématique, en général nombre, ensemble, fonction etc.

Au-delà de cette signification mathématique soulignée ci-haut, l'égalité peut avoir d'autres sens (significations, interprétations) : elle peut représenter la *combinaison de deux nombres pour obtenir un troisième* ; il s'agit de l'égalité du type $a + b = c$. Elle peut aussi signifier le *fractionnement d'un nombre* en deux nombres différents ; il s'agit d'égalité du type $a = b + c$. L'égalité peut également être une *relation d'équivalence qui peut avoir plusieurs dénominations* pour un même nombre. Par exemple 0,4 est une autre désignation de $\frac{2}{5}$, « 3 + 4 » serait du point de vue mathématique la désignation de « 5+2 ».

Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998), cités par Theis dans sa thèse (2005, p.9), distinguent cinq différentes significations d'égalité : 1° L'égalité indiquerait *une commande* de trouver le résultat ; il s'agit d'égalités du type « $a + b = \dots$ » ou « $a + \dots = c$ ». 2° L'égalité désignerait *l'équivalence des résultats des deux opérations*, comme par exemple « $\frac{14}{3} = \frac{42}{9}$». $\frac{14}{3} = \frac{42}{9}$». 3° L'égalité soulignerait *l'équivalence de fractions*. 4° Le symbole d'égalité servirait à introduire *différents symboles ou différentes écritures pour désigner un même nombre*. 5° L'égalité désignerait la *relation de commutativité* qui est vraie pour tous les nombres A et B quelle que soient les valeurs numériques qu'on leur assigne ($A + B = B + A$). Cette dernière signification permet aussi de souligner l'importance du symbole d'égalité pour la compréhension des propriétés des différentes opérations arithmétiques de base dont la commutativité, l'associativité, la symétrisation, etc.

Nous pouvons donc dire que l'apprentissage de la notion d'équation comporte deux aspects qui sont : *l'expression mathématique* de la notion (le langage - les codes utilisés pour l'exprimer) et *la résolution*. C'est dans l'aspect expression mathématique que les différents sens peuvent faire l'objet de l'apprentissage. De façon explicite, l'hypothèse que nous pouvons émettre serait du type « l'apprentissage de la notion d'équation n'est réalisé que lorsque l'apprenant est à mesure de la mobiliser, lorsque cela est nécessaire, et d'utiliser l'algorithme approprié pour arriver au résultat attendu ». Et l'apprenant ne peut la mobiliser que lorsqu'il sait à quoi la notion peut servir.

Toutes ces hypothèses demandent un travail de terrain approfondi pour les vérifier. Au niveau de cette communication, nous nous sommes limités au travail d'exploration, d'état de lieu ; nous avons observé des leçons et filmé des séances de cours de la maternelle (3-5 ans) à la 6ème année des humanités (18-19 ans). Ce qui nous a permis d'identifier le moment ou le problème de sens est posé pour essayer de proposer des solutions.

II. NOTION D'EQUATION DE LA MATERNELLE AU SECONDAIRE

Il est de coutume, en République Démocratique du Congo (RDC), de présenter un travail d'initiation à la recherche à la fin des études supérieures et universitaires (5 ans après le baccalauréat). C’est dans ce cadre qu’à **l’**Université Pédagogique Nationale (UPN), nous avons entrepris le travail, appelé mémoire de fin d’études, sur l’enseignement de la notion d’équation de la maternelle aux humanités dans quelques établissements de la capitale, Kinshasa. L’enseignement en RDC est subdivisé en école maternelle (3-5 ans), l’école primaire (6-12 ans), l’école secondaire (13-18 ans) dont deux ans de secondaire général (13-14 ans) et 4 ans des humanités (15-18 ans). La sixième année des humanités est la dernière année des humanités (baccalauréat). Le travail effectué a porté sur tous ces niveaux.

1. Bilan des observations des classes

A l’école maternelle, la notion est présentée sous forme d’une *relation d‘équivalence*, c’est-à-dire, on y présente en général, deux situations ou deux ensembles entre lesquels on établit une équivalence. Les situations utilisées dans ce contexte sont toutes du milieu de l’enfant ; elles sont envisageables par l’enfant qui les traite. Prenons l’exemple du jeu lacunaire observé dans la classe de maternelle.

« Jeu lacunaire : le jeu où on a deux têtes, l‘une avec tous les éléments et l’autre avec quelques éléments en moins. Il faut trouver les éléments qui manquent dans l’autre tête pour que les deux soient pareilles

Règle du jeu : Le jeu consiste à compléter les éléments qui manquent dans une collection par rapport à une collection complète donnée. »

L’enfant est implicitement appelé à établir une bijection entre les deux ensembles (têtes). Pour que cela soit possible, il doit compléter le second ensemble qui manque encore certains éléments. Cela dans le but de retrouver les mêmes objets physiques dans les deux ensembles. On aboutit donc à la forme « A=B ». Dans ce cas l’égalité n’a qu’une seule signification : l’équivalence.

A l’école primaire, l’élève passe du cas concret au nouveau cas où il doit apparaître des nouveaux codes dans la formulation d’une équation : des nombres, le signe d’égalité, des pointillés, le signe d’addition, le signe de soustraction, le signe de multiplication et le signe de division. Tout l’ensemble est présenté comme étant une *« opération à trou »*. On retrouve des présentations du genre: $a + ... = b$, $a + b = ...$, $a = b + ...$, etc. ces différentes formes d’équations prennent des différentes dénominations donc des différents sens à travers différents degrés de l’enseignement primaire :

Au degré élémentaire (1^{er} et $2^{ème}$ année), on remplace les collections par un énoncé littéral qu’on transforme en une équation. On a par exemple l’énoncé, « combien de boules faut-il ajouter à une collection de trois boules pour en avoir cinq ? », est traduit par l’équation « 3 +…= 5 ».

En fait, au degré élémentaire l’équation est présentée comme une « décomposition d’un nombre » en deux autres nombres. Exemples : 20 = 17 +… ; Etc.

Au degré moyen ($3^{ème}$ et $4^{ème}$ année), l’équation est prise comme une *« recherche du complément »* de nombre. On a les situations du genre : 52+….=100 ; 630+….=1000 ; 4700+…=10000 ; Etc.

Au degré terminal ($5^{ème}$ et $6^{ème}$ année), on renforce les différents sens donnés à l'équation vue au premier et au deuxième degré et on fait plus d'exercices d'application qui sont plus vers les situations de conversion (1l + … = 1hl ; 1l + … dal = 1hl).

En secondaire général, *il est question de passer de l'écriture d'une équation sous forme d'une opération à trou (*2 + … = 5*) à la forme dite générale* dans laquelle les pointillés sont remplacés par une lettre, généralement x ou y (2 + x = 5). A ce niveau, on s'arrête aux *équations du premier degré* simple et du premier degré dans un *système de deux équations* à deux inconnues.

Le problème qui se pose ici est celui de la signification donnée à cette nouvelle expression, 2 + x = 5. Le constat est qu'au lieu de commencer par expliquer cette expression on passe directement à la résolution, donc à la recherche de la valeur de x. Pendant les deux ans de secondaire général, il sera essentiellement question de trouver la valeur x. Le sens donné à cette nouvelle expression sera totalement occulté.

Aux humanités, tout le travail sur les équations sera porté sur *la catégorisation des équations* et la *résolution* des problèmes en rapport avec ces équations.

Il y a eu comme équation :

- Equation du premier degré à une inconnue : Il s'agit d'un énoncé mathématique qui après transformation peut prendre la forme « $ax + b = 0$ », avec a un réel non nul, b un réel quelconque et x l'inconnue. C'est un exemple d'équation polynomiale de degré un.
- Equation du premier degré à deux inconnues (Géométriquement, l'équation du premier degré à deux inconnues représente l'équation d'une droite du plan, $y = \alpha x + \beta$, *avec* α *et* β *des réels*) : Il s'agit de l'égalité suivante : « $ax + by = c$ ». Où a et b sont deux réels non nuls, c un réel quelconque, x et y sont des inconnues.
- Système de deux équations à deux inconnues :

C'est une équation linéaire dont l'expression analytique est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ cx + dy = e \end{cases}$$

Où a , b , c , e *et* d sont des réels non tous nuls ; x et y des inconnues.

. Equation du premier degré contenant la valeur absolue :

C'est une équation où l'inconnue se trouve entre le symbole « valeur absolue »

Exemples :

$$|x| - |x - 3| = 0$$
$$|x - 2| = 5$$

La résolution de ces équations conduit également aux équations du premier degré. On examine les équations dans des intervalles bien déterminés par les conditions sur les valeurs absolues. La solution de l'équation est la réunion des solutions dans chaque intervalle.

- Equation paramétrique du premier degré :

C'est une équation dans la quelle, en plus de l'inconnue classique, intervient une nouvelle lettre, m, appelée paramètre.

Exemples :

$(2m+3)x = 6m+1$;

$(m^2-1)x+3=0$;

m dans ces équations représente le paramètre et x l'inconnue.

Equation du second degré

Elle est de la forme générale $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels et x l'inconnue qu'il faut déterminer.

L'équation réciproque

L'équation réciproque d'inconnue x peut prendre les formes suivantes :

$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$.

La résolution de ces équations, conduit à celles du premier degré et second degré. En effet, en factorisant le premier membre de l'équation par regroupement des termes à coefficients semblables on aboutit, en général, au produit d'une fonction du premier degré à une fonction du second degré. Par la règle du produit nul[1], on aboutit donc à deux équations dont l'une du premier ou l'autre du second degré.

En observant ces équations on remarque que les termes extrêmes et les termes équidistants aux extrêmes ont les mêmes coefficients.

Equation fractionnaire

Les équations fractionnaires sont celles dont au moins un dénominateur contient une inconnue.

Exemple :

$$\frac{4}{x+5} - \frac{24}{5} + \frac{5+x}{x+5} = 0$$

Ces équations sont également réductibles au premier ou au second degré. D'abord on pose la condition préalable sur le dénominateur qui ne doit pas s'annuler, puis par des techniques de transformation on aboutit à une équation du premier ou du second degré.

Equations trigonométriques

Les équations trigonométriques sont celles dans lesquelles on voit apparaître les fonctions trigonométriques telles sinus, cosinus, etc.

Exemples :

$\sin x = a$; $tg\mu(x) = tg\mu(x)$; $\sin^2 x + 2\cos^2 x + \sin x = 1$

Equation logarithmique

[1] $A.B = 0 \leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

L'équation logarithmique est celle dans laquelle l'inconnue intervient dans l'expression du logarithme.

Exemples :

$\log_a u(x) = c$; $\log_3 u(x) = \log_a v(x)$

Avec $u(x), v(x)$ des fonctions de x, a un réel positif, non nul et différent de 1.
En appliquant les propriétés des logarithmes on aboutit à des équations polynomiales telles que rencontrées plus haut.

Equation exponentielle

Une équation exponentielle est celle dans laquelle l'inconnue intervient dans l'exposant.

Exemples :

$a^{u(x)} = b$; $a^{u(x)} + b^{v(x)} = c$
Avec a et b des réels positifs non nuls et différents de 1 ; $u(x), v(x)$ des fonctions de l'inconnue x et c un réel.

2. *Résumé des observations de classes*

Les observations des classes confirment l'existence d'une progression de l'apprentissage de la notion d'équation qui est plus liée à la répartition du programme de formation (Instructions Officielles) qu'à la conception d'un processus d'apprentissage par l'enseignant. Cette répartition, on la retrouve dans les manuels qui sont intégralement suivis par les enseignants.

En suivant cette progression des programmes, nous pouvons mettre en évidence certains sens attribués à la notion d'équation ; ces sens se réfèrent essentiellement au signe d'égalité « = ».

Le premier sens donné est celui de la *« relation d'équivalence »* que nous avons retrouvé dans les situations concrètes proposées en *maternelle* ; il n'y a évidemment pas un code, à ce niveau, pour traduire ce sens d'équivalence. L'accent est mis sur « l'équipollence », précisément sur « l'égalité » entre les collections. C'est sur l'observation, la numération et l'énumération qu'est centré le travail des apprenants.

En primaire, s'ajoutent, dans l'ordre de la progression, les sens de « l'opération à trou », voire l'addition à trou, de la « décomposition d'un nombre en une somme » ou « fractionnement du nombre », et du « complément d'un nombre ». Une généralisation sur les autres opérations fondamentales, soustraction – multiplication – division clôture le travail de l'école primaire sur l'équation.

C'est donc à l'école primaire que commence la formulation (ou l'écriture ou encore la présentation) de l'équation comme langage ou comme expression mathématique d'un problème posé. Cela nécessite l'apparition de certains codes : « = » (signe d'égalité) ; « …. » (points en suspension, signe de trou) ; « + » (signe d'addition) ; « - » (signe de soustraction) ; « x » (signe de multiplication) ; « : » (signe de division). Les apprenants ne savent nécessairement pas former une phrase mathématique avec ces codes. Mais l'enseignant, qui sait former une phrase avec ces codes, utilise ces codes pour leur proposer un énoncé mathématique à résoudre. C'est, nous semble-t-il, à cette étape que l'apprentissage de l'équation comme énoncé mathématique échappe aux apprenants. Visiblement, c'est à l'introduction des premiers codes qu'il faut donner le sens de langage à l'équation ; il doit donc précéder la résolution de l'équation. C'est normalement à la fin de l'école primaire que les apprenants doivent avoir le sens de langage mathématique de l'équation ; l'enseignement secondaire le consoliderait et mettrait l'accent sur la résolution.

En secondaire général, il y a le travail de la consolidation de ce qui est fait à l'école primaire auquel s'ajoute celui de la généralisation de la présentation (ou formulation) mathématique d'une équation : le signe de trou, « … », qui signifie ce qu'on cherche (l'inconnue), est remplacé par une lettre (les plus utilisées : x, y) : $2 + x = 11$.

Ce passage aux lettres pour exprimer ce qu'on cherche est la source de problèmes des apprenants pour ce qui est : - la signification de la lettre (sens donné à la lettre) – la formulation d'une équation (sens de l'énoncé mathématique) – la résolution d'une équation. En définitive, c'est le fait d'occulter l'apprentissage du sens de l'équation comme énoncé mathématique qui est à la base de tous ces problèmes. C'est une hypothèse forte qui demande un travail approfondi pour la vérifier.

Les problèmes des apprenants s'étendent avec la complexification des énoncés mathématiques de l'équation ; ils ont maintenant deux équations du premier degré à résoudre :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 18 \\ 6x + 14y = 12 \end{cases}$$

En 3ème et 4ème, l'équation est censée être travaillée comme un objet, une notion mathématique. La réalité est que le travail se limite à la définition et à la résolution de quelques formes d'équations présentées (Equation du premier degré à une inconnue – Equation du premier degré à deux inconnues – système de deux équations à deux inconnues – Equation du second degré – Equation bicarrée – Equation réciproque – Equation du premier degré contenant la valeur absolue – Equation fractionnaire – Equation paramétrique du premier degré – Equation trigonométrique). En définitive, le travail sur les équations est réduit à la résolution des équations ; c'est donc l'enseignement des algorithmes de résolution des équations qui sont ici au centre de l'apprentissage et non le sens donné à ces équations. Les équations trigonométriques sont résolues sans établir un lien avec les fonctions trigonométriques, par exemple.

Allant dans la même logique, il est ajouté en *5ème des humanités* les équations logarithmiques et exponentielles. La particularité de la *6ème des humanités* est tout simplement de changer d'ensemble de travail. Jusque là tout était fait dans l'ensemble des nombres réels, R ; il va être question maintenant de travailler dans l'ensemble des nombres complexes, C. C'est dans cet ensemble C qu'ils vont revisiter les équations travaillées dans R.

A ce niveau de travail, les questions qui portent sur les variables des situations sont à examiner dans ce que nous avons appelé domaine de travail. Comme domaines : les situations proches du milieu socioculturel, les nombres naturels, les nombres décimaux, les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes.

III. COMMENTAIRES DE TYPE DIDACTIQUE DE CE QUI EST OBSERVE

Les constats faits dans les séances observées montrent que toute la progression de l'apprentissage est centrée sur *« l'expression »* et la *« résolution »* d'une équation. On montre d'abord comment l'équation se présente avant de proposer les différentes tâches à exécuter.

Donc l'expression d'une équation est à la charge de l'enseignant et la résolution à la charge de l'apprenant ; la priorité de l'apprentissage est sur la maîtrise de l'algorithme de résolution.

Les apprenants arrivent à *résoudre* les équations proposées mais ils ont du mal à *exprimer* (ou à *traduire*) un problème formulé littéralement (ou à formuler) sous forme d'une équation.

Il y a donc un aspect de cette notion d'équation qui n'est pas pris en considération dans cet apprentissage. Il nous semble être celui du *sens de l'énoncé mathématique* d'un problème formulé littéralement ou à formuler.

La notion d'équation peut donc être définie à partir :

De son « expression », par exemple $5x + 10 = 110$, en se référant à sa composante principale, qui est le signe d'égalité, pour la définir.

De la « notion mathématique » d'équation qui suppose un langage, en particulier le langage algébrique.

En parlant de la définition à partir de la notion mathématique de l'équation, nous pouvons dire qu'elle est :

D'abord une *« traduction »* de l'énoncé littéral (formulé ou à formuler) ;

Ensuite un *« moyen de résolution »* des problèmes pour lesquels les méthodes arithmétiques de résolution sont inefficaces ;

Aussi une *« formule à appliquer »,* qui est une traduction standard d'un phénomène (problème, activité, …). Exemple de la vitesse en physique : $V = D/T$

Une *« fonction »* à définir et/ou à étudier.

On étudie ou on observe un comportement, une évolution, une variation des effets de la chaleur, de la dilatation d'un corps, de la résistance des matériaux, …

Il y a donc une progression à prendre en compte lorsqu'on veut travailler l'équation comme un objet, une notion mathématique.

Nous sommes donc en face de deux problèmes :

Problème de *« désignation »* du concept, par une composante de son expression, signe d'égalité, qui influe fortement sur son apprentissage ;

Problème de *« définition » uniquement* à partir de son expression.

IV. CONCLUSION DU TRAVAIL DE L'ETAT DES LIEUX ET PERSPECTIVES D'AVENIR

a. Le constat est que la désignation de l'objet mathématique par l'équation influe fortement sur l'apprentissage de la notion mathématique d'équation. Tout tourne autour de l'égalité.

b. En remontant un peu l'histoire mathématique de l'équation, nous sommes plutôt dans le domaine du langage mathématique (langage algébrique) solution de certains problèmes qui ont du mal à trouver une solution par des méthodes arithmétiques. C'est bien ce langage algébrique que l'enseignant doit privilégier dans cet apprentissage.

c. Sachant que le langage mathématique marque le passage de l'arithmétique à l'algèbre, l'enseignant doit proposer des situations (problèmes) pertinentes qui justifient le recourt au langage algébrique, traduction mathématique de ces problèmes, pour arriver à la solution.

d. La progression des séances qui doivent conduire à l'apprentissage de cette notion d'équation comprendrait plusieurs étapes :

d1. Tout commencerait par les séances de « traduction » de problèmes en équations et d'équations en problèmes. Ce va-et-vient conduirait à la définition de l'équation comme énoncé mathématique de problème.

d2. La définition sera étendue aux formules de physique et chimie, et aux fonctions (trigonométriques, logarithmiques, etc). C'est à ce niveau que devrait se poser la question des éléments nécessaires pour écrire une équation.

d3. La résolution de ces équations serait l'aboutissement de ce travail qui précède.

REFERENCES

Mopondi Bendeko Mbumbu A. (2010) *Approches socioculturelles de l'enseignement en Afrique subsaharienne*. Editions l'Harmattan.

Theis L. (2005) *Les tribulations de signe = dans la moulinette de la bonne réponse*. EBD : Québec.

MANUELS SCOLAIRES

Badetty L., Alii (2011) *Maitriser les math-4*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kayembe J.B., Alii (2003) *Maitriser les maths-3*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kayembe J.B., Alii (1996) *Maitriser les maths-2*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kayembe J.B., Alii (1996) *Maitriser les maths-1*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kibazola L., Alii (2002) *Pratiques des mathématiques à l'école primaire 3.*
New Scolot : Kinshasa.
Kweti wa Kweti J., Alii (2005) Pratiques des mathématiques à l'école primaire 4,
New Scolot: Kinshasa.
Loshima B., Alii (2005) *Maitriser les Maths 5.2*. Edition Loyola: Kinshasa.
Loshima B., Alii (2002) *Maitriser les math-5*. Editions Loyola: Kinshasa.
Makiadi N. (1999) *Algèbre 5 tome 1*. Editions CRP: Kinshasa.
Mbuyamba Kayola S. (2008) *Apprenons les mathématiques : 1ére année*.
Editions CRP : Kinshasa.
Mbuyamba Kayola S. (2008) *Apprenons les mathématiques : 1ére année*.
Editions CRP : Kinshasa.
Mpakasa Kibulu D., Alii (2010) *Maitriser les math-6*. Editions Loyola : Kinshasa.
Mugono N.M., Mayamba L. (2004) *Pratiques des mathématiques à l'école primaire 5*.
New Scolot : Kinshasa.
Mukoko N. (2009) *Mathématique 1er secondaire*. Editions CRP : Kinshasa.

DOCUMENTS ADMINISTRATIFS

Programme de l'enseignement maternel niveau 1, 2, 3 ; janvier 2008

PROGRAMME NATIONAL DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DE MATHÉMATIQUE, 2005.