Importance des aspects argumentatifs dans la production et démonstration de conjectures

Nadia DOUEK
IUFM de Créteil

1 - Présentation Générale

Le but de l'atelier était de partager avec les intervenants mes critères d'analyse des relations entre "argumentation" et "démonstration" dans les activités sur les théorèmes, que j'expose dans 2, et les conséquences qui en découlent pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques.
Pour cela, j'analyse certaines productions d'étudiants de l'Université de Gênes en IV-ème année de mathématiques et se destinant à l'enseignement dans le secondaire. La tâche concerne la production et la démonstration d'une conjecture qui généralise la propriété "La somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par quatre". Voir 3.
L'atelier est lié à la contribution au groupe TSG-12 ("Proof and proving in mathematics education") d'ICME-9 (voir Douek,2000). Pour le cadre théorique détaillé, voir Douek,1999a, pour une analyse semblable sur des protocoles, Douek,1999b.

2 - Comparaison entre argumentation et démonstration :

L'idée est que la séparation entre argumentation et preuve n'est pas simple, il y a des points communs tant du point de vue épistémologique que cognitif. Ce qui ne nie pas les différences. Il y aurait des bénéfices à tirer de la pratique de l'argumentation pour l'apprentissage de la preuve.

<u>D'abord une description de l'argumentation dont il s'agit ici :</u>

Il s'agit de texte, discours ou discussion concernant un sujet bien déterminé, comme processus de production ou comme produit. La cohérence et les liens logiques (au sens large et non de déduction seulement) y sont essentiels
Une argumentation est donc une suite d'arguments liés par un raisonnement.
Un argument pourra être une proposition, un schéma, une observation, une information expérimentale, visuelle... avancée pour ou contre une proposition, opinion...

<u>Ensuite, une distinction importante :</u>

On distinguera les processus de construction et les produits d'une argumentation ainsi que d'une démonstration.
Le produit d'une démonstration est un texte déductif qui parfois tente d'approcher une démonstration formelle (comme "dérivation formelle", "calcul logique").

<u>Points communs...</u>

...<u>concernant les produits :</u>

Le raisonnement, l'enchaînement logique des pas sont communs aux argumentations et aux démonstrations comme produits.
Le recours à des corpus de référence pour appuyer les pas du raisonnement, aussi.
Le problème de la valeur épistatique (le degré de certitude d'une proposition et donc l'aspect sémantique aussi) se pose aussi bien dans les processus de production d'argumentation que de démonstration, l'enchaînement formel n'est pas toujours suffisant quand on cherche à démontrer une proposition ou à avancer une conjecture surtout dans les niveaux avancés de mathématique (voir par exemple les problèmes de décidabilité ou de choix d'axiomatique).

...concernant les processus :

Dans l'élaboration des raisonnements et leurs cheminements, les analogies et les inductions sont possibles, les jeux d'images mentales sont permis (voir la notion de "Transformational reasoning" de Simon, 1996).
L'interprétation des résultats partiels ou de diverses propositions (recherche de sens) est importante. Cela peut prendre la forme de changements de représentations, de registres (utilisation de schéma, par exemple)
Dans les processus, comme dans les produits d'argumentations ou de démonstrations, il est inévitable que des références sur lesquelles s'appuie le raisonnement restent implicites. Cela peut être dû au fait qu'elles sont considérées comme évidentes dans la communauté au sein de laquelle a lieu le travail, cela peut être dû à une ambiguïté non perçue dans la communauté (Lakatos, 1985).

Les différences :

Dans les démonstrations, comme produits, le recours aux corpus de référence obéit à des règles plus strictes que pour une argumentation. Par exemple les analogies ne constituent plus des pas de raisonnement, elles ne sont plus permises. De plus le corpus de référence est alors une théorie constituée, ou plusieurs théories compatibles entre elles (par exemple on ne pourrait pas s'appuyer à la fois sur des théorèmes de la géométrie Euclidienne et de la géométrie Riemannienne, sauf cas particuliers..).

Implication sur l'enseignement :

Imposer les limitations liées aux textes de démonstrations aux élèves qui découvrent, s'approchent de la démonstration (dans les phases de production) risque de les empêcher de se construire des moyens de recherche précieux, de leur fermer les chemins de l'exploration des possibilités multiples qu'offrent les jeux d'images mentales, les analogies, les liens avec des savoirs d'autres domaines.. etc. On voit dans l'étude de cas qui suit le rôle moteur de l'activité argumentative.

Etude de cas (présentés en annexe)

L'exemple est tiré de travaux d'étudiants de maîtrise suivant une unité de didactique des mathématiques.
Il s'agit de la production et la démonstration d'une conjecture qui généralise la propriété "La somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par quatre". Ces étudiants avaient déjà rencontré le sens de "généralisation" auparavant.

Ils résolvent couramment (et anonyment) des problèmes ouverts dans le but d'étudier leurs propres productions comme "travaux d'élèves" et d'analyser leurs processus de résolution de problème. Le contrat est donc d'écrire toutes les idées qui leur viennent à l'esprit durant ce travail (d'une heure) même s'ils trouvent qu'il y a des absurdités. C'est ce contrat qui m'a permis d'analyser des processus que l'on ne peut percevoir dans une production écrite normale, ni même dans un brouillon (on n'y écrit pas tout.. et l'on barre les "bêtises"..)

<u>Texte 1 :</u>
Commentaires :
Après quelques questionnements sur la nature de la généralisation, en 3 changement de registre. L'étudiant interprète en langage (plus) naturel le calcul qu'il envisage et ce qui en découle.
En 4 en cherchant à faire une induction, l'étudiant organise l'écriture des calculs successifs. Cette organisation spatiale de l'écriture n'est pas une connaissance mathématique qu'il expliciterait, mais elle peut néanmoins aider à percevoir des régularités numériques et donner des idées de conjectures, ou d'écritures algébriques nouvelles.
En fin de 5, retour au langage naturel, pour une tentative d'interprétation qui pourrait aider relier les calculs effectués à une formule, une écriture algébrique...
En 6 changement de registre : utilisation des index dans le cadre des suites.
En 7 des confusions, dont l'étudiant parvient à sortir par l'interprétation en langage naturel des rôles des lettres utilisées dans les calculs.
Entre 8 et 12 on voit réapparaître des idées explorées plus haut, on est loin d'une exposition linéaire d'un raisonnement déductif.
En 13 l'organisation de l'écriture de la somme est reconnue comme familière, l'étudiant se souvient de l'anecdote sur les calculs du jeune Gauss... ce qui va l'aider à reconstruire la formule qui convient. Ici les références ne sont plus celles du cadre théorique mathématique où se fait le travail, c'est une référence biographique qui n'apparaîtrait jamais dans le texte (le produit) d'une démonstration mais qui a bien aidé à trouver son chemin dans les calculs...
A partir de 20 l'étudiant rédige la conjecture et la démonstration. On peut voir la différence de l'utilisation de l'espace de la feuille et la restriction des références et des registres au seul domaine mathématique concerné par ce travail. Le caractère formel devient particulièrement important.
D'une façon générale, le texte contient de nombreux sauts, d'une idée à l'autre, d'un registre à l'autre, les raisonnements sont souvent reliés par les aspects sémantiques (extension du résultat des impairs aux pairs, de somme de deux nombres à somme de plusieurs, de nombres consécutifs à "4ième suivant"..) que la seule lecture de la forme de l'écriture algébrique n'aurait pas permis.

<u>Texte 2 :</u>
En 1 et 2 l'étudiant effectue des calculs (peu utiles par rapport aux données du problème) tourne autour d'un sens de la généralisation : on peut penser qu'il interprète (implicitement) cela dans le rapport numérique-algébrique. Ceci ne convient pas à ce contexte. Il me semble que l'étudiant aurait pu voir l'aspect inadapté de cette interprétation si celle-ci avait été explicitée.
En 2, 3 et 4 énonciation de références mathématiques (d'habitude implicites car évidentes à ce niveau) et de "méthodes" de résolution de problèmes mathématiques (qu'on entend souvent dans les cours !).
En gros caractères, après 5 l'enseignant intervient pour donner le sens de "généralisation" (déjà rencontré auparavant).

En 7 interprétation en langue naturelle du problème posé, ce qui change immédiatement la manière de le traiter.
En 9 et 10 calculs non interprétés, résultats interpétés, recherche de l'écriture algébrique de l'énoncé (dans une interprétation restrictive de la généralisation comme re-définie par l'enseignant) c'est-à-dire divisibilité par 4 au lieu de voir s'il y a "du nouveau" dans l'ensemble des multiples qui apparaissent.
En 11, trouve, probablement par induction, la bonne expression, mais aucune justification. C'est remarquable en comparaison des nombreuses justifications fournies pour des situations plus évidentes
On peut voir que le texte général est plutôt linéaire, qu'il y a peu de recours aux interprétations, peu de changements de registre, une grande habileté aux calculs. Ce texte est plus proche d'un travail "bien rédigé". L'aspect formel des pas de raisonnement est assez marquant. Les sens des divers éléments de l'énoncé n'est pas questionné.

Conclusion

Dans la pratique mathématique, le travail de recherche a un caractère argumentatif important. Il joue un rôle moteur dans l'élaboration des idées, dans les liens entre les savoirs qu'il permet d'établir et que le raisonnement déductif ne permettrait pas. Mais c'est le raisonnement déductif qui sera nécessaire pour théoriser ces liens par la suite.
Dans le cadre scolaire, les élèves ont besoin d'établir des liens entre leurs savoirs, au-delà des limites de la discipline, d'enrichir leur imagination avec ces liens, avec des images mentales, avec des anecdotes qui rappellent le sens du problème, etc. Ce sont des façons d'aiguiser l'intuition. Or si de telles "pratiques" doivent rester de l'ordre du privé, peu d'élèves pourront y accéder ou y recourir. Ils ont besoin de les partager, de les expliciter. Elles doivent donc être admises et même favorisées par l'enseignant. Bien sûr l'écriture du texte mathématique "bien rédigé" est important, tant pour la structuration des connaissances que pour la communication des savoirs, mais, à mon avis il ne remplace pas la pratique argumentative.
Pour finir je citerai Thurston (1994): *"People have amazing facilities for sensing something without knowing where it comes from (intuition), for sensing that some phenomenon or situation or object is like something else (association); and for building and testing connections and comparisons, holding two things in mind at the same time (metaphor). These facilities are quite important for mathematics. Personally, I put a lot of effort into "listening" to my intuitions and associations, and building them into metaphors and connections. This involves a kind of simultaneous quietening and focusing of my mind. Words, logic and detailed pictures rattling around can inhibit intuitions and associations".*
En quelques mots : les intuitions, les associations, les métaphores viennent facilement à l'esprit, et elles sont très importantes en mathématiques. Personnellement je fais de grands efforts pour "écouter" mes intuitions, pour en construire des métaphores et faire des connections. Cela demande à la fois concentration et détachement par rapport à mon raisonnement. Les mots, la logique et les détails peuvent inhiber ces intuitions.

Références

Douek, N.: 1999 a, 'Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications', I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I,* Osnabrueck, pp. 128-142
Douek, N.: 1999 b, 'Argumentative Aspects of Proving: Analysis of Some Undergraduate Mathematics Students Performances', *Proc. of PME-XXIII,* Haifa, vol. 2, pp. 273-280
Douek, N.: 2000, 'Comparing Argumentation and Proof in a Mathematics Education Perspective', *Newsletter on Proof,* January 2000, http://www-cabri.imag.fr/Preuve
Lakatos, I.: 1985, *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris
Simon, M.: 1996, 'Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing', *Educational Studies in Mathematics,* 30, 197-210
Thurston, W.P: 1994, 'On Proof and Progress in Mathematics', *Bulletin of the A.M.S.*, 30, 161-17