De la topographie à l'orientation :
entre proposition curriculaire et étude exploratoire

Floriane Wozniak
Université Lyon 1, LEPS, EA 4148, France
floriane.wozniak@iufm.univ-lyon1.fr

Résumé

Nous étudions la possibilité de favoriser l'apprentissage de savoirs spatiaux par des rapports pratiques effectifs au cours de la scolarité obligatoire[1] en France. Selon un abord fonctionnel, il s'agirait de tirer parti de la modélisation micro-spatiale pour appréhender les problèmes macro-spatiaux. Après une mise en perspective historique au travers de l'enseignement de la topographie, nous illustrons les potentialités des activités d'orientation en présentant des problèmes de mise en congruence, instrumentée par une boussole, de l'espace sensible avec une carte.

1. Introduction

Plusieurs considérations conduisent aujourd'hui à interroger le contenu mathématique enseigné au cours de la scolarité obligatoire. L'une d'entre elles est relative à la mise en adéquation des savoirs enseignés avec les besoins de connaissances des générations montantes (Chevallard, 1998). Nous nous inscrivons donc ici dans la perspective qui assigne à l'École l'objectif de prendre en charge les besoins de savoirs nécessaires à la maîtrise des pratiques sociales les plus largement partagées par l'ensemble des citoyens.

Parmi la foule des besoins de formation qu'il est possible d'identifier, les besoins de connaissances spatiales ont fait l'objet de travaux révélant que la « formation à l'espace » est en grande partie laissée au hasard du destin de chacun si l'on excepte la formation au micro-espace de la feuille de papier. Ainsi a-t-on pu noter (Pêcheux 1990, p. 294) :

> Si l'enfant accroît sa maîtrise de l'espace en résolvant des problèmes spatiaux, il paraît nécessaire d'examiner qui pose ces problèmes, et à quelles exigences l'enfant, selon son âge, est confronté. Nous retrouvons la question, que nous posions dans l'introduction, du minimum requis dans les conditions actuelles de vie. Il ne s'agit plus, depuis un temps certain, de chasser le gibier et de retrouver sa caverne ; il ne s'agit plus (et cela est d'apparition plus récente) que tout un chacun puisse se substituer à des spécialistes en espace, fût-ce pour l'aménagement d'une cuisine. […] L'aménagement et l'utilisation des espaces urbains excluent que les enfants s'y déplacent sans danger, donc qu'ils s'y déplacent seuls – et nous avons vu la contradiction que cela représente dans la mesure où ils apprennent mal à surmonter les difficultés s'ils sont en situation passive. Les seules interventions faisant intervenir l'espace qui soient réellement sanctionnées sont la lecture et l'écriture.

De leur côté, au terme d'un travail d'ingénierie didactique sur la mise en congruence, par des élèves[2] de CE2, d'un plan avec l'espace qu'il représente, Berthelot & Salin (2000) affirment la nécessité d'introduire explicitement à l'école primaire des objectifs relatifs à la connaissance du macro-espace :

[1] La scolarité est obligatoire en France pour les enfants entre 6 ans et 16 ans. Cela couvre l'école élémentaire (6-11 ans), le collège (11-15 ans) et, pour ce qui concerne l'enseignement général, la classe de seconde (15-16 ans).
[2] L'école élémentaire est constituée de 5 niveaux : CP, CE1, CE2, CM1 et CM2. Les élèves ont respectivement 6-7 ans ; 7-8 ans ; 8-9 ans ; 9-10 ans ; 10-11 ans.

Ce résultat nous permet de conclure qu'un apprentissage scolaire de l'orientation des plans, par rapport a la fois au repère personnel et aux lieux, est utile, et qu'il est souhaitable de le reprendre et de l'approfondir a chaque niveau de l'école primaire.

C'est ainsi que nous avons choisi de nous intéresser aux connaissances spatiales qui permettent à chacun de contrôler ses rapports à l'espace environnant ; en particulier, aux situations de repérage d'un objet dans l'espace.

1. Les mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire

Une étude à travers programmes et manuels de mathématiques des pratiques scolaires du repérage au cours de la scolarité obligatoire (Wozniak, 2000) permet de mettre en évidence, à côté de la construction de figures satisfaisant à un ensemble donné de conditions, des pratiques variées de repérage d'un objet : codage et décodage d'un déplacement, tracé de chemin dans un labyrinthe, usage du quadrillage pour agrandir, réduire ou transformer une figure, lecture et construction de plans, repérage sur une droite et dans le plan, représentation graphique des fonctions dans un repère cartésien, usage des coordonnées géographiques sur la sphère[3].

Cependant, les pratiques de repérage d'un objet à partir d'informations sur cet objet ne sont présentes, dans la scolarité obligatoire, que de façon parcellaire et occasionnelle sans être identifiées comme problème à étudier de manière spécifique. Dès lors, l'étude des techniques permettant le repérage apparaît comme apportant une réponse à une question qui n'a pas été posée.

En réalité, les élèves abordent les problèmes du repérage comme une occasion de travailler des techniques d'emploi de systèmes de repérage – quadrillage, coordonnées sur une droite, le plan, voire la sphère –, tandis que la question du choix d'un tel système, ou encore les difficultés liées à la mise en congruence dans l'utilisation des cartes, ne sont pas interrogées.

Le quadrillage joue un rôle central comme système de repérage à l'école primaire mais s'efface au collège. C'est cependant par le tableau à double entrée que tout commence. Introduit dès l'école maternelle il apparait comme un instrument d'organisation spatiale dans l'espace bidimensionnel de la feuille de travail d'objets non spatiaux.

Progressivement, l'identification entre tableau à double entrée et quadrillage s'opère : le cheminement suivi va alors de l'abstrait des concepts au concret du micro-espace. Le quadrillage organisateur de l'espace se fait outil efficace pour tracer, reproduire, agrandir, réduire, transformer des figures. La multiplicité des activités recourant au quadrillage va contribuer à asseoir la routine puis à naturaliser le repérage à l'aide d'un quadrillage, qui apparaît ainsi comme l'ostensif emblématique du repérage[4].

Le fait essentiel en matière de repérage dans la scolarité obligatoire est la restriction des pratiques au seul micro-espace de la feuille de papier : tout ce qui relève du repérage d'objets du macro- ou du méso-espace a peu de place à l'école et, en particulier, est inexistant dans la classe de mathématiques. On retrouve ici une contrainte écologique fondatrice de l'ordre didactique-scolaire : la réduction chirographique de l'activité de l'élève, son enfermement dans l'univers des signes que la main peut tracer sur la feuille de papier.

L'univers des objets et des questions sur lesquels l'École propose de travailler se trouve ainsi resserré autour des problèmes qui peuvent survivre à ce repliement sur le micro-espace de la feuille de travail. En conséquence, la question du repérage dans les espaces sensibles autres, et en particulier dans le macro-espace, ne fait que rarement l'objet de rapports effectifs.

[3] Il s'agit là d'une « liberté » que se sont donnés beaucoup d'auteurs de manuels de mathématiques, l'étude de la sphère étant inscrite au programme de la classe de 3e (dernière année du collège qui en comporte 4 : 6e, 5e, 4e et 3e ; les élèves ont respectivement 11-12 ans, 12-13 ans, 13-14 ans, 14-15 ans).

[4] Ce qui ne signifie pas, bien entendu, que le quadrillage est l'ostensif du seul repérage…

Si, aujourd'hui, certains des « ingrédients » techniques et technologiques du repérage sont effectivement présents dans la scolarité obligatoire, la problématique du repérage y reste durablement occultée. L'espace « géométrique » – à deux ou à trois dimensions – ne renvoie dans la classe de mathématiques qu'au micro-espace de la feuille de papier, sans que la question de la modélisation des espaces sensibles ne soit jamais réellement abordée, si l'on excepte le cas des coordonnées géographiques.

L'utilisation précoce et systématique d'un repère « tout fait » amène à perdre de vue ce fait essentiel : repérer, c'est mesurer une distance ou un angle. Le rapide portrait des mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire que nous venons de brosser conduit alors à envisager, dans une perspective de recherche, le problème de l'introduction, dans la scolarité obligatoire, de l'étude de l'espace topographique, et cela par le biais des problèmes de l'orientation.

2. Une tradition séculaire : la topographie à l'école

2.1. Une science citoyenne et un long compagnonnage

Longtemps, les programmes de mathématiques firent une place obligée à ces « savoirs de l'espace » que, selon les contextes et les centres d'intérêt, on nommait arpentage, levé de plan, ou topographie, et dont la responsabilité de la diffusion par l'école fut longuement confiée aux professeurs de mathématiques[5].

À plus d'un titre, ce que nous nommerons indistinctement la topographie apparaît comme une science « citoyenne ». Dans le second de ses cinq Mémoires sur l'instruction publique, intitulé De l'instruction commune pour les enfants, Condorcet (1791, p. 81) indique d'abord :

> Le premier degré d'instruction commune a pour objet de mettre la généralité des habitants d'un pays en état de connaître leurs droits et leurs devoirs, afin de pouvoir exercer les uns et remplir les autres, sans être obligés de recourir à une raison étrangère. Il faut de plus que ce premier degré suffise pour les rendre capables des fonctions publiques auxquelles il est utile que tous les citoyens puissent être appelés, et qui doivent être exercées dans les dernières divisions territoriales.

Cette instruction pour tous les citoyens, qui commencerait vers 9 ans, durerait quatre ans. Or, dans le programme d'études de la troisième année, Condorcet fait une place de choix aux savoirs topographiques (op. cité, p. 98-99) :

> Des notions de géométrie, on s'élèvera aux éléments de l'arpentage, qu'on développera suffisamment pour mettre en état d'arpenter un terrain, non par la méthode la plus commode et avec les simplifications usitées dans la pratique, mais par une méthode générale dont on puisse difficilement oublier les principes ; en sorte que le défaut d'usage n'empêche pas de pouvoir l'employer lorsqu'on en aura besoin.

L'instruction topographique souhaitée, on le voit, n'est pas une fiction chirographique, mais vise la maîtrise des rapports effectifs entre le modèle dessiné et l'espace sensible modélisé. Cette approche de l'enseignement est d'ailleurs reprise par Fortoul lorsqu'il publie en 1854 les instructions relatives à la mise en œuvre du nouveau plan d'études arrêté en août

[5] Les trois expressions mentionnées sont utilisées comme des quasi-synonymes. Le dictionnaire Hachette de la langue française (1980) définit ainsi l'*arpentage* comme « l'évaluation de la superficie d'un terrain », et l'arpenteur comme le « spécialiste du relèvement des terrains et du calcul des surfaces». Le même ouvrage précise que le *levé de plan* consiste en « l'ensemble des opérations de mesure nécessaires à l'établissement d'un plan », ajoutant que la *topographie* a pour but « la description détaillée d'un lieu », la « représentation graphique d'un lieu avec indication de son relief ».

1852. Ainsi, en classe de troisième de la section des sciences[6], au titre des « applications de la géométrie élémentaire », le programme inclut-il le levé de plans, dans les termes suivants :

1, 2. Tracé d'une droite sur le terrain. – Mesure d'une portion de droite au moyen de la chaîne. – Levé au mètre. – Tracé des perpendiculaires. – Usage de l'équerre d'arpenteur. – Mesure des angles au moyen du graphomètre. – Description et usage de cet instrument. – Rapporter le plan sur le papier. – Échelle de réduction. »

3. Levé à la planchette.

4,5. Déterminer la distance à un point inaccessible ; la distance entre deux points inaccessibles. – Prolonger une ligne droite au-delà d'un obstacle qui arrête la vue.

Par trois points donnés, mener une circonférence, lors même qu'on ne peut approcher du centre.

Trois points, A, B, C, étant situés sur un terrain uni et rapportés sur une carte, déterminer, sur cette carte, le point P d'où les distances AB et AC ont été vues sous des angles qu'on a mesurés.

6. Notions sur l'arpentage. – Cas où le terrain serait limité, dans une de ses parties, par une ligne courbe.

En classe de seconde, alors que « trois leçons seront consacrées à donner les premières notions sur le nivellement et ses usages », la question du levé de plans est reprise avec d'autres outils en trigonométrie : ainsi, étudie-t-on l'application « de la trigonométrie aux différentes questions que présente le levé des plans », questions qui « ont été énoncées dans le programme de géométrie ».

Les programmes de l'enseignement scientifique des lycées de mars 1865 prévoit encore, en Seconde, et en géométrie, l'étude des « Notions sur le levé des plans et l'arpentage. Levé au mètre. Levé au graphomètre. Levé à l'équerre d'arpenteur. Levé à la planchette ». En classe de mathématiques élémentaires, c'est la trigonométrie qui apporte son concours :

> Application de la trigonométrie à diverses questions que présente le levé des plans : distance à un point inaccessible. Mesure des hauteurs. Trois points, A, B, C, étant donnés sur un plan, déterminer un quatrième point d'où les distances AB et AC ont été vues sous des angles qu'on a mesurés.

Cependant, les concepteurs des programmes ne mésestiment pas les difficultés à faire vivre de manière effective ces savoirs topographiques[7] :

> On conçoit qu'à moins de circonstances exceptionnelles, le professeur de mathématiques ne pourra pas conduire tous ses élèves dans la campagne pour leur faire faire les exercices d'arpentage qui doivent compléter son cours ; mais le jeudi, toutes les fois que le temps le permettra, on emploiera quelques heures sur le terrain aux opérations pratiques.

Les changements de programmes qui vont se succéder dans la deuxième moitié du XIX^e^ siècle ne modifient guère le tableau que nous avons tracé jusqu'ici. Le programme des classes de lycée de 1874 fait étudier les notions d'arpentage dès la Troisième, et complète ce premier apprentissage en Seconde[8]. En 1880, paraissent de nouveaux programmes de sciences de l'enseignement secondaire classique : la familiarisation avec la règle d'arpenteur se fait maintenant dès la 5e, où les élèves découvrent « comment on mesure une droite sur le terrain » et « comment on évalue la surface d'un terrain ».

En 1882, sous l'autorité de Jules Ferry encore, les nouveaux programmes de sciences de l'enseignement secondaire spécial abandonnent l'ancienne organisation en « cercles concentriques » pour une organisation progressive sur l'ensemble du cours d'études : l'arpentage apparaît en seconde année, toujours en géométrie, et se complète en quatrième

[6] La réforme Fortoul institue le régime dit de la *bifurcation* : pour concilier la tradition « humaniste » et les exigences des grandes écoles, on organise, après la 4e, une dualité d'enseignements, avec une *section des lettres* et une *section des sciences*. Sur cette réforme, voir Hulin-Jung (1989).

[7] Commentaire issu du programme de l'enseignement secondaire spécial paru en avril 1866.

[8] Les élèves apprennent le levé au mètre, le levé à l'équerre, le levé au graphomètre, le levé à la planchette, le nivellement, le niveau d'eau, la mire, la cote d'un point, les courbes de niveau, la lecture d'une carte topographique.

année dans le cadre du cours de trigonométrie (hauteur d'une tour dont le pied est accessible, hauteur d'une montagne, distance d'un point accessible à un point inaccessible, mais visible, distance de deux points inaccessibles), la lecture des cartes topographiques relevant alors de la géométrie descriptive.

En 1891, l'enseignement secondaire *spécial*, devenu enseignement secondaire *moderne*[9], est doté de nouveaux programmes qui font commencer l'étude de la topographie en 3e (en géométrie), aborder les problèmes de trigonométrie en Seconde, avec des notions sur la *triangulation*, et réserve le levé de plans, la planimétrie, le nivellement pour la Première, avec l'usage des instruments – rubrique qui fait l'objet, entre parenthèses, de cette mention sobrement ambiguë : « exécuter sur le terrain, s'il y a possibilité ».

Les éléments de topographie sont ainsi un contrepoint de tous les programmes scientifiques qui se sont succédé dans la deuxième moitié du XIXe siècle. Pourtant, la longue histoire du compagnonnage de l'enseignement des mathématiques avec les savoirs topographiques se termine : les programmes de 1925 et les programmes suivants seront muets à leur propos. Au travers de cette présentation à grands traits de l'enseignement de la topographie, nous retrouvons un phénomène de transposition didactique qu'Yves Chevallard (1991) appelle l'obsolescence des savoirs :

> Les objets d'enseignement sont victimes du *temps didactique*, ils sont soumis à une érosion, à une usure « morales », qui impliquent au cours d'un cycle d'étude leur *renouvellement*. On peut donner le nom d'*obsolescence interne* ou *relative*, à ce phénomène d'usure, intérieure à *un cycle d'enseignement*, pour l'opposer à l'obsolescence *externe*, ou *absolue*, relativement à la société ambiante.

La topographie, science « citoyenne » dans la France de la fin du XVIIIe siècle parce qu'elle permet à la République naissante de s'ancrer sur un territoire est devenue au début du XXe siècle un savoir obsolète dont la raison d'être de son enseignement s'est progressivement perdu au fil du temps.

2.2. Problèmes classiques

La topographie, qui repose sur le levé de plan, nécessite le repérage de lieux premiers à partir desquels le repérage d'autres lieux est possible. La planimétrie qui vise à établir la projection horizontale voulue, a pour opérations fondamentales la détermination d'une droite – c'est-à-dire la détermination d'un alignement –, la mesure d'une longueur, la mesure d'un angle. Ainsi, les problèmes soulevés par l'espace topographique peuvent être résolus par des techniques de « calcul graphique », dont la technologie est à chercher dans la géométrie élémentaire. Il s'agit alors de déterminer graphiquement une distance grâce à la représentation à une échelle arbitraire des dimensions d'un modèle géométrique de la situation. Mais ces problèmes peuvent aussi se résoudre par le « calcul arithmétique » que la trigonométrie permet.

Un genre de tâches classique est la détermination d'une hauteur. Il se décline en divers types de tâches suivant que le pied de cette hauteur est accessible ou non comme l'illustre les figures 1 et 2.

Supposons ainsi que l'on veuille déterminer la hauteur d'un édifice du pied duquel on peut approcher[10]. On mesure la longueur AD = CE (figure 1). En [CD] est placé un graphomètre, dont on connaît la hauteur, afin de mesurer l'angle $\widehat{ECB}$. La hauteur de la tour est égale à la hauteur DC du graphomètre ajoutée à la longueur EB, qui peut être connue par calcul graphique (on reproduit à une échelle arbitraire le triangle ECB rectangle en E, dont on

[9] C'est dans le cadre de cette réforme que l'appellation de « classe de rhétorique » est changée en « classe de première ».
[10] Nous suivons ici F. J. 1890, p. 95-103.

connaît un côté et un angle non droit : la mesure de EB sur le dessin divisée par l'échelle donne la hauteur de la tour) ou par la trigonométrie (on a EB = EC $\times$ tan $\widehat{ECB}$).

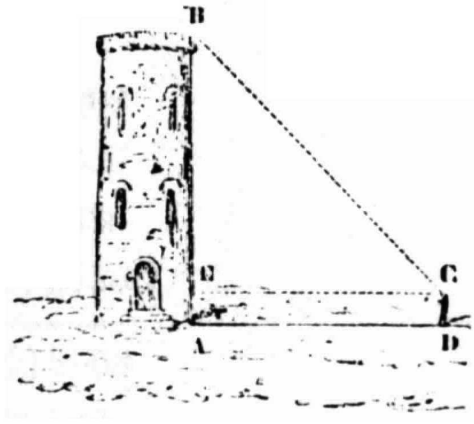


Figure 1
F. J. 1890, p. 95

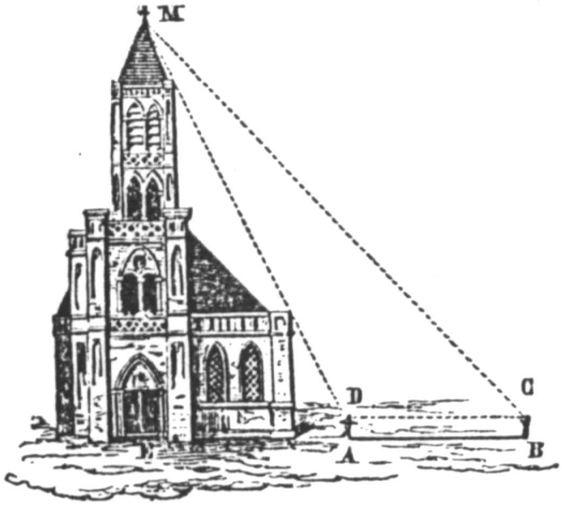


Figure 2
F. J. 1890, p. 96

Soit ensuite à déterminer une hauteur dont le pied est inaccessible (figure 2). On mesure la distance AB = CD et les angles $\widehat{MCE}$ et $\widehat{MDE}$, où E est l'intersection de (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par M. Le calcul graphique donne la hauteur cherchée : dans le triangle MDC dont on connaît la mesure d'un côté et les angles, on calcule ME à partir de sa valeur mesurée sur le dessin ; en lui ajoutant à la hauteur AD = BC du graphomètre, on obtient la hauteur de la tour. Le calcul trigonométrique nécessite de considérer deux triangles successivement. Dans le triangle MCD on connaît les trois angles et le côté CD : on peut donc calculer MD. Le triangle MED rectangle en E, dont on connaît alors l'hypoténuse et les angles non droits, donne ME, et, par suite, la hauteur de la tour.

Considérons maintenant le problème consistant à mesurer une montagne (figure 3). On prend une base [AB] quelconque, et on mesure les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MBA}$. Par le calcul graphique ou le calcul trigonométrique, on connaît alors MA. Par ailleurs, on mesure l'angle $\widehat{MAE}$ que fait (MA) avec la verticale (AE) : dans le triangle MAN rectangle en N, on connaît donc l'hypoténuse et un angle adjacent : on en déduit MN, qui est la hauteur demandée.

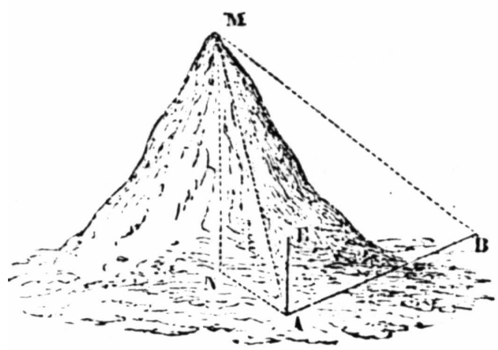
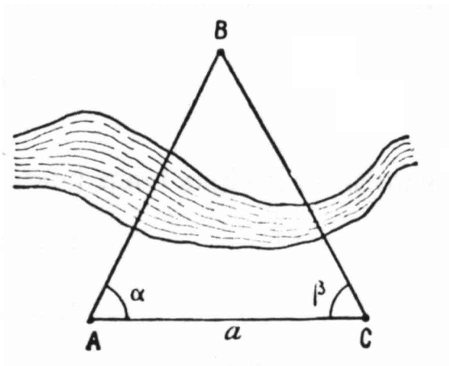


Figure 3.
F. J. 1890, p. 97

Un second genre de tâches est la détermination de la distance entre deux points. Pour déterminer la distance d'un point A à un point B inaccessible (figure 4), on mesure AC et les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB}$. Le calcul graphique de AB est alors immédiat. Pour déterminer la distance de 2 points inaccessibles M et N (figure 5), on peut mesurer AB, ainsi que les angles $\widehat{BAM}$, $\widehat{BAN}$, $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ABN}$. Le calcul graphique repose ici sur la construction de deux triangles ABM et ABN de base [AB], pour chacun desquels on connaît la mesure des angles adjacents. Pour le calcul trigonométrique, on doit « résoudre » trois triangles pour calculer successivement AM (triangle MAB), AN (triangle ABN), et, finalement, MN (triangle AMN).



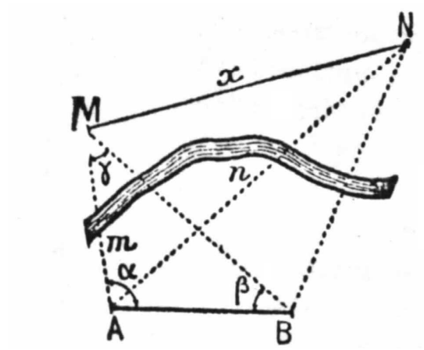
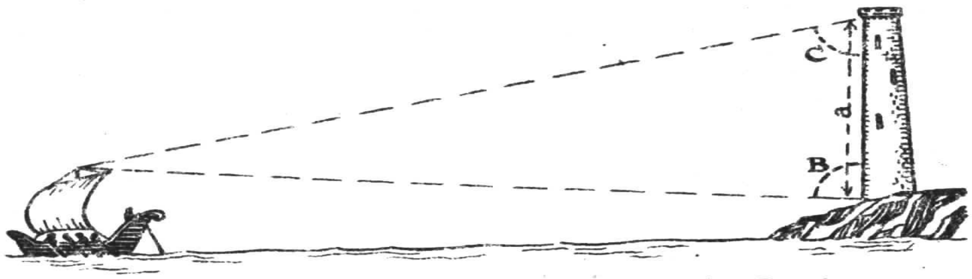


Figure 4
Chenevier 1934, p. 195

Figure 5
Lebossé et Hémery 1947, p. 234

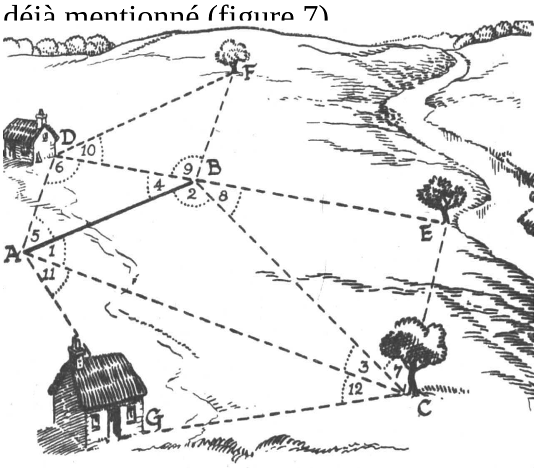
D’autres problèmes comme le calcul du rayon d’une enceinte circulaire dans laquelle on ne peut pénétrer, ou la mesure de la largeur d’une rivière peuvent être traités comme les précédents : tous ces problèmes se ramènent finalement à une ou plusieurs résolutions de triangles. Pour lever un triangle, il suffit ainsi d’avoir mesuré ses côtés, ou deux côtés et l’angle qu’ils déterminent, ou un côté et deux angles. Ainsi, pour déterminer la position d’un bateau vu d’un phare il suffit de mesurer deux angles dès lors que l’on connaît la hauteur du phare (figure 6).



UN USAGE PRIMITIF DE LA RÈGLE (C), ATTRIBUÉ A THALÈS

Figure 6
Hogben 1950, p. 119

Le levé de plan quant à lui se ramène au levé de triangles, comme le précise un auteur déjà mentionné (figure 7).



— TRIANGULATION POUR UN ÉLÉMENT DE CANEVAS GÉOGRAPHIQUE.

Pour lever le plan d’une région, le géomètre mesure d’abord exactement une distance déterminée AB avec sa chaîne d’arpenteur ou décamètre. C’est la seule mesure de longueur qui soit nécessaire. De l’extrémité A de la ligne AB, il repère avec son théodolite l’angle (1) entre B et C, C étant un objet bien visible tel qu’un arbre. Puis marchant jusqu’à l’autre extrémité de AB, il repère l’angle (2) entre A et C. Il connaît maintenant un côté (AB) et deux angles du triangle ABC. De sorte qu’il peut calculer les longueurs de BC et de AC au moyen de la formule du sinus et des tables de sinus. Ces deux procédés peuvent être employés tour à tour pour obtenir les côtés des triangles BEC et AGC. A cet effet, il repère d’abord l’arbre E qui fait l’angle (8) entre E et C, puis l’angle (7) entre B et E. Il connaît alors deux angles du triangle BEC et la longueur de BC obtenue par le calcul. De même, il repère G de A et de C. En continuant ainsi, il repère dans d’autres directions la ferme D et l’arbre F de A et de B, achevant ainsi le canevas de la région considérée.

Figure 7
Hogben 1950, p. 254

3. Enseigner l'orientation ?

Nous l'avons suggéré, l'enseignement mathématique a évolué tout au long du XX^{e} siècle vers une réduction chirographique des savoirs topographiques. Quelle proposition curriculaire peut-on faire alors qui permette tout à la fois de répondre aux besoins de formation des citoyens, tout en favorisant l'apprentissage de savoirs spatiaux par des rapports pratiques à l'espace sensible ? Nous faisons le pari didactique que les problèmes relatifs à l'orientation – entendue comme capacité à déterminer avec précision une position en fonction d'autres lieux qui constituent alors un système (local) de repérage – peuvent relever un tel défi. Organisation de savoir dont le « cœur mathématique » est la question du repérage, l'orientation participe du monde des savoirs topographiques qui permettent de repérer sa position, de trouver son chemin, d'en évaluer la longueur, d'en connaître le profil, etc.

Ce choix, qui est d'abord celui d'une hypothèse de travail, se distingue d'autres choix *a priori* possibles. L'univers des loisirs, qui remplit une part croissante de l'activité de chacun, constitue un point d'appui possible de la formation scolaire, par les compétences que certaines activités de loisir requièrent et diffusent, sans en être pourtant l'unique habitat dans l'ensemble des pratiques sociales.

Dans ces conditions, l'orientation apparaît comme un choix légitime : l'accès en est quasi immédiat et universel, la sophistication technique peut y être maintenue à des niveaux aussi humbles qu'on peut le souhaiter pour des raisons didactiques par exemple, le marquage culturel en reste encore très limité.

D'autre part, par delà l'objectif particulier d'une meilleure régulation des usages dominicaux des espaces naturels, l'étude scolaire de l'orientation, comme la pratique du déplacement dans le macro-espace qu'elle suppose, paraît de nature à diffuser dans la société une sensibilité à l'espace et une culture de l'espace susceptibles d'améliorer sensiblement nombre de pratiques sociales de masse, y compris en milieu urbain.

Avant d'envisager plus loin la pertinence au plan curriculaire de l'introduction dans la scolarité obligatoire des éléments de l'orientation, nous explorerons quelques uns des problèmes qu'elle à charge de résoudre[11].

3.1. Les problèmes de l'orientation

Comment, ainsi, mesurer les distances à l'aide d'une carte topographique ? Sur terrain plat, il suffit de recourir à l'échelle : on retrouve alors un problème classique, qui relève de la proportionnalité. En revanche, sur un terrain avec relief, on doit recourir aux courbes de niveau (figures 10 & 11)[12].

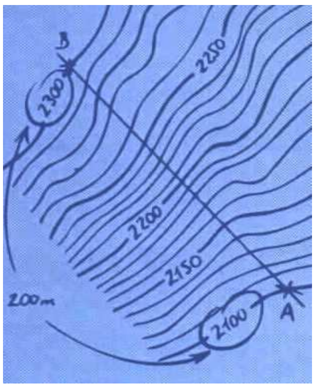


Figure 10

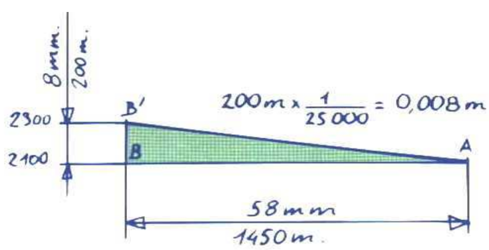


Figure 11

[11] Dans ce qui suit, on utilise principalement les ouvrages suivants : Esclasse (2000), Lamory (1996), Lord et Pelletier (2000).
[12] Dans un souci de lisibilité, certaines des figures qui suivent ont été légèrement retouchées.

Lamory 1996, p. 40 Lamory 1996, p. 40

On reporte sur une feuille (figure 11) la mesure de la distance « à vol d'oiseau » entre deux points A et B. Perpendiculairement à [AB], on trace un segment [BB'] d'une longueur représentant la dénivelée, c'est-à-dire la différence d'altitude entre les deux points A et B, laquelle s'obtient en comptant le nombre de courbes de niveau entre ces deux points et en le multipliant par la distance commune entre courbes de niveau successives. La distance AB' représente alors la distance effectivement parcourue (ou à parcourir).

On peut encore calculer l'inclinaison du trajet, qui correspond à l'angle formé par la pente avec l'horizontale, en l'exprimant en degrés ou en pourcentage : un angle de 45° correspond ainsi à une dénivelée égale à la distance horizontale, et on définit alors l'inclinaison par la formule $\frac{\text{dénivelée}}{\text{distance horizontale}} \times 45°$ (où dénivelée et distance horizontale sont exprimées en une même unité). Pour calculer l'inclinaison en pourcentage il suffit de remplacer 45° par 100 % dans la formule précédente.

L'usage d'une carte exige qu'elle soit orientée, c'est-à-dire mise en correspondance avec l'espace représenté. Pour ce faire (figure 12), on peut utiliser la technique d'alignement visuel de lieux premiers : si les points A et B sont vus « l'un par l'autre » depuis un point P (c'est-à-dire si, se situant en P, on ne voit qu'un seul point), alors l'angle $\widehat{APB}$ est nul et les points sont alignés.

On peut aussi utiliser une boussole[13]. Dans ce cas (figure 13), il suffit que l'aiguille aimantée de la boussole et le nord de la carte coïncident. Pour ce faire, on aligne la flèche de direction avec le nord de la carte et on fait pivoter solidairement boussole et carte jusqu'à ce que l'aiguille aimantée s'aligne avec la flèche de direction.

Figure 12
Lamory 1996, p. 76

Figure 13
Lamory 1996, p. 82

Supposons maintenant que nous nous trouvions à la croisée de plusieurs chemins. Comment déterminer le chemin à prendre sachant que l'un d'entre eux ne figure pas sur la carte ? Il suffira de relever l'azimut[14] de ce chemin sur la carte et de le reporter sur le terrain pour avoir la réponse. Cela étant, supposons que, ayant cheminé au hasard, on veuille situer sa position sur la carte. À nouveau il suffira de relever l'azimut d'au moins deux repères assez éloignés l'un de l'autre et de les reporter sur la carte : l'intersection sur la carte des deux droites obtenues donne la réponse. Par mesure de sécurité, on peut relever un troisième repère : dans ce cas, compte tenu de l'approximation des mesures, les trois droites ne seront

[13] La boussole indique le nord magnétique qui, en France, est distinct de 2° environ du nord géographique. La déclinaison magnétique peut donc être regardée comme négligeable si le repérage porte sur de courtes distances et n'exige pas une grande précision, ce qui est *grosso modo* le cas en balade ou en randonnée pour des débutants.
[14] L'azimut est l'angle formé entre le nord de la carte (nord géographique) et une autre direction.

pas concourantes mais formeront un triangle dans lequel se situe le randonneur. Cette technique permet de définir davantage une zone de station plutôt qu'un point. Bien entendu, dans le cas où l'on se trouverait sur une ligne de progression naturelle (chemin balisé, crête, etc.), il suffirait de relever l'azimut d'un seul repère : son report sur la carte permet d'obtenir l'intersection avec la ligne de progression qui y figure par avance.

La boussole ne sert pas seulement à orienter une carte : elle est un instrument précieux de mise en relation de l'espace sensible avec la carte. À cet égard, quatre types de tâches apparaissent comme premiers, en ce sens qu'ils interviennent dans l'accomplissement – par les techniques classiques dans le domaine – de la plupart des tâches d'orientation.

Figure 14
Lamory 1996, p. 88

Le premier type de tâches est *le relevé d'un azimut sur la carte* (figure 14). Dans ce cas, la boussole s'utilise comme un rapporteur dont le zéro coïncide avec le nord indiqué sur le cadran gradué. Le bord du plateau de la boussole (donc la flèche de direction) est aligné avec la direction dont on veut mesurer l'azimut. On aligne le nord du cadran gradué de la boussole et le nord géographique indiqué par la carte : l'angle que forme alors le nord de la boussole (identique à celui de la carte) avec la flèche de direction est l'azimut.

Il convient alors de *reporter l'azimut sur le terrain* (figure 15). Il faut pour cela ajuster le cadran gradué de façon que la flèche de direction indique la valeur de l'azimut à reporter (ce qui est automatiquement réalisé si l'on vient de relever l'azimut sur la carte). Il suffit ensuite de faire pivoter la boussole (en la maintenant horizontale) afin que l'aiguille aimantée et la flèche d'orientation soient en correspondance : la flèche de direction (ou ligne de visée) indique la direction cherchée. Pour *relever un azimut sur le terrain* (figure 16) qui constitue le 3e type de tâche, on fait d'abord coïncider la flèche de direction avec la direction visée ; il suffit alors de faire tourner le cadran gradué de manière que l'aiguille aimantée se superpose avec la flèche d'orientation : l'angle formé par les flèches de direction et d'orientation est l'azimut.

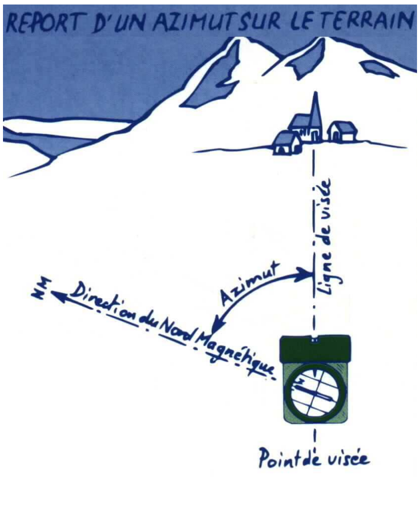


Figure 15

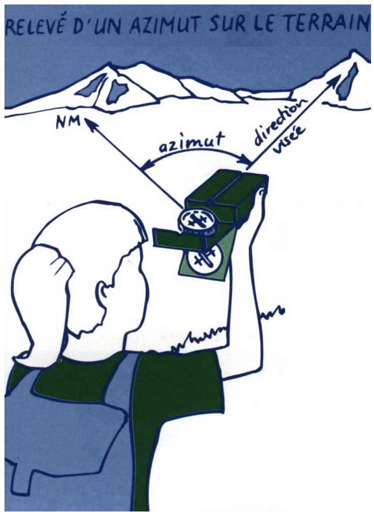


Figure 16

Lamory 1996, p. 88 Lamory 1996, p. 88

Enfin, le 4e type de tâche est le *report d'un azimut sur la carte* (figure 17). La boussole est utilisée comme un rapporteur. On ajuste le cadran gradué de façon que la flèche de direction indique la valeur de l'azimut à reporter (ce qui est déjà fait si on vient de relever l'azimut sur le terrain), il suffit ensuite d'aligner le nord du cadran gradué de la boussole avec le nord de la carte. La flèche de direction indique la direction désirée.

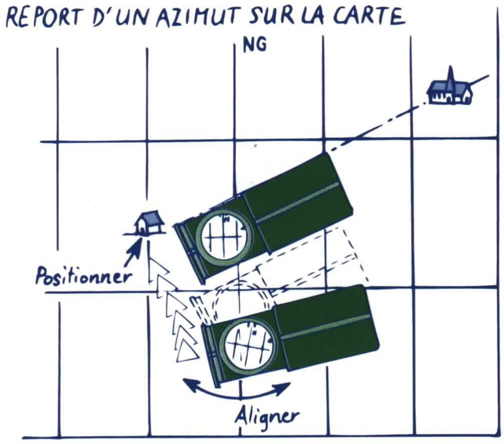


Figure 17
Lamory 1996, p. 90

Ainsi, pour s'orienter dans un espace topographie à l'aide d'une carte, il faut être capable de repérer sa position ou trouver son chemin. La mise en congruence (Berthelot & Salin, 1992) s'avère alors un type de tâche essentiel. Si l'alignement visuel de lieux premiers peut être une première technique rudimentaire et efficace, elle n'est pas toujours aisée à mettre en œuvre. Les exemples qui précèdent illustrent ainsi quelques unes des techniques de mise en congruence instrumentée par la boussole : relevé et report d'azimut sur la carte ou le terrain.

3.2. Un problème d'évolution curriculaire

Nous l'avons vu, les problèmes de l'orientation s'inscrivent dans l'histoire des savoirs mathématiques scolaires. Contre l'évolution du repliement disciplinaire qui s'est opéré progressivement ces dernières années, l'introduction des savoirs topographiques de l'orientation ne peuvent s'envisager que de manière concertée avec d'autres disciplines d'enseignement – géographie, EPS, etc.[15]

En EPS, par exemple, dans la continuité de ce qui a été amorcée à l'école élémentaire[16], la question de l'orientation est évoquée dans les accompagnements des programmes au travers de *la course d'orientation* présentée comme une activité possible en 6e parmi les activités de plein air envisageables à ce niveau. Voici la définition qui en est donnée :

> Faire de l'orientation, c'est réaliser un déplacement finalisé (je viens de..., je suis à.., je vais à...) en terrain plus ou moins inconnu et complexe, à l'aide d'un document de référence (plan, carte, roadbook), et éventuellement à l'aide d'une boussole.

[15] Analysant les pratiques scolaires d'EPS (éducation physique et sportives), M.-G. Pêcheux note par exemple (*op. cit.*, p. 267) : « au niveau du groupe pourront être travaillés des alignements, à une ou deux dimensions, et des transformations de ceux-ci, qui sont de remarquables préludes à la structuration euclidienne d'espaces relativement étendus ».

[16] Concernant les activités d'orientation, les élèves du cycle 3 (CE2, CM1, CM2) doivent pouvoir « retrouver plusieurs balises dans un espace semi-naturel en s'aidant d'une carte ».

En 6e, l'élève va apprendre à lire une carte et à se repérer. Il va se déplacer sur un trajet court en suivant des lignes directrices simples, avec des ralentissements, voire des arrêts aux changements de direction. C'est ainsi que détaillant quelques-unes des compétences que les élèves devraient acquérir au cours d'une telle activité nous pouvons y lire notamment :

• Se représenter et codifier les éléments simples de planimétrie (chemins, habitations, etc.) et d'hydrographie (lac, rivière, fontaine, etc.).
• Construire la symbolique de la légende (aspects de planimétrie et d'hydrographie).
• Orienter sa carte par rapport à des repères simples.
• Se situer sur la carte et choisir une direction et un chemin pour atteindre la balise.
• Se recaler au cours de son déplacement grâce à des arrêts courts mais fréquents.
• Mémoriser quelques éléments pour réaliser un parcours (par exemple, «je vais jusqu'au croisement et je tourne à droite... »).
• Identifier les erreurs de lecture ou de cheminement.

Sans doute y a-t-il là, au seuil d'un travail transpositif dont nous avons énuméré quelques-uns des objets mais qui reste tout entier à accomplir, une pure hypothèse. Il importe pourtant, aujourd'hui, de travailler collectivement à dépasser le constat d'inadéquation que dressaient récemment Berthelot et Salin (2000) :

Ce phénomène de non-prise en compte, dans la relation didactique, des problèmes spatiaux qui sous-tendent l'existence des connaissances "spatio-géométriques", est constamment présent à l'école primaire et au début du collège, et ceci malgré l'insistance actuelle, dans les commentaires des programmes, sur l'importance de l'activité de l'élève. Nous le mettons en relation d'une part avec les conceptions épistémologiques des enseignants, d'autre part avec les contraintes de la relation didactique.

4. En guise de conclusion

Le rapide exposé des motifs qui précède appelle évidemment débat. Tout d'abord parce que notre proposition se fonde sur un parti pris : aller à l'encontre de l'épistémologie scolaire dominante en classe de mathématique. Plutôt qu'un enseignement « applicationniste » des savoirs nous nous plaçons, en effet, dans une perspective fonctionnelle, en référence à ce qui était autrefois appelé *les mathématiques mixtes*. Notre proposition vise donc à envisager la question de l'enseignement de l'orientation plutôt que d'investir les exemples anciens donnés pour des activités de classe et « repartir » vers la topographie. Cette proposition s'inscrit dans la continuité d'une tradition séculaire – l'enseignement de la topographie – et permet des rapports effectifs[17] à l'espace sensible par la mise en congruence instrumentée (boussole) d'une carte.

Nous posons ici un problème dont l'attaque efficace supposerait de multiples travaux, et notamment tout un travail transpositif qu'Yves Chevallard décrivait dans les termes suivants (Chevallard 1994, p. 314) :

Observer le savoir, repérer les objets et les interrelations entre objets qui le constituent, étudier les lois de ces complexes objectaux, tout cela constitue l'un des développements importants à mes yeux de ces dernières années […]. Il existe toute une écologie didactique du savoir, vaste domaine dont l'étude est à ce jour à peine entamée…Ce qui se passe dans la classe, ce qui peut s'y passer dépend ainsi de conditions et contraintes extérieures à la classe, ne serait-ce que par le biais du savoir enseigné… Sous

[17] Les exemples de report ou relevé d'un azimut sur le terrain (figures 15 & 16) illustrent comment l'instrumentation par la boussole accompagne la construction d'un rapport effectif aux savoirs relatifs aux angles.

quelles conditions un système didactique, relatif à un objet O donné, peut-il se constituer ? Quels objets peuvent être ainsi enjeux didactiques ?

Au-delà de l'analyse écologique des savoirs mathématiques qui relèvent de l'orientation et des nécessaires expérimentations d'ingénieries didactiques afin d'envisager le système de conditions et contraintes de leur enseignement, une question reste largement à étudier : le repliement disciplinaire qui a prévalu ces dernières années est-il une contrainte indépassable et à quelles conditions pourrait-elle être dépassée ? Enfin, les problèmes de repérage et d'orientation dans un espace topographique sont par leur nature et les savoirs mathématiques qu'ils mobilisent un « bon candidat », nous semble-t-il, pour constituer un parcours d'étude et de recherche (Chevallard, 2004). Il s'agit là, une fois encore, d'une hypothèse qu'il reste à étudier.

Références

Berthelot, R., Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse d'université, Université de Bordeaux I.

Berthelot, R., Salin, M.-H.(2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N, 65*. p. 37-59.

Bulletin officiel de l'Éducation Nationale. *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*. Hors série n°3 du 19 juin 2008.

Chenevier, P. (1934). *Cours de trigonométrie (classe de mathématiques)*. Paris : Hachette.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1994). Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. éds. Grenoble : La Pensée sauvage. p. 313-320.

Chevallard, Y. (1998). *Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui*. Actes du colloque Défendre et transformer l'école pour tous (Marseille, 3-5 octobre 1997), CD-ROM.

Chevallard, Y. (2004). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004.

Condorcet (1791). *Cinq mémoires sur l'instruction publique*. Paris : Édilig, 1989.

Esclasse, P. (1993). *Apprendre à s'orienter. Cartes, boussoles, étoiles*. 5e édition. Aix-en-Provence : Édisud, 2000.

F. J. (1890). *Éléments de trigonométrie rectiligne*. Paris : Poussielgue Frères.

Hogben, L. (1950). *Les mathématiques pour tous*. Paris : Payot.

Hulin-Jung, N. (1989). *L'organisation de l'enseignement des sciences. La voie ouverte par le Second Empire*. Paris : Éditions du C.T.H.S.

Lamory, J.-M. (1996). *Cartographie et orientation*. Grenoble : Didier Richard.

Lebossé, C., Hémery, C. (1947). *Géométrie plane. Classe de seconde des lycées et collèges*. Paris : Fernand Nathan.

Lord, J.-M., Pelletier, A. (2000). *Cartes, boussoles & GPS*. Ottawa : Broquet.

Ministère de l'éducation nationale (1996). *Éducation Physique et sportive. Programmes et accompagnement*. Paris : CNDP. Réédition 2005.

Pêcheux, M.-G. (1990). Le développement des rapports des enfants à l'espace. Paris : Nathan.

Wozniak, F. (2000). *Les mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire*. Mémoire de DEA. Université Lyon 1.