Rapport des élèves aux écritures et aux règles du calcul algébrique

Yves GIRMENS

Plan de l'atelier

I. Présentation

II. Travail en groupes
   1. Etude a priori des items d'un test sur les simplifications des quotients.
   2. Analyse des productions de deux élèves.
   3. Compte rendu et synthèse

III. Etude du protocole d'un entretien avec un élève, ayant pour but l'explicitation de sa production.

IV. Présentation par les animateurs des principes choisis pour l'enseignement des règles du calcul algébrique

V. Proposition d'activités pour l'apprentissage des règles du calcul algébrique.

Compte rendu de l'atelier

I. Présentation de l'atelier

L'atelier est situé dans la problématique du rapport des élèves aux règles de calcul algébrique. Deux entrées sont proposées :
- L'études des règles sous deux aspects : objet – outil
- La mise en œuvre de dispositifs permettant l'analyse de productions d' élèves en calcul algébrique dans le but d 'appréhender les modèles implicites utilisés.

II Travail en groupes

1. Dans un premier temps, le test[1] figurant en annexe 1 est distribué. L'objectif est le recueil des informations sur la manière dont les élèves s'y prennent pour simplifier un quotient..

Les participants sont répartis en groupes et ont pour tâche de répondre à la question :

“ Les items choisis vous semblent-ils adaptés à l'objectif visé ? ”

[1] Test proposé par Maryvonne Aubrée dans “ Petit X n° 8

Dans un deuxième temps, les groupes doivent analyser les productions de deux élèves, A et B, figurant en annexe 2, avec la consigne suivante :
“ Rechercher et formuler des modèles implicites ou explicites utilisés par les élèves pour simplifier les quotients. ”

2. Compte rendu et synthèse

Chaque groupe est invité à produire un transparent présentant ses conclusions en vue de la mise en commun.

Dans la phase de bilan, les aspects suivants sont retenus par les groupes :

Pour l'élève A :

- Les conduites sont dépendantes de la présence ou de l'absence de lettres et des opérations en jeu.
- Simplifier, c'est obtenir à tout prix un quotient de la forme $\frac{a\,x}{b\,y}$ où a et b sont des nombres.
- Simplifier, c'est remplacer $\frac{a+b}{c+b}$ par $\frac{a}{c}$.

Les participants ont interprété les réponses aux items 4 et 11 de deux façons différentes :
- Utilisation d'une règle de type simplification de puissance
- Identification des deux membres d'une équation aux deux termes du quotient et application de la “ règle ” de transposition.

Pour l'élève B
Les groupes s'accordent pour dire qu'il existe un conflit cognitif entre l'application de la bonne règle et l'intuition qu'a l'élève qu'un quotient de deux somme s'écrit comme somme de deux quotients.

Dans un troisième temps, les animateurs replacent l'étude précédente dans le cadre d'une enquête concernant plusieurs classes de troisième et de seconde qui a permis de relever plusieurs centaines de réponses d'élèves. Ceci les a conduit à dégager les modèles les plus fréquemment rencontrés :

M_1 “ Coupure ”

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

M_2 “ Suppression d'élément commun ”

$$\frac{a+m}{b+m} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{ka+b}{kc+d} = \frac{a+b}{c+d}$$

M_3 “ Contraction d'écriture ”

$$\frac{a+m}{a+n}=\frac{ma}{na} \quad \text{ou} \quad \frac{ma+nb}{m'a+n'b}=\frac{mnab}{m'n'ab}$$

M_4 “ Conservation des lettres ”

$$\frac{ma+nb}{m'a+n'b}=\frac{m}{m'}a+\frac{n}{n'}b$$

III. Etude du protocole d’un entretien avec un élève, ayant pour but l’explicitation de sa production.

Le protocole de l’élève Gwen de seconde se trouve en annexe 3.

Les participants ont d’abord été décontenancés par une telle production.
Puis, ils ont pris la mesure de l’écart entre le rapport personnel de l’élève aux règles et l’attente officielle.

De l’avis de certains, Gwen a une position conforme à ce qui est attendu en mathématiques, dans le sens où, pour répondre, elle cherche à s’appuyer sur une règle en repérant ses conditions d’application.
Cependant, ne connaissant pas la règle appropriée, sous un effet de contrat au sens de Brousseau, elle adapte, par analogie, une règle qu’elle connaît déjà et dont elle sait pertinemment qu’elle en extrapole le domaine de validité. En effet, Gwen dit : “ Non, je savais que c’était vrai pour les vecteurs et que là, je l’écrivais pour autre chose. ”.

D’autres ont pensé que l’analogie qui amène Gwen a passé des équations de droites aux coordonnées d’un vecteurs révèle une absence de sens de la règle.

IV. Présentation par les animateurs des principes choisis pour l’enseignement des règles du calcul algébrique

Le travail spécifique sur la règle s’accompagne de travaux visant à permettre aux élèves de s’approprier la rationalité mathématiques en particulier le rôle du contre exemple, le fait que quelques exemples ne suffisent pas à démontrer …

De la même façon, il est important d’amener l’élève à construire les compétences suivantes :

- Un nombre possède plusieurs écritures et celles-ci portent des informations différentes
- Seule une règle permet de passer d’une écriture de ce nombre à une autre.
- Les règles seules permettent de conserver la valeur numérique d’une expression littérale.
- L’égalité de deux écritures permet de substituer une des écritures à l’autre.

LE TRAVAIL DE LA REGLE

- L’enseignement a pour but de faire comprendre à l’élève qu’une égalité génère deux règles différentes.

Par exemple, concernant la propriété $\dfrac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\mathbf{k} \times \mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ l’élève doit comprendre que :

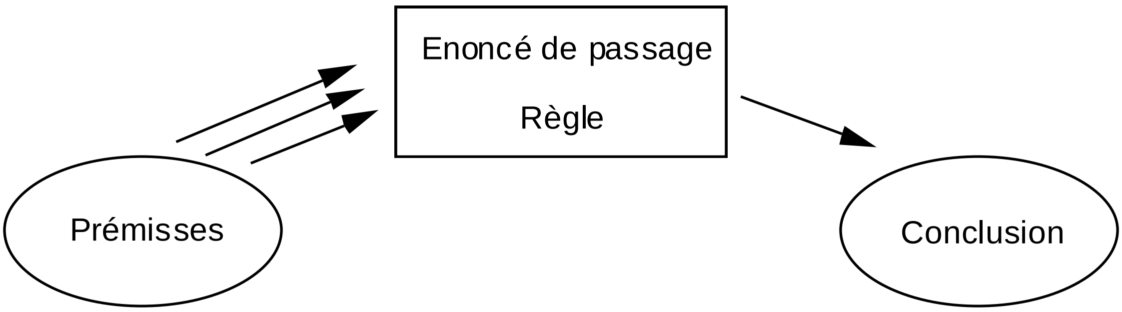
- Lorsqu’un nombre s’écrit $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ alors ce nombre peut s’écrire aussi $\dfrac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\mathbf{k} \times \mathbf{b}}$
- Lorsqu’un nombre s’écrit $\dfrac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\mathbf{k} \times \mathbf{b}}$ alors ce nombre peut s’écrire aussi

Ce qui nécessite l’apprentissage de deux règles :

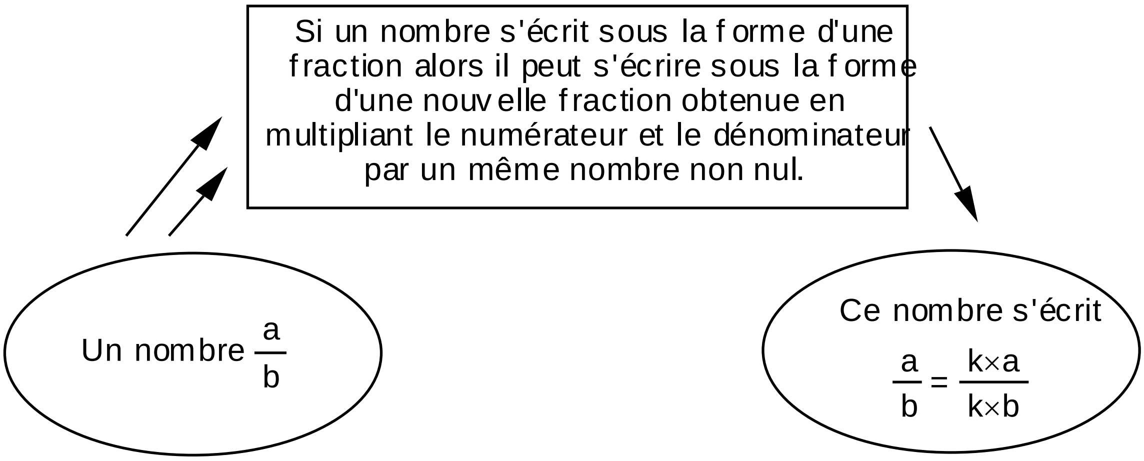
Règle 1	Règle 2
$\dfrac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\mathbf{k} \times \mathbf{b}} \rightarrow \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$	$\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \rightarrow \dfrac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\mathbf{k} \times \mathbf{b}}$

Pour l’application de la première règle, l’élève doit reconnaître la forme initiale d’un quotient $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, alors que, pour l’application de la deuxième règle, il doit reconnaître la forme initiale d’un quotient de deux produits ayant un même facteur : $\dfrac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\mathbf{k} \times \mathbf{b}}$.

Pendant tout le temps de son apprentissage, la règle fonctionnera comme un théorème dans un pas déductif au sens défini par R. Duval :



Exemple :



Cet apprentissage exige pour chaque règle de :

- Dissocier les prémisses de la conclusion.
- Repérer toutes les prémisses.
- Ne pas l'appliquer s'il manque au moins une prémisse.
- Transformer avec des règles permises l'écriture algébrique initiale pour faire apparaître les prémisses de la règle à appliquer.

Il peut s'établir, ainsi, une cohérence entre l'apprentissage du raisonnement déductif en géométrie et le travail des règles en algèbre.

- L'utilisation des différents registres (au sens de R. Duval) de formulation d'une règle ainsi que les passages d'un registre à l'autre, participe à une meilleure compréhension d'une règle.

V. Proposition d'activités pour l'apprentissage des règles du calcul algébrique.

Dans cette dernière partie de l'atelier, les animateurs proposent le modèle suivant :

1. Une règle est donnée.

2. Des cas susceptibles de relever de la règle sont proposés.

3. L'élève doit vérifier, dans chaque cas, si les prémisses de la règle sont présentes et en détacher la conclusion.

Ils invitent les participants à réfléchir sur l 'exercice suivant :

Règle :
Si un produit de deux facteurs est nul alors l'un ou l'autre de ces facteurs est nul.

Voici une règle, dire si elle peut s'appliquer dans chacun des cas suivants :

- Si oui, expliquer pourquoi et dire ce qu'elle permet d'affirmer
- Si non, expliquer pourquoi .

1. $(x + 3) \infty (y - 2) = 0$
2. $(x + 3) + (y - 2) = 0$
3. $x(2x - 5) = 0$
4. $(x + 1) \infty (x + 7) = 7$
5. $(5x + 1)(3x - 1) = (5x + 1)(x - 8)$
6. $(7x - 3) \infty (x + 1) \quad 0$
7. $(x + 5) / (x-3) = 0$
8. $(x - 3)(y + 2)(z + 6) = 0$

Sensibiliser les participants à la difficulté qu'ont les élèves à établir un rapport adéquat aux règles du calcul algébrique est un objectif qui semble avoir été atteint à en juger par la participation active des personnes présentes à l'atelier.

Dans le temps imparti, il n'a pas été possible de présenter toutes les activités à débattre avec les participants de l'atelier ; on les trouvera en annexe 4.

Annexe 1 . Test sur la simplification des quotients

NOM **Prénom** **Classe le 22/11/95**

Des exercices individuels non notés

N°		Calculs éventuels ou explications si aucune simplification n'est possible.	Fraction simplifiée, si possible
1	$\frac{6+2}{6+4}$		
2	$\frac{2a \times 4}{2}$		
3	$\frac{3+5}{7+5}$		
4	$\frac{4b+20c}{16b+12c}$		
5	$\frac{2+7x}{7x}$		
6	$\frac{4+a}{6+a}$		
7	$\frac{2a+4}{2}$		
8	$\frac{91+1259}{91+3452}$		
9	$\frac{3(x-1)}{3x}$		
10	$\frac{5+10a}{15-10a}$		
11	$\frac{4b+5c}{16b+15c}$		

Annexe 2

Elève A

Des exercices individuels non notés. ELEVE A

N°		Calculs éventuels ou explications si aucune simplification possible.	Fraction simplifiée, si possible.
1	$\frac{6+2}{6+4}$	$\frac{\cancel{6}+2}{\cancel{6}+4} = \frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2a \times 4}{2}$	$\frac{2a \times 4}{2} = \frac{8a}{2}$	$4a$
3	$\frac{3+5}{7+5}$	$\frac{3+\cancel{5}}{7+\cancel{5}} = \frac{3}{7}$	impossible de réduire plus.
4	$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4b+20c}{16b+12c} = \frac{8c}{12b}$	$\frac{3c}{4b}$
5	$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{2+7x}{7x} = \frac{9x}{7x}$	impossible de réduire plus
6	$\frac{4+a}{6+a}$	$\frac{4+\cancel{a}}{6+\cancel{a}} = \frac{4}{6}$	$\frac{2}{3}$
7	$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2a+4}{4} = \frac{6a}{4}$	$\frac{3a}{2}$
8	$\frac{91+1259}{91+3452}$	$\frac{\cancel{91}+1259}{\cancel{91}+3452} = \frac{1259}{3452}$	Je n'y arrive pas parce que les chiffres sont grands, mais [illegible]
9	$\frac{3(x-1)}{3x}$	Je n'y arrive pas car les fractions avec des parenthèses je ne suis jamais arrivé à résoudre cette fraction	
10	$\frac{5+10a}{15-10a}$	$\frac{\cancel{5}+10a}{5\times5\times5-10a} = \frac{10a}{10-10a} = 10a$	impossible de réduire plus.
11	$\frac{4b+5c}{16b+15c}$	$\frac{4b+5c}{16b+15c} = \frac{-10c}{20b}$	$\frac{-1c}{2b}$

Elève B

Des exercices individuels non notés. ELEVE B

N°		Calculs éventuels ou explications si aucune simplification possible.	Fraction simplifiée possible.
1	$\frac{6+2}{6+4}$	$\frac{6+2}{6+4} = \frac{8}{10}$ J'additionne en haut et en bas les nombres Si ça avait été $\frac{4}{6} + \frac{2}{4} = \frac{24}{24} + \frac{12}{24} = \frac{36}{24} = \frac{6}{4}$ [illegible]	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{2a \times 4}{2}$	$\frac{8a}{2}$ je multiplie en haut	$4a$
3	$\frac{3+5}{7+5}$	① pareil que 1 je sais pas si $\frac{3+5}{7+5} = \frac{8}{12}$ ou ② $\frac{3}{7} + \frac{5}{5} = \frac{15}{35} + \frac{35}{35} = \frac{50}{35} = \cancel{\frac{10}{7}}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{10}{7}$
4	$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4(b+5c)}{4(4b+3c)} = \frac{b+5c}{4b+3c}$	
5	$\frac{2+7x}{7x}$	[illegible] on peut pas sauf si je fais la solution 2 mais je pense que c'est faux	
6	$\frac{4+a}{6+a}$	pas de facteurs commun	
7	$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2(a+2)}{2} = a+2$	
8	$\frac{91+1259}{91+3452}$	$\frac{1350}{3543} = \cancel{\frac{450}{1181}}$	$\frac{450}{1181}$
9	$\frac{3(x-1)}{3x}$	$\frac{x-1}{x}$	
10	$\frac{5+10a}{15-10a}$	$\frac{5(1+2a)}{5(3-2a)} = \frac{1+2a}{3-2a}$	
11	$\frac{4b+5c}{16b+15c}$	$0{,}25\,b + \frac{1}{3}c$	

on [illegible] car je pense que c'est ça

[illegible] solution

cette feuille a forcément des trucs faux car je sais pas si $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ ou pas [illegible]

Annexe 3

PRODUCTION DE L'ELEVE GWEN (seconde)

- D a pour équation y = x + 1
- (BC) a pour équation y = –x + 1
- D et (BC) sont perpendiculaires ssi leur somme est nulle
- (x + 1) + (–x + 1) = 0 non
- donc D et (BC) ne sont pas perpendiculaires.

<u>Dialogue avec le professeur</u> :

P : Gwen, pourquoi as-tu écrit ça ?

G : je pense que j'ai fait un amalgame avec les vecteurs xx'+yy'=0. J'ai pensé que c'était pareil avec les droites ; mais en fait, je n'en savais rien, j'ai pensé que c'était possible ; j'ai voulu aller vite ; plutôt que de laisser vide, je voulais marquer quelque chose.

P : quand tu as écrit ça, c'est parce que tu avais confondu droites et vecteurs ?

G : non, je savais que c'était vrai pour les vecteurs et que là je l'écrivais pour autre chose.

P : est-ce que tu as fait un dessin pour vérifier tes résultats ?

G : non, je n'avais pas le temps. Une année, un prof m'avait dit " si tu ne sais pas quoi faire, marque toujours quelque chose. "

Annexe 4

Exercice 1

L’objectif est d’amener l’élève à reformuler une règle dans le registre de son choix.
Puis, à reconnaître les conditions de son utilisation pour conclure .

1. Voici une règle relevée dans un livre.

> Si C>o, alors A∞C et B∞C sont rangés dans le même ordre que A et B
> et dans l’ordre inverse si C<0

Saurais-tu écrire cette règle d’une autre façon ? Si oui écris la.

2. Application

a) On sait que 5<8 est vrai. Comment se servir de la règle précédente pour comparer 35 et 56 ? 40 et – 64 ?

b) Comment se servir de la règle pour comparer $2\times(\sqrt{2}-1)$ et $3\times(\sqrt{2}-1)$?

c) Comment se servir de la règle pour comparer $2\times(\sqrt{3}-1)$ et $3\times(\sqrt{3}-1)$?

Exercice 2

Travail sur le caractère outil de la règle.

Les prémisses sont fixés.

La conclusion est à trouver mais est fixée par une contrainte.

La règle doit être repérée puis appliquée.

Ecrire un quotient de dénominateur	25	égal à	$\frac{2}{5}$
Ecrire un quotient de dénominateur	7	égal à	$\frac{2}{5}$
Ecrire un quotient de numérateur	$2x$	égal à	$\frac{2}{5}$
Ecrire un quotient de numérateur	$2a$	égal à	$\frac{2}{5}$
Ecrire un quotient de numérateur	$2+a$	égal à	$\frac{2}{5}$
Ecrire un quotient de dénominateur	$3a$	égal à	$\frac{2}{a}$
Ecrire un quotient de dénominateur	a^2	égal à	$\frac{2}{a}$
Ecrire un quotient de numérateur	$2+a$	égal à	$\frac{2}{a}$