# *L'appropriation des théorèmes de géométrie plane et l'apprentissage de leur utilisation par des élèves de collège*

**Yves GIRMENS**

**Plan de l'atelier**

I. Présentation

II. Travail en groupes

← Analyse d'une activité de géométrie sur la compréhension d'un théorème

← Analyse des productions d'élèves relatives à cette activité

III. Compte - rendu et synthèse

IV. Réflexions autour de propositions d'enseignement.

**Compte rendu de l'atelier**

I . Présentation de l'atelier

L'atelier a pour objectif de mener une réflexion autour des deux questions suivantes :

***- Comment permettre à un élève de collège d'appréhender le sens d'un théorème?***
***- Comment permettre à un élève de collège de comprendre le fonctionnement d'un théorème dans un pas de déduction*** ?

Dans un premier temps , il est proposé aux stagiaires d'étudier une activité proposée en classe de quatrième sur la compréhension d'un théorème de géométrie puis d'analyser des productions d'élèves relatives à cette activité.

Dans un deuxième temps, une problématique autour de l'enseignement des théorèmes en géométrie est présentée et mise en débat.

II . Travail en groupes

1 . En premier lieu, une analyse a priori d'une activité d'une activité de quatrième figurant en annexe 1 est proposée, avec les questions suivantes :

- Quels sont les objectifs d'apprentissage correspondants ?

- Quelle gestion de classe proposez-vous pour ce travail ?
- Quelles réponses d'élèves prévoyez-vous ?

2 . En second lieu, les participants doivent analyser les productions de quatre groupes d'élèves figurant en annexe 2, avec les consignes suivantes :
- Analyser ces productions.
- Quels commentaires vous inspirent-elles ?

Le contexte dans lequel les productions des élèves ont été recueillies est explicité de la façon suivante aux participants :

Le théorème dit "d'Arthur" a été enseigné. Le théorème dit "de Noémie" n'a pas été enseigné.

Les travaux menés jusque-là ont permis un début de réflexion sur
- le sens d'un théorème
- et le codage des hypothèses[1] sur un dessin.

L'objectif de cette activité était de construire un nouveau théorème par opposition à un théorème déjà connu et de travailler à cette occasion la compréhension d'un théorème.

## III. Compte-rendu des travaux de groupes et synthèse

Chaque groupe a été invité à produire un transparent présentant ses conclusions ; dans la phase de bilan, les aspects suivants ont été retenus :

1 . Les objectifs d'apprentissage proposés par les différents groupes sont les suivants :

- Différencier deux théorèmes différents mais voisins par les contenus mathématiques
- Différencier hypothèses et conclusion dans une implication en s'appuyant sur des dessins codés
- Introduire un nouveau théorème : celui de Noémie

La gestion de classe proposée pour ce travail est :
- Temps de réflexion individuel
- Travail en petits groupes avec pour objectif de dégager un consensus au niveau du groupe et de pouvoir l'argumenter
- Exposé des différentes solutions
- Débat sur la validation des solutions.

2 . Les analyses des productions des élèves sont les suivantes :

***Production du premier groupe :***
Il a tout codé (hypothèses et conclusions) sur un dessin pour chaque théorème. L'argumentation des élèves pour identifier les deux théorèmes s'appuie uniquement sur les

[1] Le mot hypothèse qui en mathématique n'a pas le même sens que dans la culture scientifique n'est jamais utilisé par les animateurs dans leurs classes ; ils utilisent de préférence le terme "données" ou " conditions d'entrée".

dessins finaux ; le recours à un dessin codée porteur de toutes les informations contenues dans la formulation du théorème écrase la distinction entre hypothèse et conclusion.

***Production du deuxième groupe*** :
Reformulation correcte des deux théorèmes en séparant bien hypothèses et conclusion ; ils semblent en voir la chronologie. Le codage tient compte de l'ordre d'apparition des propriétés dans l'énoncé.
Malgré tout, les théorèmes sont reconnus identiques, la conviction du groupe étant fondée sur la similitude des dessins. Il semble que, pour ces élèves, le théorème ne soit qu'un moyen de construire un dessin., l'ordre d'obtention du dessin n'important pas, seul le dessin final semblant prédominant.

***Production du troisième groupe :***
Bien que la tâche pousse les élèves à faire des dessins, le groupe n'en a pas fait. Leur réflexion semble se placer sur le contenu des phrases et leurs constructions.
Ils semblent envisager un théorème comme moyen pour répondre à une question.

***Production du quatrième groupe*** :
Le groupe semble, à l'aide de dessin codée, différencier hypothèses et conclusion, mais pour chaque théorème, le dessin final semble le même, ce qui laisse les élèves indécis pour trancher.

## IV. Réflexions autour de propositions d'enseignement

### A) Exposé des principes choisis par les animateurs pour l'enseignement des théorèmes

Préliminaire :

Suite à l'activité étudiée précédemment, il a été posé à des élèves de quatrième les deux questions suivantes :

- Qu'est qu'un théorème ?
- Qu'est ce que deux théorèmes différents ?

On trouvera dans l'annexe 3 certaines réponses d'élèves à ces questions qui renseignent sur les représentations qu'ils ont d'un théorème.

### 1) LA COMPREHENSION D'UN THEOREME :

Elle doit se faire selon plusieurs aspects :

a) Connaissance de “ l'objet ” théorème :

- L'aspect universel d'un théorème : il s'applique à toutes les situations géométriques, sans exception, où sont présentes les prémisses.
- Le caractère de nécessité exprimé par un théorème : avoir conscience de ce qu'il dit : Il dit que la présence de certaines prémisses assure nécessairement la présence de certain fait (la conclusion) mais aussi avoir conscience de ce qu'il ne dit pas.

b) Connaissance du théorème en tant qu'outil : Sa place et son rôle dans un pas déductif . Ce qu'il permet d'écrire.

L'utilisation d'un théorème dans un pas déductif exige la mise en œuvre de deux opérations :

**LA VERIFICATION :**

- *SAVOIR IDENTIFIER CE QUI EST CERTAIN ( Lecture des données).*

- *SAVOIR REPERER LES PREMISSES D'UN THEOREME*
*( Reconnaissance des conditions d'application).*

- *SAVOIR ISOLER UNE PARTIE DE LA FIGURE QUI PRESENTE LES DONNEES CORRESPONDANT AUX PREMISSES DU THEOREME. ( Lecture coordonnée dessin – énoncé).*

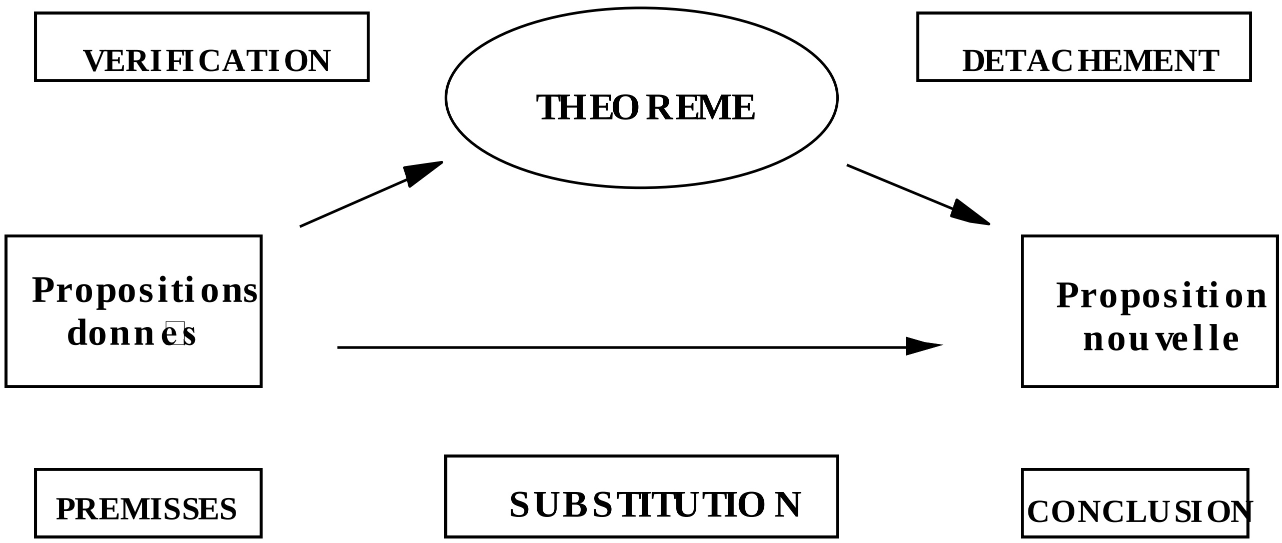
**LE DETACHEMENT :**

- *SAVOIR REPERER LA CONCLUSION D'UN THEOREME.*

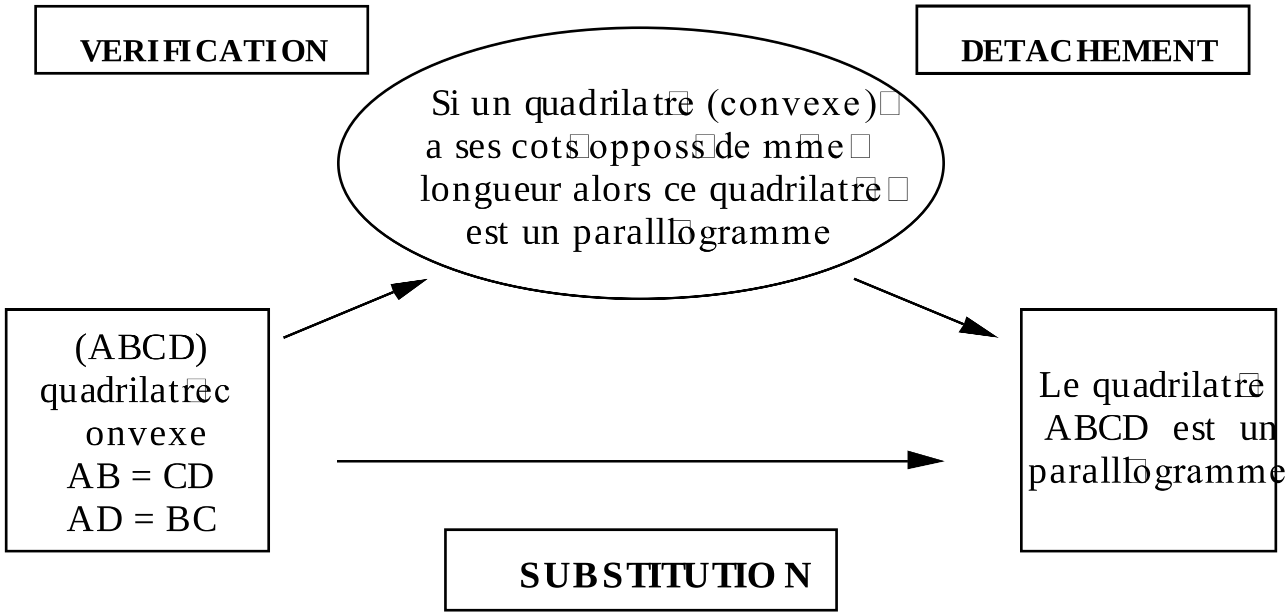
- *FORMULER LA CONCLUSION DU THEOREME EN UTILISANT LES ELEMENTS APPROPRIES DE LA FIGURE.*

Schéma général :

**ENONCE - TIERS**



Exemple :




## 2) CRITERES CHOISIS POUR LA FORMULATION DES THEOREMES :

- Les prémisses bien repérables
- La conclusion séparée

  D'où la forme "Si …. alors …."

  ou " Chaque fois que …. Obligatoirement …."

- Adéquation entre la formulation choisie et sa fonctionnalité :

**Il convient de prendre en compte le problème d'adéquation entre l'énoncé d’un théorème et les problèmes qu’il permet de traiter :**

Par exemple, le théorème suivant : "Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point." n'est que très rarement fonctionnel pour résoudre un problème alors qu'il est très fréquemment donné.

Alors que le théorème suivant qui exprime la même relation géométrique :"Dans un triangle, la droite qui joint un sommet au centre de gravité coupe le côté opposé en son milieu." est très utile pour résoudre des problèmes alors qu’il n’est presque jamais enseigné.

La formulation d'un théorème est donc un choix didactique essentiel qui peut faciliter l'apprentissage du raisonnement déductif ou, au contraire, le complexifier.

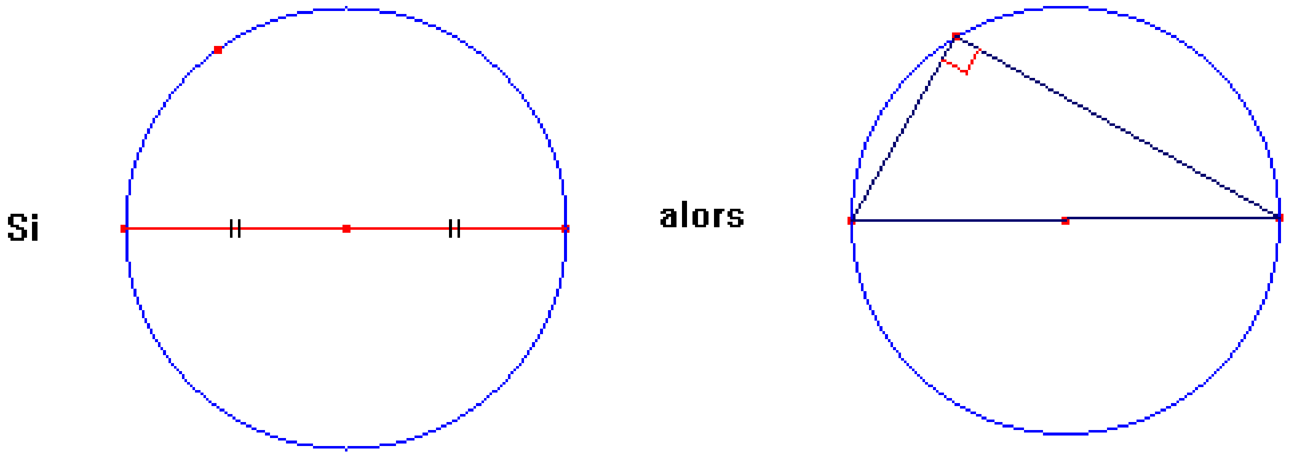
- Ecriture en langage naturel
- Ecriture hors contexte
- Figure associée au théorème : le rôle du codage :

**EXEMPLE DE THEOREME :**

"Si on joint un point d'un cercle aux deux extrémités d'un de ses diamètres alors on obtient un triangle rectangle en ce point."

Prémisses :

- Un cercle
- Un point du cercle
- Un diamètre du cercle




Remarque : Il nous parait important, pour permettre une bonne assimilation d'un théorème de susciter, à l'occasion des travaux proposés, des reformulations de la part des élèves.

## B) Quelques propositions didactiques :

Il nous a paru essentiel de construire des exercices, différents de ceux qui sont en général proposés pour l'apprentissage du raisonnement déductif, qui viseront de façon spécifique l'apprentissage d'un théorème , chaque exercice ayant un objectif bien précis.

Ainsi, nous faisons le choix de construire des exercices ayant pour seul objectif :

1) repérer les prémisses d'un théorème

Par exemple, l'utilisation de CABRI-Géomètre pour fabriquer des Macros, nous paraît constituer un travail intéressant sur les théorèmes en ce sens qu'il oblige à identifier précisément les prémisses d'un théorème fournissant une conclusion déterminée.

Exemple : Fabriquer plusieurs macros fournissant un triangle rectangle

2) repérer s'il manque une ou des prémisses pour appliquer un théorème donné.

3) opposer un théorème à un ou plusieurs autres théorèmes.

4)opposer un théorème à sa réciproque.

5) dans un pas déductif, deux éléments étant donnés, trouver le troisième.

*Voici quelques propositions de travaux visant à répondre à ces conditions* :

**EXERCICE 1 :**

ABCD est un parallélogramme; O est le point d'intersection des diagonales ; K est le milieu de [CD].

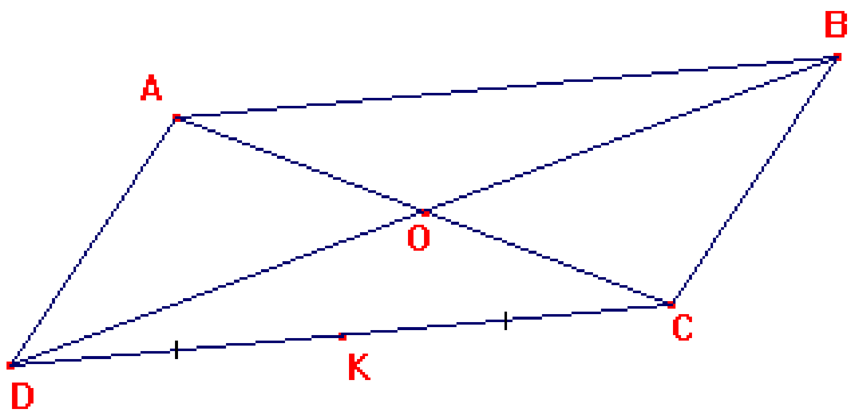
1 . Fais une figure.

2 . Cite au moins 6 triangles de cette figure.

3 . Voici un théorème : " Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté."

 Parmi les triangles cités au 1 , indique en un pour lequel ce théorème peut s'utiliser. Explique pourquoi tu peux utiliser ce théorème et dis ce qu'il permet d'affirmer.

 Parmi les triangles cités au 1 , indique un triangle pour lequel tu ne peux pas utiliser ce théorème. Explique pourquoi tu ne peux pas utiliser ce théorème dans le triangle que tu as choisi.




**EXERCICE 2 :**

Jacques et François font des révisions pour leur prochain contrôle. Dans le cahier de François, il est écrit :

*Théorème* : Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales sont de même longueur.

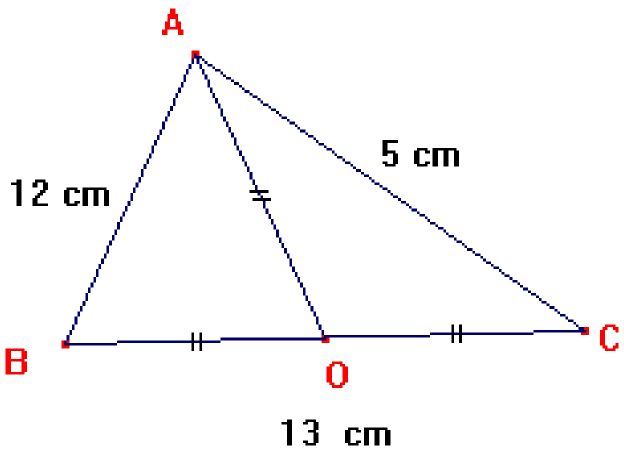
Jacques et François discutent car Jacques prétend que ce théorème est le même que celui-ci:

*Théorème* : Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

***Qu'en penses-tu ? Que dirais-tu à Jacques ?***

**EXERCICE 3 :**

Voici une figure :




Voici une liste de théorèmes:

***En utilisant les informations de la figure, choisis un théorème que tu peux utiliser et justifie ton choix.***

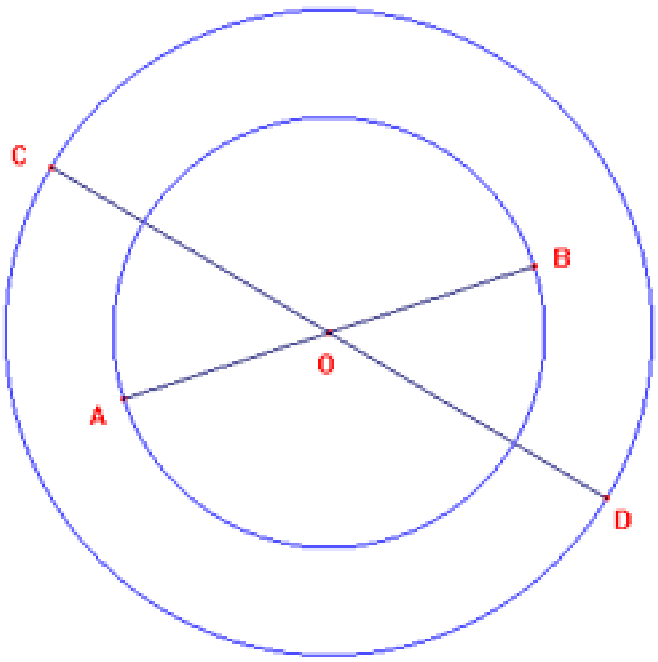
***Dis ce que ce théorème te permet d'obtenir comme nouvelle propriété de la figure.***

- Théorème 1 : Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Théorème 2: Si, dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.
- Théorème 3 : Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.
- Théorème 4: Si on joint les extrémités d'un diamètre d'un cercle à un point de ce cercle alors le triangle est rectangle en ce point.
- Théorème 5 : Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors le triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.

**EXERCICE 4 :**

Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm et trace un cercle de même centre O et de rayon 4,5 cm.

Trace un diamètre,[AB], du cercle de 3 cm de rayon et un diamètre [CD], du cercle de 4,5 cm de rayon. (Il ne doit pas y avoir de points alignés.)




Voici une liste de théorèmes :

***Parmi eux, choisis un théorème que tu pourrais utiliser et un théorème que tu ne pourrais pas utiliser avec cet énoncé. Justifie ton choix***.

Théorème 1: Si un quadrilatère a un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme.

Théorème 2 : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Théorème 3 : Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme.

Théorème 4 : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.

Théorème 5 : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et qui sont perpendiculaires alors c'est un losange.

## BIBLIOGRAPHIE


- Arsac G., "Initiation au raisonnement déductif au collège " IREM de Lyon. PUL
- Arsac G.,1990 "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France", RDM n°9 (3)
- Balacheff N. ,1982, "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruences", RDM n°3.
- Duval R.,1988, "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence" , Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol.1.
- Duval R., 1993 " Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée" , Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol.5.
- Duval R et Egret M.A.,1989, "L'organisation déductive du discours", Annales de didactiques et de sciences cognitives Vol. 2.
- Duval R.,1994."Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère n°17
- Legrand M., 1990, Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique." RDM Vol.9.3
- Laborde C. ,1982 "Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques" Thèse.
- Mesquita A.L., 1989 "L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie", Thèse.
- Noirfalise R. ,1993 " Contribution à l'étude didactique de la démonstration" RDM n°13(3).
- Padilla V. ,1992, "L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques" Thèse.

**ANNEXE 1**

Lopez
Cassière
Antoine
Boulet
Missonnier

Mardi 25 novembre

Exercice :

I. Arthur a raison, les 2 théorèmes sont justes mais expliqués différement. En ayant respecté les 2 théorèmes nous avons trouvé les mêmes propriétés.



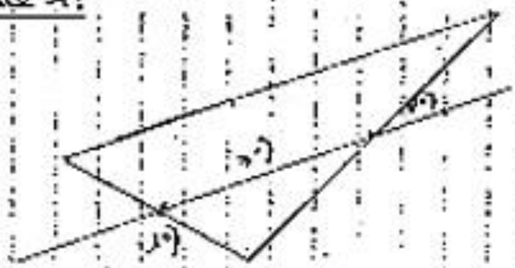
Voilà deux dessins différents, mais de mêmes propriétés

Lucille Fabrice
Verdier Elodie
Meric Jonathan
Chassenelle Aurélie
Dubois Laetitia

Mardi 25 Novembre

Exercice 1 :

Arthur.



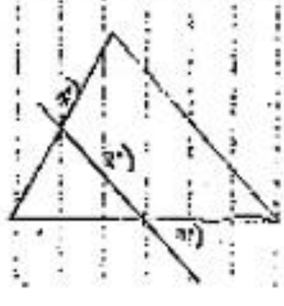

Dans le théorème d'Arthur il y a les milieu de 2 côtés et un triangle ce qui donne une parallèle.

Dans le théorème de Noémie il y a le milieu d'un côté et une parallèle ce qui donne un autre milieu.

Si on a une parallèle on est obliger d'avoir 2 milieux. Si on n'a qu'un sans l'autre.

On est d'accord avec Arthur.

Noémie



## ANNEXE 2

Arthur et Noémie sont des élèves de quatrième avec des professeurs différents.
Dans son classeur de fiches Arthur a écrit le théorème suivant :

*"Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux cotés alors cette droite est parallèle au troisième coté du triangle".*

Dans son cahier de cours Noémie a écrit le théorème suivant .

*"Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu de d'un coté, et est parallèle à un deuxième coté, alors cette droite passe par le milieu du troisième coté du triangle".*

Arthur a fait des dessins et déclare /

*"Tout compte fait, nous avons le même théorème".*

Noémie n'est pas d'accord avec lui.

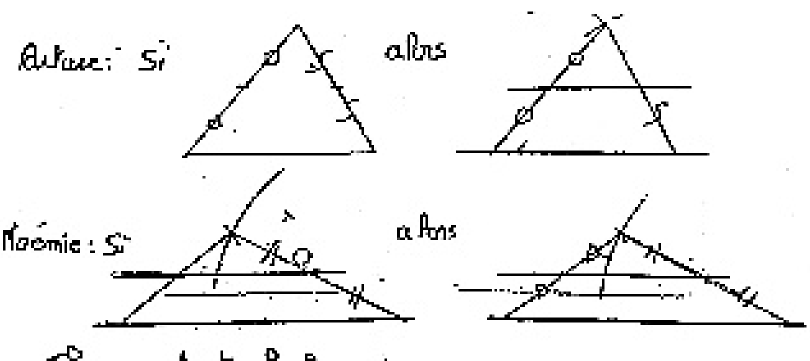
**Qu'en penses-tu ? Explique pourquoi ?**

**A)**

je pense que c'est NOEMIE qui a raison. Ces théorème sont différents car ils ne répondent pas à la même question mais font intervenir les mêmes règles, le 1er nous montre que la droite est parallèle au 3e côté et le 2e nous montre que la droite passe par le milieu du 3e côté

*"Je pense que c'est Noémie qui a raison. Ces théorèmes sont différents car ils ne répondent pas à la même question mais font intervenir les mêmes règles. Le premier nous montre que la droite est parallèle au troisième coté et le second montre que la droite passe par le milieu du troisième coté".*

**B)**




Ils on tout les 2 raisons, car il arrivent au même résultat.

*"Ils ont tous les deux raison car ils arrivent au même résultat".*

**ANNEXE 3**

## Qu'est-ce qu'un théorème ?

A) *Un théorème est une règle à respecter pour pouvoir faire dans une figure quelque chose de précis.*

*Deux théorèmes différents, ce sont deux règles qui n'aboutissent pas à une même chose précise.*

B) *Un théorème c'est une explication et description de figure.*

*Deux théorèmes différents, c'est deux théorèmes qui n'ont rien à voir entre eux. Exemple : Pour un triangle il y a un théorème mais pour un carré c'est un théorème différent.*

C) *Un théorème c'est une règle qui est toujours vraie dans tous les cas. Il est fabriqué de conditions. Pour montrer comment est le théorème, il faut faire un dessin comme çà on peut comparer les théorèmes en faisant les dessins des théorèmes.*

D) *Un théorème c'est une propriété qui a une condition : si ... alors ...*

*Un théorème est différent d'un autre quand par exemple le théorème de la hauteur du triangle et la médiane du triangle : ce sont donc deux théorèmes différents.*

E) *Un théorème c'est une propriété qu'il y a dans une figure. Il se forme avec des conditions.*