Un enseignement de la proportionnalité de la 6$^{\text{ème}}$ à la terminale

Maryvonne HALLEZ-MENEZ
Lycée Paul Bert et IREM de Paris

La proportionnalité a été utilisée dès les temps les plus reculés pour rendre compte de la réalité. Les Hébreux, les Egyptiens, les Grecs utilisaient déjà la proportionnalité des grandeurs **périmètre du cercle** et **diamètre du cercle**. Dès que deux phénomènes semblent varier en relation l'un à l'autre , une première hypothèse est souvent celle de la proportionnalité. Il est donc naturel que les programmes de mathématiques, du primaire au lycée, lui accordent une place non négligeable. Néanmoins l'acquisition de cette notion est loin d'être facile et reste souvent incomprise encore de nos élèves même en Terminale. J'en ai fait un des axes fondamentaux dans mon enseignement de la 6$^{\text{ème}}$ à la Terminale, en me référant fréquemment à l'histoire des mathématiques. De nombreuses parenthèses et incidences sont greffées sur le tronc commun que je vais présenter, suivant le niveau de la classe et le projet pluridisciplinaire choisi avec les élèves : histoire des mathématiques dans l'Antiquité et au Moyen-Age, au 17$^{\text{ème}}$ siècle, étude du mouvement, étude des points de vue, la perspective linéaire de la Renaissance, etc…Le couronnement de cet enseignement centré sur la proportionnalité est pour moi l'invention, par la représentation géométrique, des nombres complexes en classe de Terminale, invention dans laquelle les élèves peuvent devenir partie prenante.

Entendre parler de grandeurs proportionnelles ne choque ni les élèves de 6$^{\text{ème}}$ ni ceux de Terminale ; répondre à la question de la signification est un autre problème. Après silences, essais et erreurs, la situation de proportionnalité qu'ils proposent le plus souvent est celle acquise en primaire :

- 1$^{\text{ère}}$ grandeur poids des pommes
- 2$^{\text{ème}}$ grandeur prix des pommes

Après avoir rappelé la nécessité de nommer les deux grandeurs considérées, je leur propose répétitivement , et ceci dans toutes les classes, la définition suivante : On dit que deux grandeurs sont proportionnelles si l'on multiplie toujours par le même nombre pour passer des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre, ce nombre s'appelant le coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs. Au lycée, est, bien sûr, introduite une définition " plus savante ".

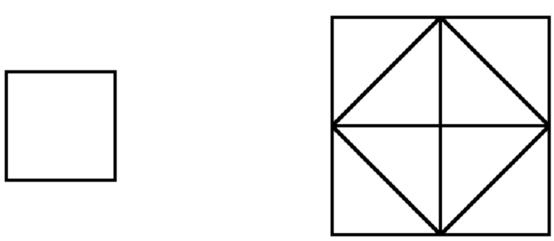
D'autre part, je donne souvent des notes sur 12, 13, 4….ce qui motive les élèves à écrire des proportions et à calculer la quatrième proportionnelle en utilisant la proportionnalité des grandeurs **note sur 20** et **note sur 13,** par exemple, une autre formulation étant la résolution d'une équation de la forme x/20 = 7/13.

I. TROIS GRANDS PROBLEMES DE L' ANTIQUITE

I.1. LA DUPLICATION DU CARRÉ

Un premier travail que je demande à mes élèves quelle que soit leur section (6$^{\text{ème}}$ à TS) est :
" Construire un carré d'aire double de celle d'un carré donné ". Cette question, posée en " narration de recherche "[1], produit souvent, en premier lieu, comme chez le jeune enfant ou esclave du dialogue du Ménon de Platon, le théorème implicite :
si l'on multiplie le côté d'un carré par 2, son aire est aussi multipliée par 2.

" Socrate : ne dis-tu pas que c'est à partir d'une ligne deux fois plus longue qu'on obtient un espace deux fois plus grand "[2]



[1] Cf revue Repères n° 12 et 39.
[2] Platon, Le Ménon 83a, trad. Monique Canto-Sperber, Paris, Flammarion 1993.

C'est déjà l'occasion de dire ou de rappeler que les deux grandeurs **aire du carré** et **côté du carré** ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

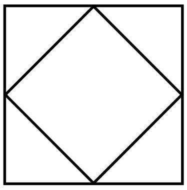
Après ce premier travail dont la durée peut aller de 1 heure à un trimestre, les élèves sont familiarisés avec la figure et la proportionnalité des grandeurs **aire du carré** et **aire de son dual**[3] avec comme coefficient de proportionnalité le nombre 2.

I.2. LA MESURE DU CERCLE

1.aire du disque

Le deuxième problème que je propose aussi à tous mes élèves est l'encadrement de l'aire d'un disque en fonction de son rayon. L'encadrement le plus simple est entre l'aire d'un carré circonscrit et celle de son dual. On obtient ainsi

$$2 \times r \times r \quad < \quad \text{aire du disque} \quad < \quad 4 \times r \times r$$
$$\text{ou } 2r^2 \qquad\qquad\qquad \text{ou } 4r^2$$



On peut réaliser l'expérience suivante avec les jeunes élèves, ou la raconter dans les classes supérieures, : mesures de volumes d'eau dans des cylindres de disques de bases différentes et de hauteur constante h.

R	3	4	5	6	7
R2	9	16	25	36	49
Volume	27h	49h	75h	110h	149h

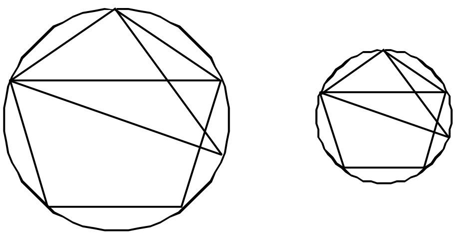
On obtient en moyenne comme coefficient de proportionnalité le nombre 3,1. Les élèves sont ainsi mis sur le chemin de l'hypothèse de proportionnalité des grandeurs **aire du disque** et **carré du rayon**.

Comme on le voit, le travail sur la proportionnalité implique l'étude des grandeurs et de leurs mesures. J'insiste sur la distinction entre objet géométrique, grandeur, mesure, nombre.

La conjecture de la proportionnalité des grandeurs **aire du disque** et **carré du rayon** ayant été faite, on peut entreprendre la lecture des propositions I et II du livre XII des Eléments d'Euclide. [4]

PROPOSITION I

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.

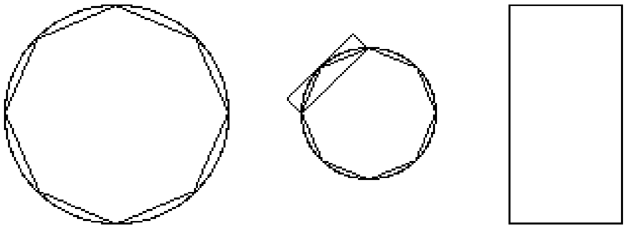


PROPOSITION II

Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.

[3] Dual signifie seulement ici la figure formée à partir des milieux des côtés d'un polygone

[4] Euclide , Les Eléments, Livre XII, trad. Peyrard, Blanchard 1906.



Leurs démonstrations complètes doit attendre les classes du lycée

A partir de la 5éme, nous lisons la proposition 2 de la mesure du cercle d'Archimède [5]

PROPOSITION II bis
Le rapport du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14.

et nous étudions la règle du neuvième des Egyptiens, qui , traduite en langage actuel s'écrit
aire du disque de diamètre d= $(d - 1/9\ d)^2$.

2. périmètre du cercle

Presque tous les élèves arrivent en $6^{ème}$ en confondant les notions d'aires et de périmètres. Ainsi, j'ai placé l'étude des périmètres après celui des aires, suivant en cela l'ordre d'étude des mathématiques grecques, la grandeur associée directement à une surface étant l'aire. Un travail sur la proportionnalité des grandeurs **périmètre P du carré** et **côté du carré** sert d'introduction : on peut écrire P/c=4 ou P=4xc et j'introduis le mot " rapport " sis au cœur de la notion de proportionnalité. Un travail répétitif sur les mots " rapport ", " fraction ", " quotient " peut se faire sur des tableaux de proportionnalité conduisant aux proportions :
P/P' = c/c' (1) et P/c = P'/ c' comme celui−ci:

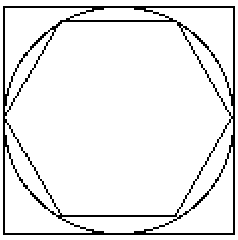
c	1	1,1	1,2	4	10
P	4	4,4	4,8	16	40

Avec la représentation graphique des variations de P en fonction des variations de c , les élèves s'imprègnent d'une image visuelle de la proportionnalité. Pour chaque expérience, l'aspect visuel de la proportionnalité et de la non−proportionnalité est mise en évidence sur des graphiques[6].

Il est plus facile , alors, d' aborder la proportionnalité des grandeurs **périmètre du cercle** et **diamètre du cercle,** elle peut être induite par l'expérience en utilisant des cylindres de révolution et des ficelles. Le coefficient moyen obtenu est là aussi 3,1, comme dans l'expérience sur les volumes.

Ce résultat empirique étant obtenu, les élèves peuvent démontrer un encadrement du périmètre P du cercle en fonction de son diamètre d à l'aide d'un hexagone régulier inscrit et d'un carré circonscrit. On obtient ainsi un encadrement du coefficient de proportionnalité

$$3 < \frac{P}{d} < 4$$



Laquelle proportionnalité était connue des Hébreux ; le coefficient utilisé étant 3.

---

[5] Archimède, La mesure du cercle, trad. Ver Eecke, Gauthier-Villars
[6] Le lien est étroit entre les fonctions polynômes de degré 1 : fonction linéaire et fonction affine et la proportionnalité , lien que les élèves de lycée devront avoir fait. J'insiste sur un des aspects du coefficient directeur d'une droite, l'aspect coefficient de proportionnalité des deux grandeurs **accroissement de la fonction affine** et **accroissement de la variable.**

" Il fit la mer(réservoir d'eau lustrale pour les ablutions des prêtres) en métal fondu, de dix coudées d'un bord à l'autre bord, à pourtour circulaire, de cinq coudées de hauteur, et un cordeau de trente coudées en mesurait le tour " [7]

Une fois que les élèves ont acquis les théorèmes de Pythagore et Thalès et les lignes trigonométriques l'encadrement peut s'améliorer, jusqu'à celui de la mesure du cercle d'Archimède et au-delà.

PROPOSITION III

Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie , mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre.

Autrement dit, le périmètre du cercle est égal à trois fois le diamètre plus une petite quantité; laquelle quantité est inférieure à la septième partie du diamètre et supérieure aux dix–soixante et onzièmes de ce diamètre

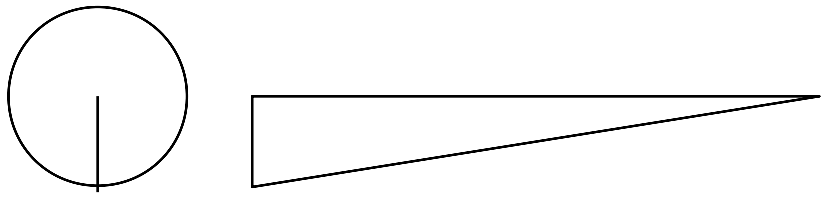
$$(3+\frac{10}{71})\times d < P < (3+\frac{1}{7})\times d$$

La démonstration de l'encadrement P / d , faite par Archimède, utilise des polygones réguliers inscrits et circonscrits jusqu'à 96 côtés : la proposition III peut être lue à partir de la $6^{\text{ème}}$, pour la démonstration , il faut attendre les deux dernières années du lycée. L'amplitude de l'intervalle peut être encore diminuée par rapport à celle d'Archimède en utilisant les lignes trigonométriques.

A partir de la $5^{\text{ème}}$, il est possible de leur dire qu'Archimède a démontré l'égalité des coefficients de proportionnalité $A / r^2 = P / d$ dans la proposition I de la mesure du cercle ; on peut leur faire construire, avant ou après cette lecture ou leur montrer dans les classes de lycée, les objets découpés dans du carton.
Cette proposition fait intervenir un triangle rectangle et un disque ; on peut vérifier expérimentalement la proposition par pesées ou par équilibres.

PROPOSITION IV

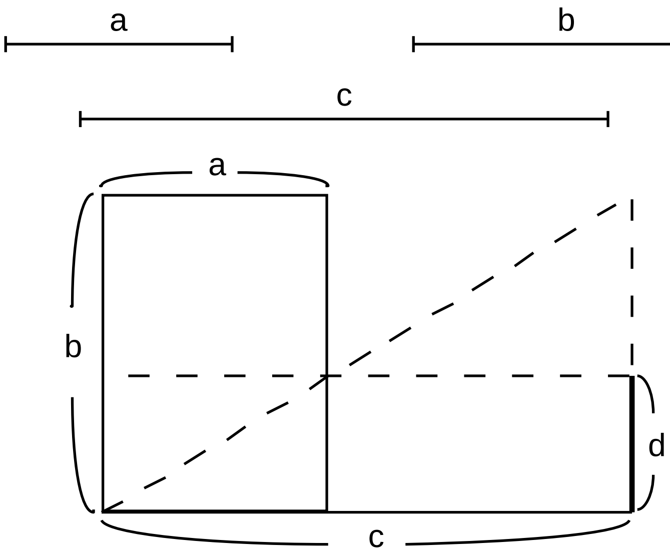
Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base



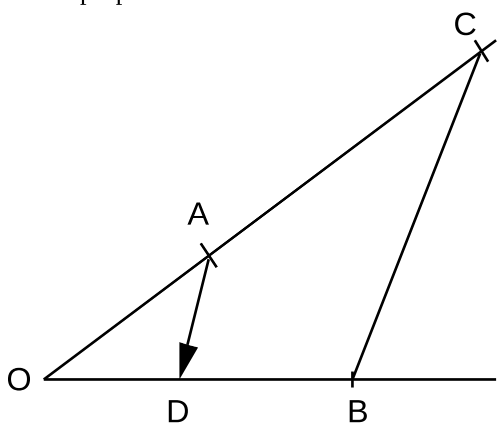
I.3. LA RECHERCHE DE LA QUATRIÈME PROPORTIONNELLE ENTRE TROIS GRANDEURS ET DE LA MOYENNE PROPORTIONNELLE ENTRE DEUX GRANDEURS

Je propose ce problème aux élèves à partir de la $6^{\text{ème}}$:
Construire sur un segment donné un rectangle de même aire qu'un rectangle donné.
Cette activité est reprise dans les années suivantes sous la forme:
Soit c la mesure du segment donné et a et b les mesures du rectangle donné, construire d, quatrième proportionnelle entre a, b, et c, autrement dit construire d tel que c soit à d comme a est à b.

[7] La Bible, Osty, 1. Rois 7.23, Seuil 1973.



Laquelle construction peut se faire en un autre temps à l'aide du théorème de Thalès comme chez Descartes[8] ou en utilisant systématiquement la théorie des proportions comme chez Arnauld[9]

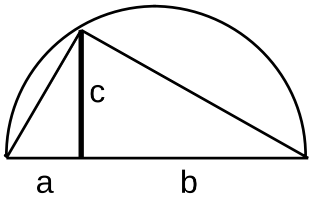


De même la construction d' un carré de même aire que celle d'un rectangle donné qui, en un premier temps peut se faire par la méthode des aires[10] conduit au problème suivant :

Soient a et b les mesures du rectangle donné, construire c, moyenne proportionnelle entre a et b en présentant les formulations équivalentes : a est à c comme c est à b ; a, c, b forment une suite géométrique; a/c = c/b

On peut utiliser le théorème:

Dans un triangle rectangle, la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.[11]



Une fois connue la notion de racine carrée, la proportionnalité des grandeurs **diagonale** et **côté du carré** me paraît essentielle.

$\sqrt{2} = 1,4142...$ $\qquad$ $D^2 / a^2 = 2$

Nous avons ainsi trois visages de l'objet dont un nom est ***racine de deux*** :

[8] Cf Brochure M:A.T.H. n°79 publiée par l'I.R.E.M. de Paris VII
[9] Cf Brochure M:A.T.H. à paraître décembre 2000
[10] cf Actes du colloque inter-irem épistémologie et histoire des mathématiques Lyon 1990
[11] démonstration à l'aide du théorème de Pythagore, à l'aide des triangles semblables ou à l'aide des lignes trigonométriques; les deux dernières reposant sur la proportionnalité.

nombre réel, que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut par un décimal
moyenne proportionnelle entre les entiers 1 et 2 ou nombre dont le carré est 2
coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs sus–nommées ou rapport entre la diagonale d'un carré et de son côté.

Une autre proportionnalité incontournable est celle des grandeurs **hauteur** et **côté du triangle équilatéral**.

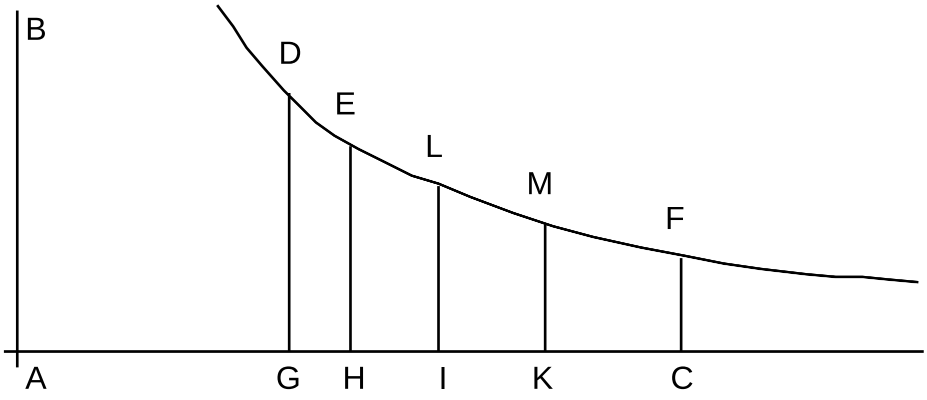
II. SUITE ARITHMETIQUE ET SUITE GEOMETRIQUE

Ce bain de proportionnalité fait de la $6^{ème}$ à la $1^{ère}$ permet d'introduire la fonction logarithme non pas seulement comme intégrale de la fonction 1/x qui s'annule pour x=1 mais de l'inventer comme solution de la quadrature de l'hyperbole équilatère par la démonstration du théorème : si les abscisses sont en suite géométrique, les aires correspondantes sous l'hyperbole sont en suite arithmétique .
Ce théorème fut démontré par Grégoire de Saint Vincent dans un ouvrage publié en 1647 et a servi à un de ses disciples à inventer ultérieurement la fonction logarithme ; les élèves de Terminale ont entre autres à lire la proposition 109 suivante qui conclut le travail de Grégoire de Saint–Vincent.[12]

[12] Travail décrit dans la revue Mnémosyne n°2, décembre 1992, publiée par le groupe M:A.T.H. de l'I.R.E.M. de Paris VII

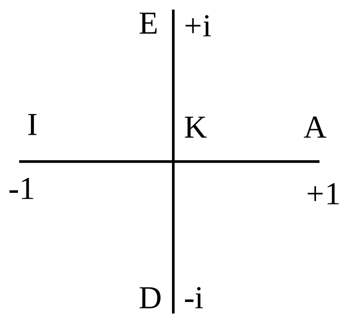
PROPOSITION 109

Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF. On divise AC de telle façon que AG, AH, AI, AK, AC soient en proportion continue et l'on pose GD, EH, LI, MK, FC équidistants de AB. Je dis que HD,IE,KL,CM sont des segments égaux.[13]



III. MOYENNE PROPORTIONNELLE , NOMBRE NEGATIF ET NOMBRE COMPLEXE

J'introduis le chapitre sur les nombres complexes en Terminale par la lecture du texte de Robert Argand, invention d'une construction géométrique des nombres négatifs comme des nombres complexes
Il a en effet fallu attendre l'année 1806 pour que les nombres imaginaires ne soient plus considérés comme des quantités " impossibles ".
Argand pose la question en ces termes : Chercher x tel que +1 soit à x ce que x est à +1 .
Il y répond en inventant une notion nouvelle:
-1 est, en valeur absolue, moyenne proportionnelle entre 1 et 1
et **moyenne en direction** entre +1 et +1
KI) étant considéré comme la bissectrice de l'angle de 360°.
+1 et –1 seront ainsi les deux moyennes proportionnelles entre +1 et +1.



Ce moment est très important; il y a rupture épistémologique entre ce que l'élève sait des nombres relatifs et la vision dynamique du relatif comme "moyenne en direction". Il est nécessaire à ce moment–là de faire une synthèse avec les élèves sur la notion de nombre.

Par analogie, Argand a ainsi inventé la représentation des moyennes proportionnelles entre +1 et –1 :
Cet objet mathématique devra être moyenne proportionnelle :
en valeur absolue entre +1 et -1
en direction la direction de +1 devra être à celle de cet objet ce que la direction de cet objet sera à –1.[14]
Sa représentation sera donc portée par la bissectrice d'un des deux angles orientés formés par KA) et KI)

[13] proportion continue autrement dit en suite géométrique
équidistants autrement dit parallèles; segment HD: ce trapèze semi–curviligne est nommé par sa diagonale.
[14] cf Images, imaginaires et imagination, publié par la commission épistémologie et histoire des mathématiques, Ellipses 1998.

IV. MODELE LINEAIRE

a) Nous avons déjà rencontré les équations de degré 1 dans le calcul de la quatrième proportionnelle entre 3 nombres. Certaines équations peuvent être proposées dès la $6^{ème}$ par exemple le problème n° 23 du papyrus égyptien du scribe Ahmès :

Une quantité, je lui ajoute son quart, j'obtiens 15. Quelle est cette quantité ?

Devant prendre le quart d'une quantité, une idée est écrite en premier dans le papyrus égyptien : soit 4 la quantité, je peux alors facilement calculer son quart : $\frac{1}{4}$ de 4 = 1   4+1=5 ; le nombre obtenu est 5.

Faisant une hypothèse implicite de proportionnalité entre les deux grandeurs quantité de départ et nombre obtenu, le scribe propose le calcul suivant

Quantité de départ	4	?
Nombre obtenu	5	15

15/5 = 3   4 * 3 = 12 ; on en conclurait que la quantité est 12. Le raisonnement se prolonge par :
si la quantité est 12 , son quart est 3   12 + 3 = 15, on a obtenu le bon nombre ; la supposition s'avère pertinente.[15].
Cette résolution de l'équation que nous écririons $x + \frac{1}{4}x = 15$ est appelé résolution par une méthode de fausse position.

b) L'hypothèse de proportionnalité apparaît dans la controverse entre Pascal et Fermat, comme dans les démarches d'élèves dans la résolution du problème des parties[16].

c) En "narration de recherche", nous avons posé le problème suivant
Un polygone à 4 côtés possède 2 diagonales
Un polygone à 5 côtés possède 5 diagonales.
Combien de diagonales possède un polygone à 6, 7, 8, 9, 10, 100côtés?

Les stratégies des élèves furent très diverses; dans de très nombreux travaux d'élèves nous avons rencontré pour le passage de 10 côtés à 100 côtés l'utilisation implicite de l'hypothèse de proportionnalité entre les grandeurs **nombre de côtés** et **nombre de diagonales.**

d) A travers le parcours présenté ci–dessus, nous n'avons rencontré que des situations mathématiques dans lesquelles nous avons étudié la proportionnalité entre des grandeurs homogènes. Or au cours de physique, les élèves rencontrent la proportionnalité entre grandeurs hétérogènes (**volume**, **masse**) , (**temps**, **distance parcourue**). Il me semble à propos de donner des exemples d'hypothèse de proportionnalité entre de telles grandeurs dans l'histoire qui se sont par la suite confirmées, infirmées, affinées. En voici un exemple tiré de la Physique d'Aristote[17]. Après lecture de la définition du mouvement par Aristote (Physique 200b12à25), les élèves eurent à extraire les théorèmes 1 et 2 du passage 215a25 à 216a16 et à préciser pour chacun quelles sont les grandeurs proportionnelles et la ou les grandeurs non variables .

La différence des milieux. Théorème 1
Soit donc un corps A transporté à travers B pendant le temps C et à travers D qui est plus subtil, pendant le temps E; si B est égal à D en longueur, le temps sera proportionnel à la résistance du milieu.

La différence des mobiles. Théorème 2
L'expérience montre que les corps dont la force est plus grande , soit en légèreté, toutes choses égales d'ailleurs quant aux figures, traversent plus vite un espace égal et dans la proportion que les grandeurs ont entre elles.

CONCLUSION

L'hypothèse de proportionnalité qui vient " spontanément " ?, " naturellement " ? à Aristote comme aux élèves relève-t-elle d'un usage de la raison pure au sens de Kant ? a priori ?(donc ce que l'on pourrait appeler catégorie de l'esprit humain) ou a posteriori (donc raisonnement issu de l'expérience) ?
La question reste ouverte et peut-être objet de débat avec les élèves.
Le " tout linéaire " rendrait les calculs plus simples ; mais quel être humain pourrait souhaiter cette monotonie à d'autres instants qu'à ceux de grande fatigue ?

---

15 Les comptes de Bastet, livret accompagnateur de la vidéo, I.R.E.M. de Toulouse
16 cf Brochure M:A.T.H. n° 69 publications I.R.E.M. Paris VII
17 Aristote Physique Les Belles Lettres