Evolution de l'enseignement des inéquations au Collège au XXe siècle

Teresa ASSUDE

DIDIREM & IUFM de Versailles

Lorsqu'on aborde les inéquations d'un point de vue didactique, on peut s'intéresser en premier lieu aux difficultés des élèves : les pistes de recherche peuvent alors être l'identification des erreurs et des conceptions des élèves, et les dispositifs de remédiation. Par exemple, on peut identifier l'erreur suivante : multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre sans tenir compte du signe du nombre. Et on peut aussi essayer de trouver des hypothèses justificatives de l'apparition de cette erreur : cette connaissance erronée est une connaissance locale au sens où elle est vraie et valable pour les équations, et fausse pour les inéquations, et les élèves utilisent une connaissance locale hors de son domaine de validité. Ce point de vue est assez représentatif dans un certain nombre de recherches (voir par exemple les actes de SFIDA 9 à 12).

Dans ce travail, nous nous intéressons aux inéquations d'un autre point de vue qui est celui du curriculum. Que peut-on dire sur l'enseignement des inéquations au Collège [1] au XXème siècle ? Y a-t-il des changements, des permanences ? Retrouve-t-on, par rapport à cet objet, les grands axes d'évolution du système d'enseignement qui ont été identifiés par les historiens de l'enseignement ? Ou, au contraire, existe-t-il des différences spécifiques de cet objet ?

Ces questions seront abordées à partir des axes suivants :

- présence des inéquations dans les programmes et les textes officiels du système d'enseignement français ;
- contexte des inéquations dans les programmes ;
- types de tâches et de techniques dans des manuels pour le Collège.

[1] Ce qu'on nomme actuellement le Collège, ce qui n'était pas le cas au début du siècle, correspond aux élèves d'onze à quatorze ans environ.

1 – Présence des inéquations dans les textes officiels

L'objet “ inéquation ”(I) est présent dans l'enseignement du collège et du lycée pendant tout le XXème siècle. D'une manière générale, cet objet est inscrit dès les programmes du collège. Il apparaît :

- dans la réforme de 1902/05, dans la classe de troisième B (classe sans latin), sous la forme “ *Inégalités du premier degré à une inconnue* ”, où le mot “ inégalité ” désigne à la fois les inégalités numériques et les inéquations ;
- dans la réforme de 1947 dans les classes de troisième classique A et B et troisième moderne sous la forme “ *Equations et inéquations numériques du premier degré à une inconnue. Interprétation graphique*. ” ;
- dans les classes de troisième pendant la réforme de 1960 sous la forme : “ *Equations et inéquations ; position du problème ; signification, dans ces problèmes, des signes =, >, ≥. Equation et inéquation du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques. Interprétation graphique.* ” ;
- dans les programmes de 1971 cet objet apparaît dans les classes de quatrième sous les formes suivantes : *“ sur des exemples numériques, équations et inéquations du premier degré à une inconnue.* ” (en quatrième), et “ *Exemples conduisant à une ou deux équations ou inéquations du premier degré à une ou deux inconnues, à coefficients numériques. Représentation graphique des solutions d'une équation ou d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.* ” (classe de troisième) ;
- dans les programmes de 1977, les inéquations apparaissent encore en classe de quatrième “ *Exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue* ” (classe de quatrième) et en classe de troisième “ *Equations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques : résolution d'une équation, d'une inéquation, d'un système de deux équations ; résolution graphique d'un système d'équations ou inéquations. Exemples variés de problèmes du premier degré.* ” (classes de troisième) ;
- dans les programmes de 1985, cet objet apparaît encore en classe de quatrième “ *Résolution de problèmes aboutissant à des équations, à des inéquations du premier degré à une inconnue* ” (classes de quatrième) et en classe de troisième “ *Equations et inéquations du premier degré. Méthodes graphiques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficients numériques. Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à*

coefficients numériques. Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré. ” (classes de troisième) ;

- dans les programmes actuels (1995), l’objet “ inéquation ” apparaît dans la classe de troisième sous la forme “ *inéquation du premier degré à une inconnue* ” et *“ résolution de problèmes du premier degré ou s’y ramenant* ”, les compétences consistant à “ *résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée* ” et “ *Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.* ”

On constate une grande permanence en ce qui concerne la présence des inéquations dans le système d’enseignement secondaire dès le collège sauf dans la réforme de 1925 où les inéquations sont présentes seulement à partir de la classe de seconde (élèves de 15 ans). Cette permanence est associée aussi au type d’inéquations traité : il s’agit dans la plupart des réformes des inéquations du premier degré à une inconnue sauf en 1971, 1977 et 1985 où apparaissent en plus des inéquations du premier degré à deux inconnues en rapport avec la représentation graphique et des systèmes de deux inéquations à deux inconnues (1977 et 1985) en liaison aussi avec les “ méthodes graphiques de résolution ” (1985).

Certains programmes parlent de la représentation graphique des solutions d’une inéquation (1947, 1960, 1971) et d’autres parlent explicitement de méthode graphique de résolution (1977, 1985), ce dernier écrivant aussi de “ méthodes de résolution d’un système de deux équations ou inéquations ” au pluriel sans toutefois préciser quelles sont ces méthodes. En outre, le programme de 1977 distingue résolution d’une équation, d’une inéquation et d’un système de deux équations de la résolution graphique d’un système d’équations ou d’inéquations, supposant que la résolution d’un système d’inéquations ne se fera que par une méthode graphique. D’autres précisions sont aussi données, par exemple celle des “ coefficients numériques ” (1960, 1971, 1977, 1985) et encore celle de la résolution de problèmes (1977, 1985, 1997).

Une autre permanence est celle de la présence des équations dans le voisinage des inéquations et, sauf dans les programmes de 1902 et 1997, le mot “ équation ” apparaît dans la même phrase que le mot “ inéquation ”. Nous développerons ce point au prochain paragraphe.

Une autre observation est celle de la présence du mot “ inégalité ” dans les programmes de 1902 pour désigner aussi les inéquations. Carlo Bourlet dans son livre

“ Algèbre élémentaire ” destiné aux classes de mathématiques, précise que :
“ De même qu’on distingue les égalités en deux espèces, les identités et les équations, on peut distinguer dans les inégalités celles qui ont lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y figurent et celles qui n'ont lieu que si on donne à certaines lettres, appelées *inconnues*, des valeurs convenablement choisies. Nous désignerons ces dernières inégalités sous le nom d'*inégalités conditionnelles*. ” (p.160) Et, dans une note de bas de page, il écrit : “ On emploie aussi, quelquefois, les expressions *inidentité* et *inéquation*, mais, comme ces expressions ne sont pas très usitées, nous avons préféré ne pas les employer. ”

2 – Contexte des inéquations dans les programmes[2]

Pour préciser le contexte des inéquations dans les différents programmes, nous allons considérer trois grandes étapes : la première jusqu’à la réforme des mathématiques modernes (1902-1970), la deuxième qui correspond à cette réforme et à celle de 1977 (1970-1977), et la troisième étape est celle à partir de 1985 (1985-1997)

2.1 – Première étape.

Dans la première étape, les inéquations sont intégrés dans la partie “ algèbre ” et les programmes de quatrième et troisième sont divisés en deux ou trois parties de l’ensemble suivant : arithmétique, algèbre et géométrie. Dans le programme de 1902/1905, les inégalités viennent après les opérations sur les nombres positifs, les monômes et polynômes et les opérations, et les équations (équations du premier degré à une inconnue, résolution de deux équations à deux inconnues, systèmes d’équations comportant plus de deux inconnues). Les problèmes de mise en équation viennent ensuite mais il n’y a pas de référence explicite aux inégalités. Les variations de l’expression ax+b viennent ensuite ainsi que sa représentation graphique et enfin apparaissent les équations du second degré.

En 1947, les équations, les polynômes et monômes sont aussi dans le voisinage des inéquations mais il y d’autres objets qui apparaissent avant : repérage d’un point dans un plan, variables et fonctions à partir des grandeurs usuelles, fonctions linéaires et représentation graphique. Les équations du premier degré à une inconnue viennent avant

les inéquations et les problèmes concernant les équations viennent à la suite
des inéquations. Dans le programme de 1960, nous retrouvons les mêmes objets et le même ordre mais il y a une différence : on ne parle plus de fonctions données à partir de grandeurs usuelles graphiques mais simplement de fonction. Ce programme apporte aussi un autre “ petit changement ” car en classe de quatrième on parle d’inégalités lors de la comparaison de nombres relatifs.

En synthèse, cette période est marquée par un contexte des inéquations essentiellement équationnel : les inéquations sont “ presque ” comme des équations, elles suivent l’étude des équations et leurs techniques (technique algébrique) tout en tenant compte du signe de *a* lorsque on multiplie les deux membres de l’inéquation par *a*. Les inéquations font partie de l’algèbre classique dont les équations sont l’objet principal de l’étude. De “ petits ” changements s’opèrent par rapport à cette organisation, changements qui concourent à des modifications plus radicales dans la deuxième étape. Ces changements sont d’abord l’apparition de la notion de fonction et de la représentation graphique avant l’étude des équations et des inéquations (1947 et 1960) et l’apparition de la structure d’ordre des nombres réels (sans qu’on le dise encore explicitement).

2.2 – Deuxième étape

La deuxième étape est marquée par le bouleversement de la réforme dite des mathématiques modernes. En ce qui concerne les inéquations, les changements opérés ont été “ préparés ” avant comme nous venons de le voir. L’organisation classique au collège en arithmétique, algèbre et géométrie est remplacée par une autre organisation : par exemple, en classe de quatrième, il y a quatre parties (Relations ; Nombres décimaux et approche des réels ; Géométrie de la droite ; Géométrie plane), et en classe de troisième trois parties (Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques ; Plan euclidien ; Géométrie plane euclidienne). Les inéquations apparaissent en classe de quatrième associées au fait que R est un corps totalement ordonné et en classe de troisième au même fait et encore à l’introduction de la notion d’intervalle. Dans cette classe, les inéquations du premier degré à deux inconnues apparaissent ainsi que la représentation graphique des solutions de ce type d’inéquation. Les équations sont encore dans le voisinage des inéquations, et toutes les deux sont alors dans la

[2] Nous ne distinguerons pas dans un premier temps les différentes sections même si parfois il existe de

dépendance des fonctions numériques. La notion de fonction devient alors un noyau dur de l'organisation de ces programmes (de même que les structures des nombres) et elle fonde l'étude des équations et des inéquations (au moins dans leurs définitions, même si ce n'est pas dans les techniques utilisées). La réforme de 1977 fait un pas en arrière par rapport à la précédente réforme (celle de 1970) mais elle ne peut pas revenir au même point qu'avant la réforme de 1970. L'organisation de la classe de quatrième est en deux parties (Calcul numérique ; Géométrie plane) et en classe de troisième on revient à une organisation classique en deux parties (Algèbre ; Géométrie). Or ce retour ne signifie pas qu'on revienne en arrière comme le montre l'organisation par rapport aux inéquations : nous retrouvons en classe de quatrième les inéquations du premier degré associées à la relation d'ordre, et les inéquations du premier degré à deux inconnues apparaissent en classe de troisième dans la partie algèbre. Il faut noter que la résolution graphique d'un système d'inéquations est notée explicitement et les problèmes ne font pas de référence explicite ni aux équations ni aux inéquations.

En synthèse, le contexte des inéquations est, dans cette étape, essentiellement fonctionnel et structurel : structurel car l'inéquation est associée à la relation d'ordre (en 1971, on démontre que R est un corps totalement ordonné) et fonctionnel car cet objet est dépendant de la notion de fonction et de sa représentation graphique. Les inéquations rentrent ici dans le domaine de l'algèbre moderne (étude des structures numériques, notamment les structures d'ordre) et par le biais des fonctions comme outil pour l'analyse (cet aspect est plus visible au lycée). Comme conséquence de cette dépendance, nous pouvons remarquer la présence dans les programmes d'inéquations du premier degré à une et à deux inconnues et les systèmes d'inéquations dont la résolution graphique est explicitement prévue. Les inéquations tout en gardant une association privilégiée avec les équations s'autonomisent notamment vers le domaine de l'analyse.

2.3 – Troisième étape

Dans la troisième étape, depuis 1985, l'organisation dans toutes les classes du collège est faite en trois parties : Travaux géométriques ; Travaux numériques ; Organisation et gestion de données. Fonctions. Les inéquations apparaissent dans la partie " Travaux numériques " en classe de quatrième (1985) et en classe de troisième

---

grandes différences entre elles.

(1995) associées à la relation d'ordre. La résolution de problèmes aboutissant à des inéquations est prévue en classe de quatrième (1985) et dans la classe de troisième (1985 et 1995) La méthode graphique de résolution d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues est explicitement prévue en 1985 mais ce type d'inéquation ainsi que les systèmes d'inéquations ont disparu des programmes actuels du collège.

En synthèse, dans cette partie, nous avons un recentrage sur le contexte " structurel empirique " (numérique) et sur le contexte équationnel par la restriction à un seul type d'inéquation, tandis que pour les équations, les systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues y sont encore prévus.

Voyons comment ces différents contextes se matérialisent dans des manuels par le choix d'un certain nombre de tâches et de techniques associées.

3 – Identification de types de tâches et de types de techniques

Nous ne ferons pas une liste exhaustive de types de tâches et de types de techniques puisque nous allons utiliser certains manuels qui peuvent ou non être représentatifs des pratiques réelles dans les classes. Cette variable n'est pas pertinente dans notre cas étant donné que ce qui nous intéresse est d'identifier un certain nombre de types de tâches et de types de techniques de manière à mettre en évidence une évolution du curriculum en ce qui concerne les inéquations. Considérons les différents types de tâches suivants, types que nous pouvons retrouver dans les manuels examinés :

T1 : résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue
T2 : résoudre un système de deux ou plus inéquations du premier degré à une inconnue
T3 : résoudre des inéquations qui se ramènent à un système d'inéquations du premier degré à une inconnue
T4 : résoudre des problèmes avec discussion sur les conditions d'existence des inconnues
T5 : résoudre des inéquations du second degré à une inconnue
T6 : résoudre des inéquations paramétriques
T7 : résoudre des systèmes d'inéquations ayant d'autres inéquations que celles du premier degré
T8 : résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues

T9 : résoudre un système d’inéquations du premier degré à une ou deux inconnues
T10 : résoudre une inéquation du type (ax+by+c)(a’x+b’y+c’)<0 (ou >0)
T11 : résoudre des problèmes de programmation linéaire
T12 : résoudre des problèmes qui peuvent être modélisés par des inéquations ou des systèmes d’inéquations
T13 : étudier le signe d’une expression algébrique, notamment d’un polynôme, ou d’une fonction

Pour accomplir ces types de tâches, plusieurs types de techniques sont mises en œuvre. Ces types de technique sont ensuite spécifiés par rapport aux tâches précises mais nous pouvons retrouver les types suivants :

τ_1 : technique algébrique

τ_2 : technique algébrique avec intervalles ou avec des ensembles

τ_3 : technique algébrique-graphique

τ_4 : technique algébrique avec tableau de signes

τ_5 : technique fonctionnelle-graphique

τ_6 : technique fonctionnelle

τ_7 : technique graphique

Pour préciser ces différents types de tâches et de techniques, nous allons montrer quelques exemples pris dans les manuels (référencés dans la bibliographie) sans tenir compte de leur évolution dans le temps, ce que nous ferons dans le paragraphe suivant. Voilà ces exemples.

Exemple 1

“ *Soit à résoudre l’inégalité :* $\frac{x}{2}-3>4x+5$ ” (Grévy 1902)

Le type de tâche est T1 - résolution d’une inéquation du premier degré à une inconnue et la technique utilisée est une technique algébrique qui consiste à partir de la notion d’inégalités équivalentes et des deux théorèmes suivants :

- le premier théorème “ on forme une inégalité équivalente à une inégalité en ajoutant une même quantité aux deux membres et en conservant le sens de la première

inégalité ” et son corollaire “ Ce théorème permet de faire passer un terme
d’un membre dans l’autre, comme pour les équations ; il suffit de changer le signe de ce terme ” ;

- et le deuxième théorème “ on forme une inégalité équivalente à une inégalité en multipliant ses deux membres par une même quantité non nulle. La seconde inégalité a le sens de la première si le multiplicateur est positif ; elle a le sens contraire si le multiplicateur est négatif. ”,

de manière à trouver une inéquation du type ax > b ou ax < b, inéquations pour lesquelles on connaît la solution selon que a est positif ou négatif.

Ce type de tâche peut être accompli aussi par les techniques τ_2 , τ_3 en ajoutant à la technique algébrique respectivement la représentation des solutions par un intervalle, et la représentation des solutions dans un axe orienté, et par la technique τ_4 en ajoutant un tableau de signes comme on peut le voir dans le manuel Bréard (1960).

Les techniques fonctionnelle τ_6 et fonctionnelle-graphique τ_5 peuvent être aussi utilisées pour accomplir ce type de tâche. Par exemple, dans le manuel Cagnac et Thiberge (1960), pour résoudre l’inéquation $2x + 1 > 0$, les auteurs considèrent la fonction $y = 2x + 1$ et cherchent les valeurs de x donnant à la fonction des valeurs positives. Ensuite, ils utilisent aussi la technique fonctionnelle-graphique car ils considèrent le graphique de cette fonction pour conclure.

Exemple 2

“ *Soit à déterminer x qui vérifie à la fois les inéquations :*

$$2x - 3 > 5x - 1$$

et $$x + 4 > 3x - 2$$ ” (Maillard & Millet 1947)

Le type de tâche est ici T2 , “ résoudre des inégalités simultanées ” et la technique utilisée est une technique algébrique pour traiter chacune des inéquations isolément et ensuite déterminer entre quelles limites doit varier x pour que toutes les inéquations soient vérifiées.

Dans le manuel Faucheux 1945, ce type de tâches est accompli par la technique algébrique-graphique τ_3 : après avoir résolu chaque inéquation isolément par la technique algébrique, on représente les solutions des deux inéquations sur un même axe orientée et on lit sur l’axe les solutions communes. Les techniques τ_2 et τ_4 peuvent aussi accomplir ce type de tâches comme nous pouvons l’observer dans les manuels Queysanne-Revuz (1971) ou Bréard (1960).

Exemple 3

“ *Résoudre l’inégalité (x+1)(x-1)(x-2) > 0* ” (Grévy 1902)

Le type de tâches est T3 “ résoudre des inéquations qui se ramènent à un système d’inéquations du premier degré ”, la technique utilisée dans ce manuel est celle de chercher le signe du produit à partir de la règle des signes d’un produit et du signe de chaque facteur, signe qu’on obtient en résolvant à chaque fois une inéquation du premier degré par τ_1. Ce type de tâches peut aussi être accompli par τ_2, τ_3 et τ_4.

Exemple 4

“ *Inscrire dans un triangle de base a et de hauteur h un rectangle de périmètre donné 2p* ” (Grévy 1902) ou encore “ *Dans un triangle rectangle OAB d’hypoténuse AB, on donne OA=5cm, OB=9cm. Un point M de l’hypoténuse se projette en P sur OA, en Q sur OB. Déterminer M de façon que le demi-périmètre du rectangle OPMQ soit 8cm.* ” et les généralisations de ce problème, d’abord lorsque le demi-périmètre prend une valeur donnée p_{cm}, et ensuite lorsque OA = a, OB = b et demi-périmètre = p avec a < b (Faucheux 1945).

Ces deux tâches sont du type T4 “ résoudre des problèmes avec discussion sur les conditions d’existence des inconnues ” et la technique est celle de trouver l’équation ou le système d’équations qui mathématise le problème pour ensuite faire la discussion du problème : résoudre des inéquations qui sont les conditions auxquelles les inconnues sont assujetties.

Ces problèmes montrent l’une des applications des inéquations dans la généralisation progressive d’un type de problème géométrique qui va être modélisé par des équations et par des conditions géométriques. Par exemple, pour le second problème, les différentes phases de généralisation sont les suivantes : étant donné OP = x, l’équation qui modélise le problème est $x+\frac{9}{5}(5-x) = 8$ avec 0 < x < 5 et x = 1,25 est solution du problème. Lorsque on considère le paramètre p pour le demi-périmètre, l’équation $x+\frac{9}{5}(5-x) = p$ a comme solution $x=\frac{45-5p}{4}$, x étant compris entre 0 et 5. En résolvant les deux inéquations, il vient que 5 < p < 9. Le cas précédent p = 8 vérifie bien cette condition. Si on généralise encore le problème, et au lieu de prendre des valeurs numériques pour les côtés de l’angle droit du triangle, on prend les paramètres a et b, l’équation qui modélise le problème est alors

$x+\frac{b}{a}(a-x)=p$, avec 0 < x < a. La solution de l'équation est $x=a\frac{b-p}{b-a}$ et en résolvant la double inégalité que x doit vérifier, il vient que a < p < b. Le problème a donc une solution lorsque le demi-périmètre est compris entre les valeurs de OA et OB, ce qui était le cas pour le problème précédent.

Exemple 5

" *Nous nous proposons de résoudre dans RxR l'inéquation x – 2y + 2 < 0 (3) où l'inconnue est le couple (x,y), c'est-à-dire de déterminer l'ensemble de tous les couples de réels (x,y) qui vérifient (3).* " (Queysanne-Revuz 1971).

Cette tâche est du type T8 " *résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues* " et la technique présentée dans ce manuel est une technique graphique τ_7 : pour résoudre l'inéquation ax + by + c < 0, on trace dans un repère (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$), la droite d qui a pour équation ax + by + c = 0 et on choisit, dans l'un des demi-plans de bord d un point M : si les coordonnées de M vérifient l'inéquation l'ensemble des solutions est ce demi-plan sinon c'est l'autre demi-plan. Cette technique va être utilisée aussi pour le type de tâche T9 en résolvant chaque inéquation isolément et en faisant ensuite l'intersection (ou la réunion) des régions obtenues.

Les techniques graphiques mises en œuvre et l'existence des types de problèmes T8, T9, T10 sont autant de conditions pour la présence de nouveaux types de problèmes T11 : les problèmes de programmation linéaire. Voilà un exemple du manuel en question :

> " Dans un magasin, on donne un billet de tombola à tout client achetant 1kg de sucre à 1,50F ou 1 paquet de beurre de 250g à 3F. Un client dispose de 14,25F et son panier ne peut contenir que 5kg de marchandises. Comment peut-il obtenir le plus grand nombre possible de billets de tombola ?
>
> Appelons x le nombre de kg de sucre et y le nombre de paquets de beurre achetés par le client. L'inconnue est le couple (x,y) d'entiers naturels. Cette inconnue est soumise aux conditions
>
> 1,5x + 3y ≤ 14,25 et x + 0,25y ≤ 5
>
> qui sont respectivement équivalentes à
>
> $$\begin{cases} x+2y\leq 0 \\ 4x+y\leq 20 \end{cases}$$
>
> et le nombre de billets de tombola est x + y.
>
> Sur la fig.2, on a d'abord tracé les droites D1 et D2 admettant respectivement pour équations
>
> x + 2y = 9,5 et 4x + y = 20

D1 passe par les points A1(9,5 ;0), B1(0 ;4,75), D2 par les points A2(5 ;0), B2(3 ;8).

Ensuite on a représenté en vert l'ensemble des couples de réels positifs (x, y) qui vérifient les conditions (1) et (2). Les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient ces conditions sont représentés par des points noirs.

Puis on a tracé les droites Δ0, Δ1, Δ2,… d'équations

x + y = 0,   x + y = 1, x + y = 2, …

Les points noirs situés sur Δ0, Δ1, Δ2,… correspondent respectivement à 0, 1, 2, … billets de tombola. On voit sur le graphique que le nombre maximum de billets de tombola est 6 : il n'y a pas de point noir sur Δ7, Δ8,…, mais il y en a deux sur Δ6 : les points (4,2) et (3,3).

Le problème posé a donc 2 solutions : pour obtenir le plus grand nombre possible de billets de tombola, le client doit acheter 4kg de sucre et 2 paquets de beurre ou 3kg de sucre et 3 paquets de beurre. ”

Ce type de problèmes montre un déplacement dans le choix des problèmes et des applications des mathématiques : l'introduction de ce type de problème est-il l'indice que les mathématiques sont aussi au service de l'économie et, plus largement, des sciences humaines et sociales (notion d'ensemble) ?

Exemple 6

“ *Oncle Picsou rêve tout haut chaque nuit à ses économies : “ si je triplais mes économies et si l'on me donnait 42F, je serais en possession de plus de 204F. Toutefois, si je doublais mes économies et si je donnais 18F il me resterait moins de 94F. ” Ses neveux à l'écoute sautent sur leurs stylos. Aidons-les à trouver le montant des économies de Picsou.* ” (Nathan 1985)

ou

*“ **Des inéquations en économie***

A. Prix de revient

Un atelier fabrique des instruments de musique. Les sommes engagées pour la fabrication se composent de frais fixes qui s'élèvent à 3000 euros auxquels il faut ajouter 600 euros par objet fabriqué.

1. Quel est le prix de revient de trois instruments, de sept instruments, puis de onze, et enfin de x instruments ?

2. Une banque a prêté 30000 euros à l'atelier. A partir de combien d'objets fabriqués le prix de revient dépasserait-il cette somme ?

B. Prix de vente

Chaque instrument est vendu 1100 euros.

1. Exprimer, en fonction de x, le prix de vente de x instruments.

2. A partir de combien d'instruments vendus rentre-t-on dans ses frais ? (C'est-à-dire que le prix de vente est supérieur ou égal au prix de revient.) "(Le nouveau Pythagore 1999)

Ces problèmes sont des tâches du type T12 " *résoudre des problèmes qui peuvent être modélisés par des inéquations ou des systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue* ". La technique est celle de trouver l'inéquation ou le système d'inéquations qui modélise la situation et ensuite utiliser une technique algébrique ou algébrique-graphique.

Cette identification de types de tâches et de types de techniques n'est pas exhaustive mais elle nous permet de faire quelques observations. Un type de tâches n'est pas associé à un seul type de techniques : par exemple, il y a plusieurs techniques qui peuvent accomplir T1. Réciproquement, un type de techniques peut accomplir de types de tâches différentes. L'association existante à un moment donné des tâches et des techniques dépend des contextes des inéquations dans le système scolaire, contextes que nous avons présentés précédemment. Voyons maintenant l'évolution des types de tâches selon ces contextes.

4 – De l'évolution du type de tâches

Le tableau suivant présente l'évolution des types de tâches dans les différentes réformes :

Tableau des types de tâches

	1902	1925	1947	1960	1971	1977	1985	1997
4ème					T1	T1	T1 T2	
3ème	T1		T1	T1 T1[3]	T1	T1	T1	T1

[3] En ce qui concerne cette réforme, les deux manuels analysés (Bréard 1960 et Lebossé et Héméry 1960) étaient tellement différents quant à la présence de types de tâches que nous avons décidé de le faire apparaître dans le tableau.

	T2 T3 T4		T2 T4	T2 T3 T5 T6 T7 T8 T9	T2 T3 T8 T9 T10 T11	T2 T8 T9 T11	T2 T8 T9 T12	T12

L'observation de ce tableau nous amène à poser quelques questions et à faire quelques remarques :

- T1 apparaît partout mais, comme nous l'avons déjà vu, les techniques pour accomplir ce type de tâche ne sont pas toujours les mêmes.
- Pourquoi T4 disparaît en 1960 ?
- Comment expliquer l'apparition de nouveaux types de tâches à partir de 1960 (et surtout en 1971) ?
- Peut-on relier ces apparitions et disparitions à l'évolution du système d'enseignement des mathématiques ?

L'évolution du type de tâches peut se comprendre à partir de deux points de vue. D'une part le contexte global de chaque réforme permet de préciser les grands enjeux relatifs à l'enseignement et aux mathématiques à la fois en tant que savoir savant et en tant que discipline scolaire. D'autre part le contexte local va entraîner un ajustement des possibles à la réalité des pratiques telles qu'elles se donnent à voir dans les manuels. Nous connaissons bien les limites d'une étude des pratiques réelles à partir des manuels mais ceux-ci sont de bons indicateurs sur les pratiques potentielles à un moment donné. Nous allons aborder nos questions à partir de ces deux points de vue en nous restreignant au problème des *applications*.

Applications des inéquations

Le type de tâches T4 a disparu à partir des années 60. Ce type de tâche vivait dans un contexte équationnel très fort où les applications, au niveau du premier cycle (Collège), concernaient essentiellement des contextes mathématiques (notamment géométriques) et physiques (notamment l'étude du mouvement uniforme). Nous en avons donné un exemple (exemple 4 de la partie 3).

Dans le contexte institutionnel de la réforme de 1902[4], l'esprit de l'enseignement scientifique se voulait en rupture par rapport aux programmes anciens, notamment en ce qui concerne le rôle et la place des sciences dans la formation générale : à l'instar des humanités classiques autour du latin, les sciences devenaient alors des " humanités scientifiques ". Les promoteurs de la réforme prônent l'unité de la science et le primat de l'expérience dans le système d'enseignement secondaire aussi bien pour la physique que pour les mathématiques. Les mathématiques doivent être expérimentales, comme le disent les réformateurs, qui s'appuient sur les discours des mathématiciens tels que Poincaré, Borel et Hadamard. Dans ce sens, le raisonnement doit partir du concret et de l'expérience de l'élève et le professeur " utilisera fréquemment les représentations graphiques, non seulement pour mieux montrer aux élèves l'allure des phénomènes, mais pour faire pénétrer dans leur esprit les idées si importantes de fonction et de continuité. " La notion de fonction est elle même introduite en mathématiques sous l'impulsion des physiciens. Si l'esprit positiviste traverse l'ensemble de la réforme de 1902, les changements curriculaires sont plus visibles dans le second cycle de l'enseignement secondaire (ce qu'on appelle maintenant le lycée), comme nous le montre par exemple Michèle Artigue (1996) en ce qui concerne le calcul différentiel et intégral. Dans le premier cycle, l'enseignement doit rester concret et les applications des mathématiques sont essentiellement les applications de l'arithmétique à la comptabilité et au dessin géométrique.

Or en ce qui concerne les inéquations au premier cycle, les applications sont intra-mathématiques et se restreignent au contexte équationnel (et aux problèmes résolus par des équations), notamment à l'étude des conditions d'existence des données qui apparaissent dans les équations et les systèmes d'équations.

Cet état de choses va changer dans les années 60 et 70 même si le problème des applications y est encore un problème actuel et essentiel pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, le programme de 1971 dit explicitement: " *La mise en équation de problèmes est, à la vérité, le problème le plus important des mathématiques dites " appliquées ", ou plus exactement de l'emploi des mathématiques.* ", et le programme va jusqu'à affirmer leur importance même pour les élèves qui arrêteront leurs études :

> *" Il n'y a pas d'inconvénient, bien au contraire, à ce que les élèves de Quatrième et de Troisième, qui vont en grand nombre arrêter là leurs*

[4] Pour plus de détails voir Belhoste 1995.

études théoriques, sentent que les mathématiques seules ne peuvent, au fond, résoudre aucun problème pratique. Il est nécessaire que soit faite une hypothèse de nature expérimentale,

- qui devra peut-être être remise en cause une fois le résultat obtenu,

- d'après laquelle le modèle mathématique utilisé correspond bien à la réalité étudiée.

Mais, à la fois pour que les mathématiques apparaissent comme dignes d'intérêt et pour qu'elles ne rebutent pas certains esprits avides de résultats tangibles, il est souvent utile de partir en classe de faits expérimentaux ; on s'attachera donc, quand on présentera en mathématiques, un problème " concret " à ce qu'il n'y ait aucun doute sur la correspondance entre les éléments physiques de ce problème et les éléments mathématiques associés, et l'on précisera avec beaucoup de soin cette correspondance, si besoin est. "

Mais, en ce qui concerne les inéquations, de quels problèmes s'agit-il ? On pourrait penser aux problèmes intra-mathématiques car comme le réfère encore le programme " *Il est plus difficile de passer d'un problème " concret " à un problème mathématique ; ce n'est possible que si, d'une manière ou d'une autre, le phénomène physique, économique ou social qui intervient a été " mathématisé* "

Or, le contexte équationnel et les problèmes auxquels les inéquations apportaient leur concours ont disparu à partir des années 60 mais surtout dans les années 70. Là encore le programme de 1971 est explicite : " *Le programme fait étudier quelques problèmes contenant des paramètres, par exemple en algèbre l'équation $x^2 = A$, en géométrie l'intersection d'une droite et d'un cercle. Mais, en règle générale, on n'étudiera dans l'année que des problèmes déterminés ; on exclura totalement les problèmes " à paramètre " des sujets d'examen.* "

Les applications choisies dans le programme de 1971 sont les problèmes de programmation linéaire, soit le type de tâches T11 : " *Les problèmes très simples de programmation linéaire donnent lieu à des exercices d'optimisation où intervient la représentation graphique d'équations et d'inéquations du premier degré , leur tour nouveau et concret plaît aux élèves.* "

L'introduction de ce type d'application (de ce type de tâche) est possible par la conjonction de plusieurs facteurs. D'une part le contexte global : la légitimité scolaire des mathématiques n'est plus à discuter (les mathématiques ont un rôle important dans la culture scolaire, notamment dans le rôle de sélection et d'orientation des élèves) ni leur légitimité épistémologique, même si les applications des mathématiques ne résident plus forcément dans les sciences comme la physique mais plutôt dans les sciences humaines et sociales comme l'économie. La réforme des mathématiques modernes (1971) a suivi le mouvement structuraliste et l'émergence dans la société des " mathématiques des sciences humaines " (ensembles, applications, structures) qui sont, comme le dit Michel Armatte (1996) " le terreau de la révolution structuraliste ". Les applications des mathématiques sont alors plus dans les sciences sociales que dans les sciences de l'ingénieur : il est alors possible de faire vivre de nouveaux problèmes dans les classes.

D'autre part le contexte curriculaire est profondément altéré : les notions d'ensemble et de structure (algébrique, d'ordre) rentrent en force dans le curriculum et la notion de fonction est aussi " descendue " dans le premier cycle et ceci dès la réforme de 1947 où elle apparaît en lien avec les grandeurs. La notion de fonction et sa représentation graphique (fonction de variable réelle- R ou R²) vont permettre l'existence d'autre types d'inéquations et notamment les inéquations du premier degré à deux inconnues. Comme le dit le programme :

> *" L'étude des solutions des équations et des inéquations à une inconnue réelle appellera l'emploi d'une représentation graphique " et " on reconnaîtra de même :*
>
> *- dans l'ensemble des points M tels que $2x + 3y - 12 \geq 0$, un des demi-plans physiques limités par D ;*
>
> *- dans l'ensemble des points M tels que soient vérifiés simultanément $2x + 3y - 12 = 0$ et $x - 2y + 3 = 0$, l'intersection de deux droites physiques.*
>
> *De tels exercices seront très progressivement conduits et ne donneront lieu à aucune étude littérale. "*

La disponibilité du type d'inéquations à une ou deux inconnues, la disponibilité des méthodes graphiques et l'émergence dans la société des " mathématiques des sciences humaines " sont ainsi quelques-uns des facteurs qui ont permis l'émergence dans les programmes et dans le travail des élèves de nouvelles applications des inéquations, à savoir le type de tâche T11. Ces nouveaux problèmes, en trouvant plusieurs contextes favorables, vont permettre aussi de lutter contre l'obsolescence des applications des inéquations. On peut alors se demander comment ces problèmes vont vivre réellement dans les classes.

Outre des applications extra-mathématiques, les inéquations vont recevoir aussi d'autres fonctions intra-mathématiques : la représentation de l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalle va permettre aux élèves de se familiariser avec cette notion. Comme les instructions le précisent : " *L'étude des inéquations numériques du premier degré à une inconnue familiarisera les élèves avec le calcul algébrique et avec l'extension à R de la notion d'intervalle* ". Le calcul algébrique autour des inéquations sera ensuite un outil pour l'étude de l'analyse au lycée où les notions d'approximation, de limite, de continuité sont premières.

Cette situation va se modifier dans les réformes qui suivent. Les conditions de viabilité de l'existence de T11 dans les classes sont faibles vu la complexité des notions en jeu telles que la convexité et la recherche de maxima et de minima, et la seule nouveauté, qui " plaît aux élèves ", ne contrebalance pas le coût de la complexité. La référence explicite à ces problèmes disparaît des programmes du collège mais ils subsistent au niveau de la classe de seconde. Ce type de problèmes continue toutefois à vivre dans certains manuels correspondant à la réforme de 1977 (par exemple dans la manuel " Faire des mathématiques " dans un seul exercice, et dans le manuel Galion dans les thèmes de recherche).

La presque disparition de ce type de problèmes pose une autre question : quelles applications extra-mathématiques pour les inéquations ? Des problèmes de modélisation sont apparus, problèmes plus simples que ceux de programmation linéaire mais qui ont aussi un rapport avec la " réalité " sociale : ce sont les tâches du type T12. Ce type de problèmes apparaît explicitement dans les manuels et dans les épreuves de Brevet à partir de la réforme de 1985, voir par exemple l'exemple donné plus haut sur les inéquations en économie.

Le contexte global des réformes des années 80 et 90 n'est plus le même : par exemple, du point de vue mathématique, on ne parle plus tant de structures que de modèles et d'interactions. Le mouvement structuraliste n'a plus la même visibilité, les approches systémiques prennent de l'importance et des discours autour de l'activité du sujet, du sens des apprentissages, de l'importance des interactions (dans le langage, dans l'apprentissage, etc) commencent à apparaître dans le système d'enseignement, système qui cherche aussi à trouver de nouveaux fondements dans la société. Le retour au concret est encore mis en avant sans qu'on fasse par la suite le rapport avec une théorie : le curriculum se dilue dans un certain empirisme.

Ces contextes peuvent avoir une importance dans le choix des problèmes du type T12 : voir par exemple l'exemple du problème de l'oncle Picsou. Or ce type de problèmes a l'avantage de pouvoir continuer à exister sans que soient disponibles les inéquations du premier degré à deux inconnues et la méthode graphique de résolution des inéquations : une technique algébrique de résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue suffit à les faire exister. Or comme dans les programmes actuels au collège, il n'y a que ce type d'inéquation, ce type de problèmes a encore de " beaux jours " devant lui. Pourquoi s'obstiner à garder des problèmes du premier degré qui vont être mathématisés par des inéquations au lieu de les faire disparaître ? Deux raisons peuvent être invoquées : d'une part le recentrage du contexte équationnel en rapport avec les inéquations, comme le programme le réfère : *" En 3ème, le champ des problèmes nécessitant la résolution d'une équation du premier degré se prolonge à ceux qui conduisent à : - la résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques, après qu'a été dégagé le lien entre l'ordre et la multiplication* ", et un peu plus loin " *Dans chaque cas, la géométrie, la gestion de données, les autres disciplines et la vie courante fournissent de nombreux exemples.* " D'autre part le contexte savant et disciplinaire qui prônent tous les deux (le deuxième en est influencé par le premier) l'importance des activités de modélisation dans le travail des mathématiciens et donc l'importance de leur transposition dans les activités de l'élève.

5 – Conclusion

L'évolution de l'enseignement des inéquations au Collège pendant le XXème siècle est marquée par trois étapes qui correspondent à trois contextes curriculaires : équationnel, structurel-fonctionnel et structurel-empirique-équationnel. Ces trois contextes curriculaires sont à la fois déterminés par les contextes savant, scolaire, culturel, social et philosophique , et déterminent les pratiques possibles dans les classes et les pratiques des élèves. L'évolution des types de tâches est lié au contexte et à la possibilité d'avoir des applications, intra-mathématiques ou extra-mathématiques, compatibles avec le type d'inéquation et les techniques existant dans le curriculum à un moment donné. Le choix des applications est marqué par les rapports entre les mathématiques et les autres domaines : en schématisant un peu, les sciences physiques dans la première étape, les sciences économiques et sociales dans la deuxième et la "vie courante " dans la troisième. En outre, ce choix est lié à la disponibilité des techniques (notamment la technique graphique pour les problèmes de programmation linéaire), disponibilité qui est une condition nécessaire mais non suffisante de ce choix : par exemple, les problèmes de programmation linéaire ont disparu des programmes alors que les techniques nécessaires y étaient encore. La complexité des problèmes peut alors être un obstacle pour leur vie dans les classes puisque le coût est tel qu'il ne peut pas être “ supporté ” dans l'économie du système. Actuellement, les inéquations apparaissent comme des outils de modélisation des situations de la “ vie courante ”, et cette présence peut être comprise par le contexte savant (importance de la modélisation dans le travail du mathématicien), par le contexte scolaire et philosophique (importance de l'empirisme, du retour au concret, de la “ vie courante ”), et par l'économie des moyens nécessaires pour les résoudre : un seul type d'inéquation et une seule technique algébrique.

Bibliographie

Armatte M (1996), *Mathématiques “ modernes ” et sciences humaines*, in Belhoste B, Gispert H & Hulin N (sous la direction de), *Les sciences au lycée.Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étanger*, Vuibert, INRP, Paris, pp.77-88.

Artigue M (1996), Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994), in Belhoste B, Gispert H & Hulin N (sous la direction de) *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Vuibert, INRP, Paris, pp.195-216.

Belhoste B (1995), *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels*, Tome 1 : 1789-1914, Editions Economica, INRP, Paris.

Belhoste B, Gispert H & Hulin N (sous la direction de) (1996), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Vuibert, INRP, Paris.

Belhoste B (1997), *L'histoire de l'enseignement mathématique au collège et au lycée*, in Legrand P (sous la direction) *Les maths en collège et en lycée*, Hachette, Paris, pp.368-387.

Drouhard J-P et Maurel M (éditeurs) (2000), *Actes des séminaires SFIDA 9 à SFIDA 12*, volume III, 1997-1999, IREM de Nice.

Manuels

Aguilar P, Louquet P et Moulia L. (1980), *Mathématiques*, classe de troisième, Colin, Paris.

Antibi A et alii (1993), *Maths 3ème* , collection Transmath, Nathan, Paris.

Bonnefond G, Daviaud D et Revranche B (1999), Le nouveau Pyhtagore, Mathématiques 3ème , Hatier, Paris.

Bréard C. (1960), Mathématiques, Classe de 3ème , Editions de l'Ecole, Paris

Cagnac G et Thiberge L. (1960), *Arithmétique, Algèbre, Géométrie,* 3ème, Masson Editeur, Paris.

Deledicq A, Lassave C et Missenard C. et D. (1984), *Faire des mathématiques* , Cédic, Paris.

Delors R et Vinrich G (sous la direction de) (1999), *MATH* 3ème , Collection cinq sur cinq, Hachette, Paris.

Faucheux M. (1946), *Mathématiques et dessin géométrique*, Larousse, Paris.

Galion E (1980), *Mathématique 3ème*, O.C.D.L., Hatier, Paris.

Grévy A. (1905), Algèbre à l'usage des élèves des classes de troisième B à première C et D, Vuibert, Paris.

Lanoëlle A et alii (1999), *Dimathème* 3ème, Didier, Paris.

Lebossé C. et Hémery C. (1960), *Algèbre, arithmétique et géométrie*, classe de troisième, Nathan, Paris.

Le Goff A. et alii (s/date), *Mathématiques* 3ème, Magnard, Paris, programme de 1985.

Maillard R et Millet A (1948), *Mathématiques, Classe de 3ème*, Hachette, Paris

Millet A (1938), *Mathématiques, Arithmétique et algèbre. Géométrie- Dessin géométrique*, Classes de 3ème A et B, Hachette, Paris.

Monge M. et Guinchan M. (1958), *Mathématiques*, Classe de 3ème, Belin, Paris.

Monge M, Guinchan M et Pelle J-P (1972), *Mathématiques 4ème et 3ème* , Belin, Paris.

Polle R et alii (1980), *Mathématiques*, classe de troisième, Delagrave, Paris.

Queysanne M et Revuz (collection dirigée par) (1973), *Mathématique* 4ème et 3ème, Nathan, Paris.

Serra E (sous la direction de) (1999), *Mathématiques* 3ème , Bordas, Paris.
Thirioux A et alii (1979), *Mathématique contemporaine*, Classe de 4ème , Magnard, Paris.