L'étude de la parabole dans l'environnement Cabri-géomètre

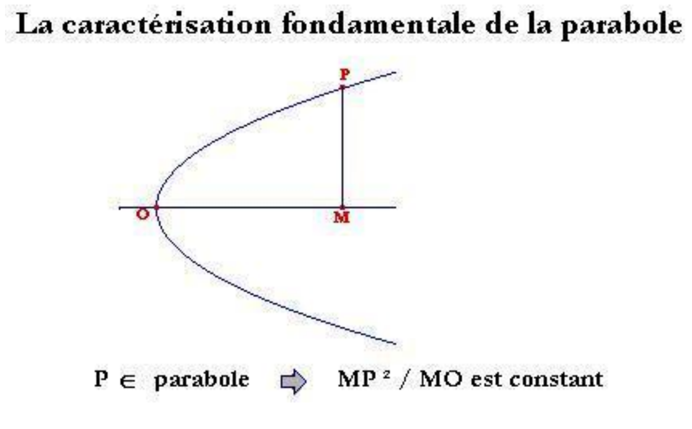
Vincenzo BONGIOVANNI
Laboratoire Leibniz-IMAG-GRENOBLE

Objectif de l´atelier

L´objectif de l´atelier est de présenter des situations qui relient une parabole du plan à son mode de génération dans l'espace . On a choisi le couple géométrie descriptive/Cabri-géomètre pour faire cette articulation. La géométrie descriptive s'avère un instrument efficace de mise en relation dans l'espace, en particulier, parce qu'ici elle est pratiquée dans Cabri-géomètre qui rend possible les opérations classiques de la géométrie.

Problématique

Les aspects qu'on veut montrer dans cet atelier sont liés aux caractérisations de la parabole. Nous voulons présenter une propriété qui est à l´origine de l´histoire des coniques mais qui n´est pas mise en évidence dans l´enseignement de la parabole. Elle est cachée souvent sous la forme y^2 = px. Cette propriété a été très utilisée pendant tout le développement de la théorie des coniques. On l´appelle dans notre travail " caractérisation fondamentale de la parabole".



La constante MP^2 / MO qui sera indiquée par p représente la longueur d´un segment fixe nommé "**latus rectum**". On peut traduire en langage symbolique la propriété par MP^2 = p.MO

Le point de départ de l´étude de la parabole dans l´enseignement, en général, débute par la définition foyer/directrice. À partir de cette définition et considérant les axes Ox et Oy du repère cartésien comme les axes de la parabole et le point O comme sommet, on obtient dans le cadre analytique, les équations $y^2 = px$ et $x^2 = py$. Ces formes de registres, interprétées comme des relations entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque d´une courbe ou parfois comme des expressions algébriques représentant un opérateur sur l´ensemble des nombres réels, cachent le fait que les paraboles représentées peuvent être mises en relation avec la propriété géométrique $MP^2 =$ p. MO.

Le registre $y^2 = px$ empêche d´arriver à la conclusion que :

“ le carré de la distance d'un point quelconque de la parabole à son projeté orthogonal sur son axe est égal ao produit d´un segment de longueur constant p par la distance du projeté orthogonal au sommet de la parabole” et par conséquent d´interpréter $y^2 = p.x$ comme $MP^2 = p.MO$.

Quand on traite le cas général où les équations de la parabole, déduites de la propriété foyer/directrice, sont représentées par les registres $y = ax^2 + bx + c$ et $x = ay^2 + by + c$, on a beaucoup plus de difficulté d´apercevoir que la propriété géométrique $MP^2 = p.MO$ est valable dans ces formes de registres.

Les activités présentées dans cet atelier veulent mettre en évidence la caractérisation fondamentale de la parabole, établir le lien entre le registre $y^2 = px$ et la caractérisation fondamentale et montrer le rôle joué par le latus rectum dans l´étude de la parabole.

Méthodologie

L´atelier commence par une intervention de l´animateur qui montre le fonctionnement de l´épure de la section d´un cône par un plan de bout parallèle à une génératrice. Des écrans de géométrie descriptive animés par Cabri sont présentés. Ils montrent de façon simultanée la perspective d'un objet et son épure. Cette étape s´avère nécessaire dans l´atelier car les activités proposées seront résolues à partir des épures données. Ensuite les participants sont mis en contact avec une partie des activités proposées dans une formation continue d´enseignants de mathématiques.

Activités proposées

La construction de la parabole en vraie grandeur
à partir du cône

Exploration de la propriété fondamentale de la parabole
à partir des manipulations de Cabri

Justificaton mathématique de la propriété fondamentale
de la parabole

Placer toutes les courbes qui vérifient la relation
$MP^2 = p\ MO$ dans un cône de révolution

La premiére activité fait partie d´une situation qui a été décomposée en quatre parties et qui a pour objectif de présenter la première caractérisation de la parabole.

La premiére partie de la situation consiste tout d´abord a construire l'épure de la section du cône en utilisant les notions de géométrie descriptive. Ensuite dans la deuxième partie sont faites des conjectures sur le rapport MP^2/ MO où P est un point de la parabole et M son projeté sur une demi-droite d´origine O. Le déplacement du plan de bout ainsi que le déplacement du sommet du cône permet de conjecturer que le rapport est constant quand P décrit la parabole.
Dans la troisième partie on dépasse l'approche inductive en demandant de justifier mathématiquement que ce rapport est constant.
Finalement la quatrième partie montre que cette propriété est une caractérisation. Il suffit de montrer que toute courbe qui vérifie cette propriété peut être placée de manière convenable dans un cône. Une propriété issue de la premiére partie permet de faire cette construction et de montrer d'une façon dynamique qu'on peut placer toutes les paraboles donnée a priori dans un cône de révolution.
Dans cet atelier nous n´avons présenté que la deuxième et quatrième parties de cette situation.

Activité 1

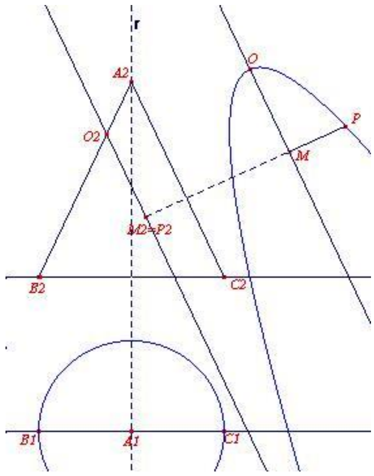
"Exploration de la propriété fondamentale d'une parabole issue d´un cône à partir des manipulations avec Cabri-géomètre."

L'objectif de l´activité est de faire des conjectures sur des invariants associés à une parabole. On veut montrer que le rapport MP^2 / MO (O est le sommet de la parabole et M est le projeté orthogonale d´un point P de la parabole sur son axe) est constant quand P décrit la courbe.

L´activité a été proposée de la manière suivante

Des informations:

*Le dessin est l'épure d'un cône droit de base circulaire et d'axe vertical.
*La base du cône est contenue dans le plan horizontal de projection.
*Le cône est coupé par un plan de bout parallèle à la génératrice (AC).
*En utilisant les méthodes de la géométrie descriptive (plan de bout rabattu sur le plan frontal de projection) on obtient la représentation en vraie grandeur de la section.
*On appelle parabole toute section plane d'un cône par un plan sécant parallèle à une génératrice.
*La droite passant par le sommet du cône et le centre du cercle est parallèle au plan frontal de projection.



Votre tâche:

a)Quel conjecture peut-on émettre sur le rapport MP^2 / MO lorsque P se déplace sur la parabole? Déplacer le plan et à chaque position du plan, observer le rapport quand P se déplace.
b)Par le point O2 construire une droite parallèle à la droite (B2C2). Cette droite coupera la droite r en un point D2. Par le point D2 construire une droite perpendiculaire à la droite (A2B2) qui la coupera en un point E2. Comparer le rapport MP^2/MO avec la longueur du segment [E2O2].
c)Redéfinir le point A2 comme point hors de la droite r. Dans ce cas le cône se transforme en cône oblique. Observer à la suite le rapport quand P décrit la parabole. On peut démontrer que dans ce cas le rapport MP^2 / MO est égal à (A2O2. $B2C2^2$)/(A2C2.A2B2). Vérifier ce résultat avec Cabri.
d)Redéfinir le point A2 de façon qu'il soit sur la droite r et sur le demi-cercle. Dans ce cas le cône se transforme en un cône de révolution particulier : l'angle B2A2C2 est droit. Comparer dans ce cas le rapport MP^2 / MO avec la longueur des segments [A2O2] et [E2O2].

Cette activité met en évidence que le rapport MP^2/MO est constant dans un cône droit ou oblique et montre que si un un cône de révolution avec l'angle du sommet droit est coupé par un plan sécant parallèle à une génératrice, la longueur du latus rectum est le double de la longueur du segment qui lie le sommet du cône au point où le plan sécant coupe la parabole.

Activité 2

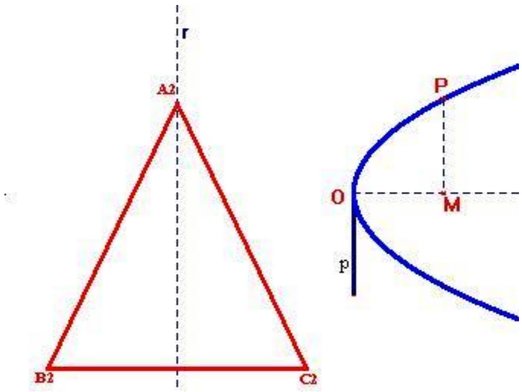
"Placer une parabole donnée sur un cône de révolution."

L'objectif de cette activité est de montrer qu'une courbe qui vérifie la propriété PM^2 = p.OM où p est la longueur d'un segment fixe donné et M le projeté orthogonal d´un point P de la courbe sur une demi-droite d'origine O, peut être placée sur un cône droit quelconque donné.

L´activité a été proposée de la manière suivante :

Des informations:

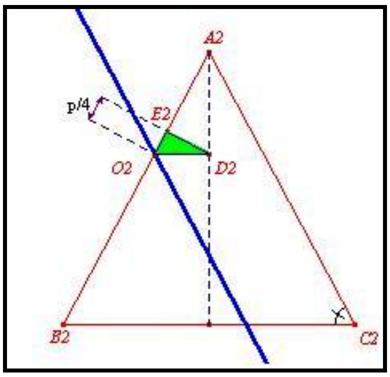
* La courbe bleue est décrite par un point P qui vérifie la relation MP^2 = p. MO
* Cette courbe a été construite avec Cabri à partir d'une demi-droite d'origine O et d'un segment donné de longueur p.
*La projection frontale d'un cône de révolution d'axe vertical est représentée par le triangle A2B2C2.



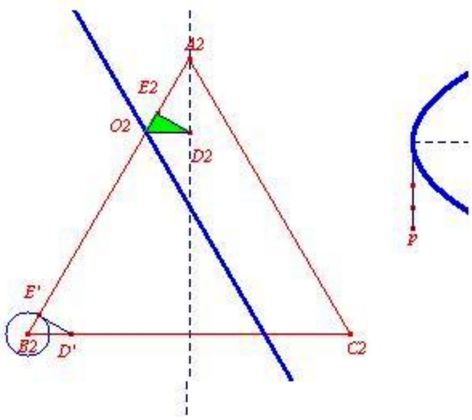
Votre tâche:

Construire un plan de bout qui coupe le cône droit de manière que la section soit la courbe donnée.

Cette activité montre que le latus rectum permet de relier une parabole donnée à son mode de génération dans l´espace.
L´activité antérieure a montré que :



La solution consiste donc à construire le triangle rectangle O2E2D2. Voici la solution :



La troisième activité fait partie d´une autre situation qui présente la caractérisation foyer/directrice et qui a été décomposée en quatre partie :

La construction du foyer de la parabole
dans le cône de révolution

Exploration de la propriété foyer/directrice
à partir des manipulations avec Cabri

Justificaton mathématique de la propriété foyer/directrice

Placer toutes les courbes qui vérifient la propriété
foyer/directrice dans un cône de révolution

À partir du théorème de Dandelin, la premiére partie introduit la notion de foyer et de directrice à partir du cône. On commence par construire l'épure d'une sphère inscrite dans un cône et tangente à un plan sécant. Le point de contact de la sphère avec ce plan sera le foyer de la parabole. Ensuite on donne une interprétation géométrique à la directrice : C'est la droite qui est l'intersection du plan sécant avec le plan passant par les points de contact du cône et de la sphère. La deuxième partie est une tâche d´exploration. On fait des conjectures avec Cabri où la plus importante est celle de l'équidistance d'un point de la parabole à son foyer et à sa directrice. La troisième partie est une justification mathématique de ce résultat. Finalement on montre dans la quatrième partie que toute courbe qui vérifie la propriété PM = PF où P est un point de la courbe, M le projeté orthogonal de P sur une droite fixe et F un point fixe donné non situé sur la droite, peut être placée sur un cône de révolution. Ce résultat est une réciproque et permet d´établir la caractérisation foyer/directrice de la parabole.

Dans cet atelier nous n´avons présenté que la première partie de cette situation.

Activité 3

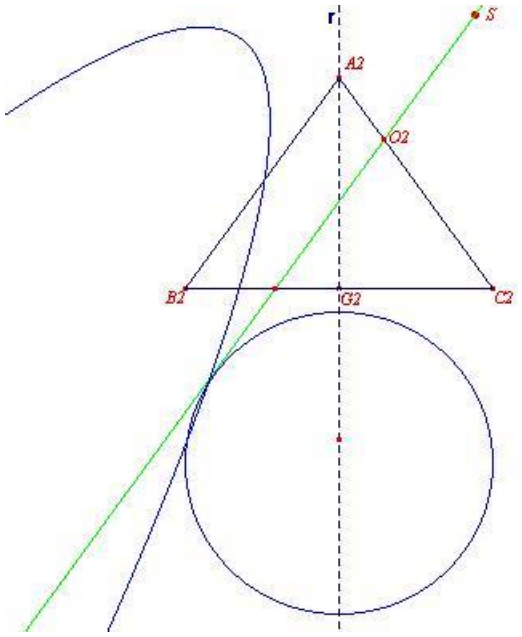
"La construction du foyer et de la directrice d' une parabole issue d'un cône de révolution."

L'objectif de cette activité est de construire le foyer et la directrice d´une parabole en utilisant le théorème de Dandelin et de leur donner une interprétation géométrique.

L´activité a été proposée de la manière suivante :

Des informations:

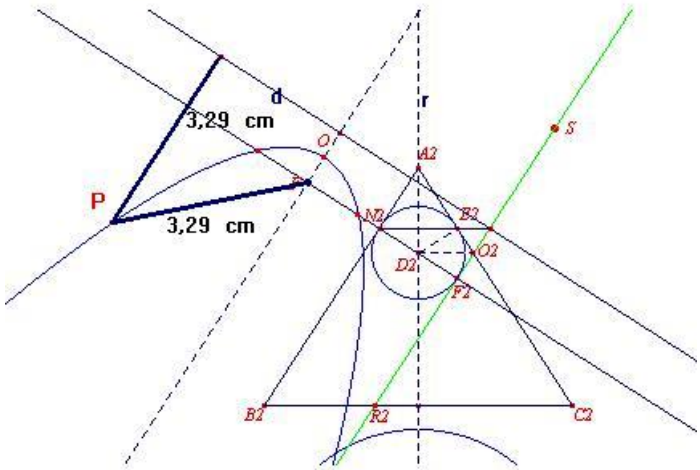
*Le dessin est l'épure d'un cône droit de base circulaire et d'axe vertical .
* Le cône est coupé par un plan de bout parallèle à une génératrice.
*Le théorème de Dandelin met en évidence la détermination géométrique du foyer et de la directrice grâce à la sphère inscrite tangente au plan sécant.
"Un cône droit étant coupé par un plan parallèle à la génératrice, si on conçoit une sphère inscrite dans le cône, et tangente au plan, le point de contact est le foyer de la section du cône par le plan."
*L' intersection du plan qui passe par les points de contacts du cône et de la sphère avec le plan de bout est une droite appelée directrice.



Votre tâche:

a) Construire le foyer et la directrice de la parabole donnée en vraie grandeur.
b) Comparer la longueur du segment qui lie le foyer F de la parabole à son sommet O avec la longueur du segment [E2O2] de l´activité 1.
c) Vérifier avec Cabri que tout point P de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice.

Cette activité met en évidence la caractérisation foyer/directrice de la parabole, donne une interprétation géométrique au foyer et à la directrice de la parabole et montre que la longueur du segment qui lie le sommet d´une parabole à son foyer est un quart de la longueur du latus rectum.
On présente la solution de cette activité



Activité 4

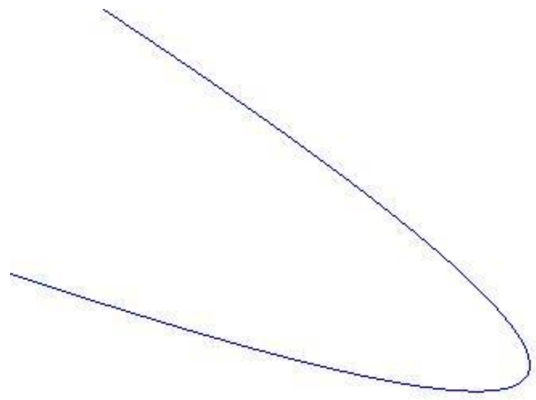
"La construction de l´axe et du foyer d´une parabole donnée dans une position quelconque."
L´objectif de l´activité est de montrer que la caractérisation fondamentale de la parabole est valable non seulement par rapport à un axe mais aussi par rapport à un diamètre. Pour atteindre cet objectif

on demande de construire l´axe et le diamètre de la parabole. On demande aussi de transformer la forme $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ d´une parabole donnée en la forme $y^2 = px$. Ensuite, en utilisant le latus rectum, de la placer dans un cône.

L´activité a été proposée de la manière suivante :

Des informations:

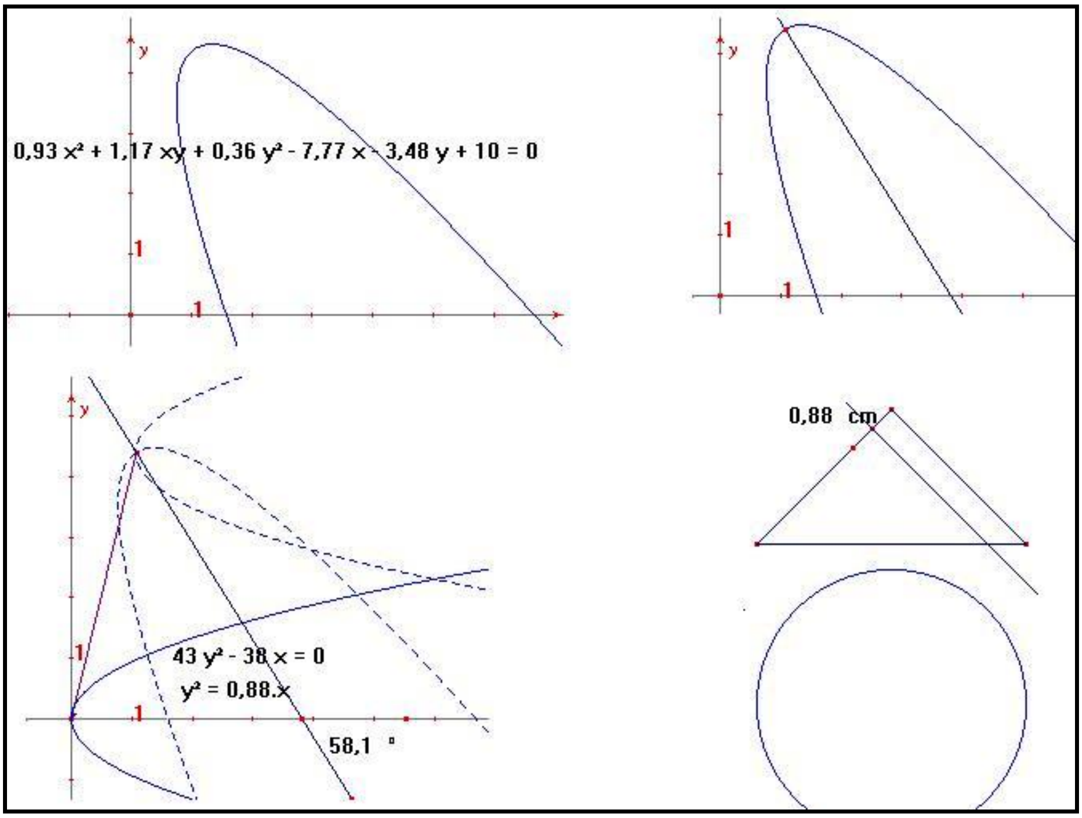
*La droite qui passe par les milieux de deux cordes parallèles [AB] et [CD] d'une parabole s'appelle **diamètre**
*Tous les diamètres d'une parabole sont parallèles entre eux.
*Le diamètre qui passe par les milieux de deux cordes parallèles et qui est perpendiculaire à ces cordes s'appelle **axe** de la parabole.



Votre tâche:

a)Construire un diamètre de la parabole.
Vérifier avec Cabri que : si P est un point de la parabole, M son projeté sur le diamètre selon la direction des cordes parallèles ([AB] et [CD]) et O l´intersection du diamètre avec la parabole, alors MP^2 / MO est constant.
b) Construire l'axe de la parabole.
c) Obtenir avec Cabri l'équation de la parabole sous la forme
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
Faire ensuite une rotation et translation pour obtenir la parabole sous la forme $y^2 = p.x$
d) Placer cette parabole dans un cône. (Construire la trace du plan de bout)

On présente la solution de cette activité



Conclusion

Les activités présentées dans cet atelier ont été proposées lors d´une formation continue des enseignants de mathématiques du lycée au Brésil dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques.

Les analyses des observations montrent que :

a) l´étude de la parabole à partir du couple géométrie descriptive/cabri-géomètre donne un nouvel éclairage à certains éléments géométriques comme le latus rectum, le foyer et la directrice.

b) l´introduction de la "caractérisation fondamentale" dans l´étude de la parabole permet d´interpréter l´équation $y^2 = px$ d´une parabole comme une caractérisation et de transférer la propriété $MO^2 = p.MO$ aux autres formes de registre dans le cadre analytique.

c) l´introduction du latus rectum favorise

-le lien entre le dessin d´une parabole et son mode de génération dans l´espace

-le lien entre la caractérisation fondamentale et la caractérisation foyer/directrice.