Perspectives sur les recherches en didactique des mathématiques

Anna SIERPINSKA
Concordia University - Montréal

> "What's the use in having mathematics all the time, and writing? Better tell us something, about the earth, or even history, and we will listen," say all.
> L. N. Tolstoy, *The School at Yásnaya Polyána*.[1]

Je me suis proposée de vous parler de certaines approches dans les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques qui se font dans plusieurs pays de l'Europe et de l'Amérique du Nord. Mais, je ne vous propose pas un discours académique. Comme le colloque a été organisé à l'occasion de la " fête des mathématiques " soit de l'année mondiale des mathématiques, j'ai décidé de me joindre à cet esprit de fête et vous amuser un peu, je l'espère, en vous offrant une sorte de satyre. Ma présentation aura la forme d'un récit épique, une paraphrase des aventures d'Odysseus (appelé parfois aussi Odysse ou Ulysse). Je prendrai un " subtil " petit problème d'arithmétique et j'en ferai un personnage qui sera mon Odysseus. Je le ferai voyager à travers plusieurs lieux de recherches, et je vous conterai son 'Odyssée', ou plutôt, sa Didactée, c'est-à-dire ses aventures et ses observations.

Le problème que j'ai choisi est le célèbre problème des faucheurs dont on dit qu'il était un des favoris de Lev Nikolaévitch Tolstoï (l'auteur de *Anna Karenina* et *La guerre et la paix*) qui aimait le donner aux enfants et aux adultes illettrés dans son école à Yásnaya Polyána[2].

---

[1] Tolstoy, L.N. 1967: *Tolstoy on Education*. Translated from the Russian by Leo Wiener. Chicago and London: The University of Chicago Press, pp. 227-360, p. 244.

[2] Perelman, Ya. I. 1979: *Algebra can be fun*. Moscow: Mir.

ΔΥΔΑΚΤΕΙΑ

ou le merveilleux voyage d'un subtil problème d'arithmétique

Je vous présente d'abord Odysseus :

Une
équipe
de faucheurs
avait
pour tâche de faucher deux prés
dont l'un était deux fois plus grand que l'autre.
Pendant une demi-journée l'équipe
travailla sur le grand pré.
Puis, l'équipe se
sépara en deux
groupes égaux.
Un des groupes resta
dans le grand pré et finit
de le faucher vers le soir.
Le deuxième groupe faucha
le petit pré, mais, au soir,
il restait encore une
partie à faire.
Cette partie
a été fauchée
le lendemain par un seul
faucheur en une journée de travail.
Combien d'hommes l'équipe comptait-elle?

Pour commencer le récit, imaginons qu'Odysseus s'en va à la guerre de la Mathématique Moderne qui secoue l'Europe et l'Amérique dans les années mille neuf cents soixante. C'est une guerre entre l'Arithmétique et la Géométrie d'une part et l'Algèbre, de l'autre. Et c'est une drôle de guerre, parce qu'il n'y a ni vainqueurs ni vaincus; mais tous les camps y perdent leur innocence. Il y a, quand même, des héros, et Odysseus en est un: il défie l'algèbre et donne un sens nouveau à l'arithmétique.

Mais, ayant ainsi irrité le dieu Algébricaôn (Figure 0), Odysseus va errer longtemps dans les îles et les îlots de " l'Archipel Didactique " avant de revenir dans son pays natal. Je vous invite à le suivre.

Voici, d'abord, le plan de son voyage (Figure 1).

Odysseus au Triangle Épistémologique

Arrivé, un beau matin, sur un triplet d'îlots dénommé 'Triangle Épistémologique', Odysseus se trouva pris au piège. Le voilà maintenant enfermé dans une classe de mathématiques où Algébricaôn, sous l'apparence de la maîtresse d'école, le donne aux enfants de 14 ans. La classe avait travaillé au cours des dernières semaines sur le thème des équations du premier degré.

Ce n'est pas une classe comme les autres. La maîtresse est une étudiante et elle fait son stage dans cette école. Il y a des micros partout, une caméra vidéo qui filme le déroulement de la leçon, et au fond, trois messieurs très sérieux qui observent attentivement ce qui se passe et prennent des notes. Mais ils ne voient pas et ne pensent pas à la même chose.

Le premier est philosophe; il se demande: 'Qu'est-ce que je fais ici? Est-ce que le compte rendu que je vais écrire après cette leçon fera état de la réalité ou de ma perception de la réalité? Si j'essaie plus tard d'expliquer mes observations en construisant une théorie, quelle sera la nature de cette théorie? Sera-t-elle une théorie scientifique, donc falsifiable? Peut-être pas. Peut-être cette théorie appartiendra-t-elle plutôt à l'herméneutique, l'art de l'interprétation des textes puisque, finalement, tout ce que nous aurons après cette leçon, ce sera un protocole, donc un texte?'[3]

Le deuxième monsieur est d'un caractère beaucoup plus vif; il sursaute sur sa chaise à chaque fois qu'il reconnaît un *pattern* familier d'interaction entre la maîtresse et les enfants. Le voilà maintenant tout ouïe: il voit la maîtresse guider les enfants vers une solution. Il reconnaît le pattern si bien connu de 'l'entonnoir'[4].

> Maîtresse: Alors, mes enfants, comment allons-nous résoudre ce problème? Lisa?
> Lisa: Moi, j'ai d'abord supposé qu'il y a quatre faucheurs, alors, avant-midi ils ont fauché ensemble quatre rectangles comme ça du grand pré (*Lisa dessine au tableau quatre rectangles*)

---

[3] Le caractère du personnage de " philosophe " est sensé évoquer les travaux de Hans-Georg Steiner. Mais plus généralement, les questions sur le statut épistémologique et institutionnel des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ont été traitées, par exemple, dans Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.) (1998): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. An ICMI Study. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

[4] Bauersfeld, H. (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht — Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In H. Bauersfeld et al. (Eds.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Hannover: Schrödel, pp. 158-70.

Voir aussi:

Wood, T. 1998: Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funneling of Focusing? In H. Steinbring, M.-G. Bartolini-Bussi, A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, VA: NCTM, Inc., pp. 167-178.

Et:

Voigt, J. 1995: Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. In P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 163-202.

Et puis, l'après-midi, il n'y avait, dans le grand pré, que la moitié de l'équipe, donc deux faucheurs, alors ils ont fauché deux rectangles comme ça (*elle ajoute encore deux rectangles*)

Maîtresse (*interrompt Lisa*): Mais comment peux-tu supposer qu'il y avait 4 faucheurs? C'est justement ce qu'on ne sait pas! Et quand on ne sait pas, qu'est ce qu'on fait, les enfants? (*Silence*) Quand on ne sait pas, c'est qu'une valeur est (*elle élève la voix en attente d'une réponse*)
Kaï: inconnue!
Maîtresse: Bravo! On pose une inconnue. Avec quelle lettre va-t-on la nommer?
Plusieurs étudiants: x !
Maîtresse: Très bien, x. Alors x ça va être le nombre des faucheurs. Il y a encore une chose qu'on ne nous dit pas dans le problème, c'est (*la voix s'élève en attente d'une réponse*)
Togba: Si les faucheurs étaient tous aussi bons les uns comme les autres, s'il n'y en avait pas de paresseux…
Maîtresse (*l'air douteux*): Hmm…
Kaï: Combien il était grand, le grand pré, les mètres carrés…
Maîtresse (*l'air content*): Oui, c'est ça! L'aire qu'un faucheur faisait en une demi-journée. Mettons a pour cette grandeur. On verra bien, à la fin, que cette variable n'est pas très importante, mais elle va être utile dans l'écriture de l'équation. Bon, alors quelle va être notre équation? Avant-midi, x hommes ont fauché chacun une aire a. Combien ont-il fauché ensemble?
Élèves: ax!
Maîtresse: Bravo! (*Elle pose 'ax' au tableau*). Dans l'après-midi il y avait la moitié de l'équipe, donc (*la voix s'élève*)
Kaï: Un demi de x
Maîtresse: Donc, l'après-midi, un demi de x d'hommes ont fauché quelle aire?
Élèves: Un demi de x fois a!
Maîtresse: (*ajoute + 1/2ax , en obtenant 'ax + 1/2 ax'*). Dans le petit pré, un demi de x d'hommes ont aussi fauché une aire de a chacun l'après-midi (*elle pose 1/2ax sur la même ligne que l'autre expression, mais plus loin*), et le lendemain un seul homme a fauché le reste dans une journée. Alors, si un homme fauche une aire de a dans une demi-journée, quelle aire fauche-t-il en une journée entière?
Kaï: 2a.
Maîtresse: (*pose '+2a' à droite de l'écriture précédente*). Mais on nous dit que le grand pré est deux fois plus grand que le petit, alors quelle équation allons-nous obtenir?
Togba: Deux fois ce qu'on a là, à gauche, égale ce qu'on a à droite!
Maîtresse (*le regarde d'un air sévère*): Tu fais toujours la même erreur, Togba!
Kaï: Il faut mettre le 2 à droite.
Maîtresse: Bien sûr! (*elle complète l'équation qui devient: ax + 1/2ax = 2(1/2ax + 2a). Ensuite elle demande à Togba de venir au tableau et de résoudre l'équation*).

Le monsieur 'interactionniste' se réjouit: il peut ajouter cet épisode à sa collection d'exemples d'un enseignement qui, sans rien apprendre aux élèves, réussit tout de même à leur arracher de bonnes réponses!

Le troisième observateur est aussi pensif que le premier mais il paraît un peu triste. Lui, il penche plutôt du côté de l'épistémologie. Il songe à ce que son Maître lui avait dit un jour à propos de ce problème. Pour lui, on n'avait pas besoin d'équations pour modéliser la situation dans ce problème mais, pour le résoudre, il n'était plus suffisant de penser aux nombres seulement dans leur fonction de compter les choses. Ce problème faisait ressortir le caractère relationnel des nombres par la manière dont il se servait des fractions pour décrire les relations entre les grandeurs, sans donner aucune autre information sur ces grandeurs[5]. Pourtant, la manière dont la maîtresse a conduit ses élèves à résoudre le problème a dépouillé celui-ci de cette valeur épistémologique. En quelque sorte, le *concept relationnel de nombre*[6] s'est trouvé remplacé, dans la leçon, par une forme algébrique, et réduit à une manipulation technique des symboles, sans aucun lien avec l'objet représenté par cette forme algébrique - et sans ce lien, il ne pouvait y avoir d'émergence d'un concept, puisqu'un concept est une relation entre un symbole et l'objet auquel il se réfère ou le contexte où il s'applique[7].

La leçon finie, Odysseus réussit, sans beaucoup de peine, à quitter la mémoire des élèves et à se sauver de la classe, profitant d'un moment de confusion, quand Algébricaôn, sous l'apparence de la Maîtresse, se trouva attaqué par l'Épistémologue.

Odysseus au Pays des Jeux et Paradoxes

Quand Éôs aux doigts rosés, née au matin, apparut[8], Odysseus arriva en une belle cité entourée de vignobles. Il *choisit deux de ses compagnons et un héraut et les envoya pour savoir quels hommes nourris de pain habitaient cette terre*. Voici ce qu'au retour, le héraut lui raconta:

Le héraut: C'est un peuple de joueurs; ils entretiennent constamment entre eux des jeux de toutes sortes, dont l'enjeu est, en fin de compte, ce qu'ils appellent le Savoir Mathématique. Certains nous ont dit qu'ils 'mettent en jeu leurs Connaissances Mathématiques', mais nous n'avons pas très bien saisi la différence entre Connaissance et Savoir. Quand nous avons demandé à quelques uns de nous l'expliquer, ils se sont mis à discuter sans fin entre eux. Ils n'ont même pas remarqué notre départ. Plusieurs d'entre eux avaient l'air de préparer une mise en

---

[5] Otte, M. 1981: *What Relevance has the 'Problem of Texts' for Mathematics Education and its Understanding?* Occasional Paper 15. Universität Bielefeld/IDM.

[6] Le terme 'concept relationnel de nombre' ('*relational concept of number'*, dans la littérature anglophone) est entendu ici comme le concept de nombre exprimant une relation.

[7] Steinbring, H. 1999: Reconstructing the Mathematical in Social Discourse - Aspects of an Epistemology-based Interaction Research. In O. Zehavi (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 25-30, 1999, Haifa, Israel*. Published by Technion: Israel Institute of Technology, Vol I, pp. 40-74.

[8] Homère, *Odyssée*, Traduction de Leconte de Lisle, Pocket Classiques, 1988.

scène; ils parlaient d'une 'mise en situation', mais peut-être était-ce un lapsus, car ils utilisaient beaucoup les mots 'acteur' et 'paradoxe'. Nous pensons qu'il s'agit peut-être d'une comédie d'erreurs. En fait, ils ont proposé de te mettre, cher Odysseus, 'en situation'! Nous avons tous été invités à participer au spectacle.

Le héraut et les deux compagnons menèrent alors Odysseus dans une demeure assez vaste mais pas très haute, appelée École, qui retentissait des cris joyeux de quelques centaines d'enfants, jouant des rôles divers comme celui de Sujet Universel, d'Élève Générique, de Sujet Apprenant, de Sujet Acteur, de Sujet Objet (Figure 2[9]). Ils jouaient aussi à des jeux de toutes sortes, soit entre eux, soit avec des grandes personnes appelées Enseignants, ou encore avec le Milieu, organisé pour eux par ces derniers.

Il était assez difficile pour Odysseus de reconnaître les règles de ces différents jeux, parce que personne ne voulait en parler, peut-être parce que lorsque quelqu'un commençait à en parler, ces règles changeaient subitement. Un message chuchoté parvînt aux oreilles d'Odysseus et de ses compagnons, répandu sans doute par des éléments réactionnaires, qu'il y a bien un contrat régissant chacun des jeux, mais que l'important est qu'il soit rompu car, autrement, personne n'apprendrait jamais rien dans cette École. Odysseus remarqua qu'il y avait deux sortes d'Enseignants: les uns semblaient assez gentils, ils parlaient aux enfants, leurs donnaient des explications; les autres tournaient le dos aux enfants et faisaient semblant de ne pas les voir. On lui expliqua (toujours à voix basse) que les premiers se trouvaient sous le Contrat des Situations Didactiques et les autres sous le Contrat des Situations A-didactiques.

Finalement, Odysseus et ses compagnons furent menés à une sorte de théâtre, où la scène était séparée de l'auditoire par une vitre qui ne permettait pas aux acteurs de voir les spectateurs. Odysseus fut conduit sur la scène, et ses compagnons partirent avec les spectateurs. Avec Odysseus, il y avait une vingtaine d'enfants et un Enseignant. Après un mot de l'Enseignant, plusieurs petits groupes d'enfants se jetèrent sur Odysseus comme des loups affamés de Savoir Mathématique. Dans les groupes, les enfants se mirent à l'attaquer de tous les côtés en essayant de trouver une stratégie optimale pour le résoudre et gagner 4 points.

Odysseus était un étranger complet pour l'Enseignant et cela mit très mal à l'aise ce dernier. Il était censé jouer une Situation A-didactique et prétendre ne pas savoir résoudre le problème, mais il la jouait mal, car il ne savait *réellement* pas comment le résoudre. 'Ah, le sacré paradoxe de l'Acteur!' - jurait-il dans sa barbe.

Dans l'un des groupes, les enfants coupaient Odysseus en petits rectangles et discutaient entre eux :

> *Enfant 1*: Si l'on supposait qu'il y avait 4 faucheurs… Ils travaillaient une demi-journée…

[9] Brousseau, G. 1997: *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques 1970-1990*. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 248, 280.

Enfant 2: Et chacun a fauché un bout comme ça du pré (*dessine un petit rectangle*)

Enfant 3: Alors ils ont fauché, ensemble, quatre petits rectangles comme ça (*dessine encore trois rectangles*)

Enfant 1: Dans l'après-midi, ils se sont repartis en deux groupes égaux, donc il y avait 2 hommes dans chaque groupe, deux dans le grand pré et deux dans le petit pré.
Enfant 2: (*complète la figure avec encore 4 rectangles*)

Enfant 3: C'est ce qu'ils ont fait en une journée. Mais il reste encore un peu de ce petit pré, parce qu'il est la moitié du grand et là ce n'est qu'un tiers.
Enfant 2: Ça a été fauché par un seul homme en une journée entière, donc il faut ajouter encore deux rectangles.

Enfant 3: Mais ça, ce n'est pas la moitié du grand pré! Il y a quelque chose qui ne va pas!
Enfant 1: C'est que nous avons commencé avec 4 hommes. Ce n'est pas 4 hommes. Peut-être 5?
Enfant 2: Comment, 5? Comment veux-tu diviser 5 hommes en deux groupes égaux? Ça ne marche pas!
Enfant 1: Six?
Enfant 3: Six ne va pas non plus, parce qu'alors le grand pré est fait de 9 rectangles et donc le petit pré devrait être fait de 4 et demi rectangles. Ça, ce n'est pas possible, le petit rectangle n'est pas divisible, c'est une unité.
Enfant 1: Alors c'est peut-être 8? (*Les enfants vérifient - ça marche*).
Enfants 1,2,3: M'sieur, M'sieur! On a trouvé! On a gagné!

Derrière la vitre, les spectateurs étaient émus. Deux d'entre eux commencèrent à discuter.
Spectateur 1: Ah! Ça me rappelle un *obstacle épistémologique*[10] dont on a discuté au séminaire national! La manière dont ces enfants ont abordé le problème ressemble beaucoup à la méthode de fausse position des Égyptiens. On a vu ça dans le Papyrus de Rhind. C'était une technique qui servait bien à résoudre un certain type de problèmes d'arithmétique, mais son développement s'arrêtait là parce qu'il était très difficile de formuler une 'théorie' de cette technique, tant la possibilité de son application dépendait du contexte de chaque problème. Pour le problème qu'on vient de voir, les enfants commencent comme on le ferait par fausse position, mais ils ne terminent pas par un raisonnement proportionnel, comme dans la technique proprement dite, mais recommencent avec une nouvelle valeur. Alors c'est plus une méthode d'essai et erreur, que celle de fausse position. Dommage. Mais, de toute façon on a un obstacle, une connaissance qui fonctionne bien pour certains problèmes et pas pour d'autres mais qui est conçue comme étant universelle ou qui devient une habitude. Si ces enfants se mettaient à croire que tout problème d'arithmétique peut être résolu de cette façon, alors ça fonctionnerait comme un

[10] Brousseau, G. 1983: Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4*(2), 165-198.

obstacle. On pourrait peut-être voir les symptômes de cet obstacle en changeant un peu les données du problème. Si l'on posait que le petit pré était 2/5 du grand et qu'il fallait 12 hommes pour finir le boulot le lendemain… alors ça donnerait… ça donnerait… 120 hommes dans l'équipe. Les enfants pourraient s'obstiner à faire pareil, en essayant les nombres pairs. Mais pour arriver au nombre 120 par essai et erreur il faut beaucoup de patience. Alors on pourrait voir certains franchir l'obstacle et chercher une nouvelle méthode.

Spectateur 2: De 8 à 120 - voilà un beau *saut informationnel*[11]! Tu parles donc d'un changement des variables de la situation, de façon à ce que les enfants se voient contraints à chercher une autre stratégie et donc à mettre d'autres connaissances en jeu. Mais de quelles connaissances cette situation serait-elle, en fait, spécifique? A priori, quand on analyse le problème original, on pourrait penser qu'il est idéal pour contraindre les enfants à utiliser le concept relationnel de nombre. La façon de résoudre le problème, qui m'a paru la plus naturelle, était de penser en termes de fractions et, finalement, les fractions sont une expression de relations entre les grandeurs. On peut raisonner comme ça : ce que la moitié de l'équipe a fauché dans l'après-midi est la moitié de ce que toute l'équipe a fauché dans la matinée, donc 1/3 de l'aire du grand pré. L'aire du petit champ qu'il reste à faire le lendemain est donc $1/2 - 1/3 = 1/6$ du grand pré. Comme cela a été fauché par un homme en une journée de travail, la moitié, donc 1/12 a été fauchée pendant la demi-journée. Alors en une demi-journée un homme fauche 1/12 du grand pré. En divisant les 2/3 du grand pré qui ont été fauchés le matin par toute l'équipe, par le 1/12, on obtient 8, donc il y a huit hommes dans l'équipe (Figure 3). Mais, j'ai été déçu en observant ce qui se passait dans la classe, parce que les enfants ont réussi à résoudre le problème en n'utilisant la notion de nombre que dans sa fonction de compter; en effet, ils n'avaient pas besoin de fractions. Je me demande, maintenant, si, avec le changement des valeurs des variables de la situation comme tu le proposes, on la rendrait plus favorable à l'emploi de fractions.

Les deux spectateurs plongèrent alors dans une nouvelle analyse à priori[12] de leur situation.

Les compagnons d'Odysseus étaient émus pour une toute autre raison que les deux autres spectateurs. Ils étaient horrifiés de voir leur maître coupé en petits rectangles et se lancèrent à sa rescousse. Ils profitèrent de l'entracte pour le recoller et se sauver des lieux de l'École.

---

[11] ibid.

[12] Artigue, M. 1989: Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 9*(3), 281-308.

Artigue, M. & Perrin-Glorian M.-J. 1991: Didactic Engineering, Research and Development Tool: Some Theoretical Problems linked to this Duality. *For the Learning of Mathematics 11*.1, 13-18.

Odysseus au Belvédère

Quand Éôs aux doigts rosés, née au matin, apparut, Odysseus arriva sur une vaste île au milieu de laquelle se trouvait un assez haut promontoire que les habitants appelaient, avec piété, 'Le Mont des Mathématiques' ou 'Le Belvédère'[13]. Contrairement au peuple du Triangle Épistémologique, les habitants de cette terre croyaient en un seul Dieu – Les Mathématiques – et en la possibilité d'avoir une seule religion cohérente expliquant tous les phénomènes d'enseignement des mathématiques. Sur le sommet du rocher était assis un Sage dont le champ de vision recouvrait tous les îlots de l'Archipel Didactique.

Voyant Odysseus monter la colline d'un air assez incertain, le Sage lui demanda: *Qui es-tu? D'où viens-tu? Où sont ta ville et tes parents?*

Odysseus: Ô Sage, je suis un problème d'arithmétique et je parcours le monde poursuivi par la colère du Dieu Algébricaôn qui veut me réduire à un calcul écrit mécanique et me dépouiller ainsi de mon sens. Moi, je veux qu'on me raisonne; j'appartiens à l'oral et non à l'écrit. Les paysans de Yásnaya Polyána que j'amusais dans mon enfance ne m'auraient pas touché d'une plume. Ils comptaient sur leurs doigts ou avec de petits cailloux en expliquant ce que chaque geste représente et ne perdaient jamais le contrôle du sens des opérations qu'ils faisaient.

Le Sage: Pourquoi opposes-tu l'oral à l'écrit et pourquoi mets-tu cette opposition en parallèle avec celle du raisonnement et du calcul 'mécanique'? Nul ne peut nier que les mathématiques sont basées sur le raisonnement et pourtant *c'est l'existence d'un système de notation très éloigné de la parole qui rend possible la pensée et les opérations mathématiques*[14]. Les mathématiques ne sont pas de *l'oral mis par écrit*[15]. Je suis sûr qu'on pourrait te résoudre oralement, mais de là à faire des mathématiques…

Odysseus: Alors tu penses que, si l'on me résout *modo arithmetico*, dans sa tête, on n'a pas encore fait des mathématiques?

Le Sage: Probablement pas. Il y aurait deux raisons à cela. Premièrement, bien qu'il soit vrai que, historiquement, *les premières activités de comptage devaient*

---

[13] Chevallard, Y. 1991: Postface: Didactique, anthropologie, mathématiques. Dans: Y. Chevallard et M.-A. Johsua, *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné, avec un Exemple d'analyse de la transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, pp. 199-233; p. 233.

Voir aussi:

Sierpinska, A. 1995: Some Reflections on the Phenomenon of French didactique. *Journal für Mathematik-Didaktik 16* (3/4), 163-192.

[14] Goody, J. 1977: *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage*. Paris: Éditions de Minuit, p. 213; cité par M. Bosch et Y. Chevallard, dans 1999: La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*.1, 77-123, p. 101.

[15] Bosch et Chevallard, ibid, p. 100.

recourir largement à une ample variété d'objets matériels, graphiques et gestuels et les premiers raisonnements déductifs de la géométrie euclidienne se réalisaient sur des objets graphiques tracés sur le sable …, on ne peut ignorer que, au moins depuis Viète, les mathématiques progressent par le biais du symbolisme écrit, de telle sorte que l'on peut presque suivre toute l'histoire de ce progrès en restant dans le registre de l'écriture[16]. Mais l'École croit toujours, comme toi, que la manipulation des écritures en mathématiques est réduite à une activité *mécanique*. On croit que l'élève fait preuve de 'savoir ce qu'il fait' seulement lorsqu'il produit des figures, des diagrammes et accompagne cela d'un discours oral ou oral mis par écrit. Deuxième raison : résoudre un problème isolé, comme toi, c'est résoudre une devinette, ce n'est pas faire des mathématiques. Pour que tu sois un problème de mathématiques il faut que tu fasses partie de toute une *praxéologie* mathématique[17].
Odysseus: Une… quoi? D'une structure mathématique, tu veux dire? On m'a toujours dit que je suis *subtil*, mais je vois que je ne suis pas assez subtil pour pouvoir te suivre.
Le Sage: Les structures, c'est un peu dépassé. Maintenant nous avons une vue plus large; nous ne sommes plus seulement des mathématiciens, nous sommes des anthropologues des mathématiques. Notre objet d'étude ce sont bien toujours les mathématiques, et nous croyons que le problème de l'enseignement des mathématiques doit être posé non pas en termes de l'activité cognitive de l'apprenant (cela appartient à la psychologie), ni en termes des actions de l'enseignant (ce qui appartient à la pédagogie), ni, non plus, en termes des interactions sociales entre les deux (appartenant à la sociologie) mais en termes du *savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble*. Mais la perspective anthropologique sur le savoir mathématique nous le fait voir *dans le cadre plus large des pratiques mathématiques dans l'ensemble des institutions de la société*[18] . Chaque objet de savoir se définit, dans ce cadre, comme élément d'une *praxéologie*, c'est-à-dire, d'un système composé d'un ensemble de tâches reconnues comme importantes pour une institution, de techniques ou 'manières de faire' pour leur accomplissement, d'une technologie ou d'un discours descriptif et justificatif des tâches et des techniques, et d'une théorie justifiant, à son tour, la technologie. Si tu désires adhérer au savoir mathématique, Odysseus, il faudrait que tu te définisses comme élément d'une praxéologie mathématique.
Odysseus: Je ne saurais vraiment pas comment m'y prendre. Toute cette théorie m'intimide un peu. *Batiouchka* Tolstoï ne prétendait pas créer une théorie de l'enseignement; en fait son point de vue était fondamentalement *anti-théorique*, basé

---

[16] Bosch et Chevallard, ibid., p. 103.

[17] Chevallard, Y. 1997: Familière et problématique, la figure du profeseur. *Recherches en Didactique des Mathématiques 17*.3, 17-54.

[18] ibid, p. 79

seulement sur sa *philosophie générale de la vie et sur son expérience pratique dans son école pour enfants de paysans à Yásnaya Polyána*[19]. Il critiquait fortement la théorie et la pratique de l'éducation tant classique que celle de son temps. Il insistait pour qu'on caractérise l'éducation comme *un processus de libération de l'individu qui serait conduit à l'improvisation créative par la voie de la compréhension*[20]. Le sens de l'éducation pour lui n'était pas la socialisation et la préparation des jeunes pour des emplois et des postes de direction dans la société; le but de l'éducation était de maintenir et de développer une *culture*, une *société civilisée*[21]. Certes, on peut toujours théoriser tout cela. Tu pourrais, par exemple, dire que l'activité pédagogique de Tolstoï faisait bien partie d'une institution, notamment l'institution informelle du mouvement assez répandu à l'époque de 'porter les lumières de l'éducation' aux paysans illettrés. Les instructeurs, venant souvent des familles de propriétaires terriens, organisaient des 'foyers' communautaires ou des écoles populaires, où les gens pouvaient se réunir et apprendre à lire et à écrire, à compter et à raisonner. L'écriture, pour les adultes, était une habileté souvent inaccessible; il fallait donc, pour le calcul et le raisonnement, trouver des problèmes qu'ils pourraient résoudre sans rien écrire. J'étais un de ces problèmes. On pourrait peut-être dire que j'appartiens au domaine du savoir pédagogique. Pourrait-on dire que je fais partie d'un savoir mathématique? Certainement pas du savoir mathématique 'savant', universitaire; à l'université on ne s'intéresse pas à résoudre des problèmes comme moi.

Le Sage: Je crois que tu as là un problème d'identité assez sérieux, Odysseus, et tu as besoin d'aide professionnelle. Comme tu sembles être familier avec le langage des 'structures', pour t'aider, je vais recourir à une technique d'analyse élaborée par mon collègue de l'île des Champs Conceptuels. Nous ne sommes pas d'accord sur tous les points, mais tous les deux nous privilégions des modèles des connaissances mathématiques qui donnent un rôle essentiel aux concepts mathématiques eux-mêmes[22]. En utilisant donc l'approche de ce collègue, je dirais que tu es une *structure multiplicative* de type 'produit de mesures'[23]. Trois espaces-mesure entrent en jeu: M1 = [faucheurs], M2 = [journées de travail], M3 = [surfaces fauchées]. On peut compter les faucheurs en fractions de l'équipe entière, qui va être représentée

---

[19] Archambault, R.D. 1967: Introduction. In *Tolstoy on Education*, Translated from the Russian by Leo Wiener. Chicago and London: The University of Chicago Press, pp. v-xviii, p. vi.

[20] ibid., p. ix

[21] ibid.

[22] Vergnaud, G. 1990: Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in M. Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 177-191; p. 146, cité in Bosch et Chevallard, ibid, p. 117.

[23] Vergnaud, G. 1983: Multiplicative Structures. In R. Lesh and M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, pp. 128-175.

par le nombre 1. On peut aussi mesurer les surfaces fauchées en fractions de la surface du grand pré. On peut modéliser les relations entre les trois espaces par une fonction bilinéaire:

$$f : M1 \times M2 \varnothing M3$$

définie par

f(*x* faucheurs, *y* journées de travail) = surface fauchée par *x* faucheurs en *y* journées de travail.

Posons *n* le nombre des faucheurs dans l'équipe.

D'après les données de ton problème,

$$f(1, 1/2) + f(1/2, 1/2) = 1$$
$$f(1/2,1/2) + f(1/n, 1) = 1/2$$

En se servant de l'hypothèse de la bilinéarité de f, on déduit très rapidement de la première équation que $f(1,1) = 4/3$, ce qui, substitué à la deuxième, donne $n = 8$. Et voilà! (*Le Sage ricane d'une façon diabolique*)

Odysseus: Oh misère, oh horreur! Voilà que Algébricaôn frappe encore! Je vais me sauver, mais, avant, j'ai encore une question: au Triangle Épistémologique l'Épistémologue parlait d'Objet et toi aussi tu as parlé d'Objet - mais pensez-vous à la même chose? J'ai la tête qui tourne - je ne vois plus très bien…

Le Sage: Non, non, non, on ne parle pas du même Objet: lui, son Objet est l'attribut d'un signe, c'est un objet sémiotique, la référence, le contexte de l'utilisation d'un signe. Mon Objet à moi est une unité de savoir; est objet de savoir tout ce qui est reconnu par un sujet ou une institution en tant qu'objet. En fait, tout peut être Objet!

Odysseus: Ah, ma pauvre tête! Je me sauve!

Odysseus au Pays des Clubs

Quand Éôs aux doigts rosés, née au matin, apparut, Odysseus arriva sur une île bordée de falaises blanches (Figure 4). Il *choisit deux de ses compagnons et un héraut et les envoya pour savoir quels hommes nourris de pain habitaient cette terre*. Voici ce qu'au retour, le héraut lui raconta:

Le héraut: C'est un pays où l'on ne respecte pas un roi unique, chacun semble vouloir être maître sur son domaine, mais il semble qu'il y a une chose qui les unit tous: c'est l'horreur d'un monstre qu'ils appellent 'The National Curriculum', qui, apparemment, veut leur imposer une seule vision 'correcte' des mathématiques et de leur enseignement (Figure 4). Ils ne sont pas habitués à ça. Leur société est organisée en ce qu'ils appellent des 'clubs' qui sont des classes d'abstraction de la relation 'avoir la même tasse de thé' ('to have the same cup of tea', dans la langue du pays). J'ai vu des gens passer près de la porte d'un club, dire avec dédain, 'ce n'est pas vraiment ma tasse de thé[24]', et entrer dans un autre club (Figure 5). Il y a donc

[24] En anglais: 'Not exactly my cup of tea!'

des clubs (ou 'tasses de thé') de toutes sortes. Si tu veux, Odysseus, nous pouvons visiter un couple de ces clubs[25].

Ayant pris soin, selon la coutume locale, de mettre des chaussettes avant d'enfiler leur sandales, Odysseus et ses compagnons partirent à la découverte de clubs.

L'enseigne du premier qu'ils ont visité était décorée de quelque chose ressemblant à un ressort hélicoïdal dont les spires portaient des inscriptions telles que : " Je démarre ! ", " Je me lance à fond ", " Je rumine ! ", " Je continue ! ", " Je comprends ! ", " Je doute ! ", " Je contemple ! "[26]. Odysseus et ses compagnons furent accueillis à l'entrée du club par un vieux monsieur à longue barbe blanche, habillé d'une tunique grecque (Figure 6). Il portait le nom pittoresque de Calebus[27]. Par des allusions discrètes, il leur a fait *remarquer*[28] que les murs du club étaient couverts de slogans dont certains engageaient les membres du club à faire, doucement mais consciemment, des *glissements d'attention*. Au milieu de la salle principale du club, parfaitement circulaire, il y avait un grand toboggan en forme de colimaçon sur lequel les membres du club s'entraînaient à les faire. En descendant la glissade ces personnes de tous sexes et ages traversaient un enchaînement des secteurs appelés 'formuler', 'saisir le sens de', 'manipuler'[29]. Calebus expliqua aux visiteurs que cet exercice aidait ce gens à devenir bien versés dans l'art de l'abstraction[30] et non seulement dans celui de la soustraction.

Et puis soudain, Calebus remarqua qu'Odysseus était, en fait, rien d'autre qu'un problème des mathématiques. Il s'est tout de suite lancé dans sa résolution. Avec force grognements et ronchonnements de frustration initiale, des tâtonnements, des saisissements enfin du sens des conditions du problème, des cramponnements avec les contradictions dans ses conclusions, des agrippements à des choses qui semblaient marcher[31], il a finalement trouvé la réponse, *sans utiliser une seule lettre*

---

[25] Anglicisme: traduction litérale de l'expression '*a couple of*'; en français, on dirait, 'visitons deux ou trois de ces clubs'.

[26] Mason, J. 1994: *L'Esprit Mathématique*, Modulo Éditeur, Montréal, p. 102. Traduction de 'Getting started, Getting involved, Mulling, Keeping going, Insight, Being Sceptical, Contemplating', de l'original anglais, Mason, J. 1982: *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley, London, p. 136.

[27] Allusion à Caleb Gattegno.

[28] *'Notice'* dans la langue du pays.

[29] '*Articulating, getting a sense of, manipulating*', dans la langue du pays.

[30] Mason, J. 1989: 'Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention', *For the Learning of Mathematics 9* (2), 2-8.

[31] '*Grumbling, griping, groping, grasping, grappling, gripping'* dans la langue du pays. Voir: Mason, J. 1998: 'Researching from the Inside in Mathematics Education', in A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*. Dortrecht, Kluwer Academic Publishers, 357-377.

dans sa résolution (Figure 7). Cela l'a mis de très bonne humeur. Odysseus en fut très heureux lui aussi. Sa joie fut encore augmentée lorsque Calebus lui proposa de joindre le club de ses disciples et boire avec lui une tasse de thé.

En revenant, le soir, vers leur navire, Odysseus et ses compagnons sont passés près de la porte d'un autre club, où, visiblement, il se passait quelque chose d'important (Figure 8). Une délégation des membres du club agitait une bannière avec l'inscription : 'Les théoriciens de l'activité du monde entier, unissez-vous !'. Comme un des observateurs de ce spectacle a informé Odysseus, le club tenait ce jour-ci un meeting dont l'orateur principal devait être un disciple du fameux psychologue Davydus[32]. On s'attendait à ce qu'il allait proposer une nouvelle révision de sa théorie. Les membres du club en étaient tout excités, car ils espéraient de transformer leurs Zones de Développement Proximal, déjà quelque peu usées, en de véritables Espaces Symboliques[33]. Ces espaces, paraît-il, pourraient permettre au collectif du club de résoudre certains problèmes mathématiques. Pour le moment, cependant, les membres du club, en tant qu'individus, ne remarquèrent pas le passage d'Odysseus, qui put donc se sauver sans se faire arrêter et regagner paisiblement sa nef.

La traversée de l'Okéanos

Bien reposé après la visite dans le club de Calebus, Odysseus embarqua pour ce qu'il savait être une longue et aventureuse traversée. En effet, il subit les charmes dangereux de la sorcière Technologie, il tira des bords entre la Skyllè de la Pratique et la Kharybdis de la Théorie, et il lui fallut beaucoup de courage pour résister à l'Analyse du Discours enivrant des Seirènes. À bout de vivres, il jeta l'ancre près d'une île ensoleillée, dont les habitants tissaient paisiblement des matériaux scolaires. Ses compagnons, épuisés et affamés, nagèrent vers l'île et décidèrent d'y rester, séduits par la possibilité d'une vie sinon facile, du moins sans risque et confortable. Odysseus, complètement abattu par cette trahison de son équipage, retourna à la nef et continua son voyage seul. Zeus, irrité par l'incapacité d'Odysseus de persuader ses compagnons de rester près de ses recherches, lui envoya une tempête qui détruisit sa nef et le laissa flotter sur une épave pendant plusieurs jours. Mais *Athènè aux yeux clairs* eu pitié de lui et le fit débarquer finalement sain et sauf, quoiqu'à bout de forces, sur une terre assez vaste et habitée par des hommes nourris de chiens chauds, et pleins de compréhension.

---

[32] Davydov, V.V., 1990, *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*. Soviet Studies in Mathematics Education, Vol. 2. (Edited by Jeremy Kilpatrick). NCTM, Reston, Virginia.

[33] Meira, L., Lerman, S. (à paraître) : *The Zone of Proximal Development as a Symbolic Space*.

Odysseus aux Pays des Chariots

Quand Éôs aux doigts rosés, née au matin, apparut, Odysseus se réveilla. Devant lui avançait un grand nombre de *chariots magnifiques aux roues arrondies* portant des panneaux annonçant, en lettres brillantes, l'arrivée de la Compréhension dans les classes de mathématiques[34]. Il était ébloui: c'était bien ce dont il avait toujours rêvé! S'habituant peu à peu à la lumière du jour il vit qu'il y avait, sur cette terre, d'autres groupes de chariots encore, mais beaucoup plus petits et qui portaient des inscriptions quelque peu moins brillantes. Il essaya de déchiffrer ces inscriptions: 'Problem Solving', 'Constructivism', 'Situated Cognition', 'Communication in the classroom', 'Ethnomathematics', 'Language', 'Discourse analysis', et d'autres. Il vit soudain un petit groupe de quatre chariots se détacher du 'Constructivisme' et devenir très bruyant. Les chariots brandissaient ces lettres: A, P, O, S, et le conducteur de chacun portait un chapeau de même forme mais de couleur différente, rouge vif, vert, jaune, bleu[35]. Le groupe scandait: 'Action, Process, Object, Schema' et lançait des 'Vive Piaget!' avec force rires et enthousiasme. Le groupe de 'Situated Cognition' répondait par des 'À bas Piaget!' avec beaucoup de conviction mais sans la même gaieté.

Intrigué, Odysseus s'approcha du groupe APOS pour savoir ce qui nourrissait leur enthousiasme. Il sauta dans le premier chariot et demanda au conducteur: 'Pourquoi êtes-vous si contents?'. Le conducteur répondit:

Chapeau Rouge : C'est parce que nous tenons ferme malgré tous les changements. En fin de compte, notre théorie est une théorie de la compréhension en mathématiques. Un schéma cognitif est une composante de base de la compréhension[36].

Odysseus: D'après toi quels schémas cognitifs un étudiant pourrait-il utiliser pour me résoudre?

Chapeau Rouge: Hm, je n'y ai jamais réfléchi. Tu es un petit problème d'arithmétique, et moi, je me suis toujours occupé de l'acquisition des concepts plutôt que de la résolution des problèmes, et, en plus, des concepts d'algèbre abstraite, et non des concepts élémentaires.

Odysseus: (*laisse échapper une larme*)

---

[34] Fennema, E. & Romberg, T. (Eds.), 1999: *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[35] Allusion aux casquettes de Ed Dubinsky.

[36] Rumelhart D.E. 1980: Schemata: The Building Blocks of Cognition. In R.J. Spiro, B.C. Bruce, W.F. Brewer (eds.), *Theoretical Issues in Reading Comprehension. Perspectives from Cognitive Psychology, Linguistics, Artificial Intelligence, and Education*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 33-58.

Chapeau Rouge: Bon, essayons quand même. On pourrait te résoudre à l'aide des fractions et d'un raisonnement proportionnel, en s'aidant tout au plus d'un petit diagramme, sans même avoir besoin d'écrire quoi que ce soit.
Odysseus: (*semble soulagé*)
Chapeau Rouge: Mais ce que nous appelons 'fractions' et 'raisonnement proportionnel' pourraient n'être, du point de vue cognitif, chez l'élève, rien que des actions intériorisées ou des ensembles des telles actions, soit des processus, qui attendraient seulement d'être encapsulés en objets mentaux et schémas que nous modélisons, en mathématiques, par les concepts de nombres rationnels et de transformations linéaires[37].
Odysseus (*d'un air étonné*): Voici la troisième fois que j'entends, au cours de mon voyage, le terme 'objet', et ceci encore dans un sens différent? Au Belvédère, un 'objet' était un élément d'une culture - 'objet de savoir', disait-on. Ici, 'objet' est une structure cognitive, soit un modèle qualitatif et psychologique du fonctionnement de la pensée, et non un modèle mathématique d'une résolution possible d'un problème comme chez ce collègue de mon Sage du Belvédère, qui m'aurait façonné en une belle structure multiplicative bilinéaire.
Chapeau Rouge: Contrairement à tes amis du Belvédère, je pense, en effet, que le savoir et son acquisition ou l'épistémologie et la psychologie de l'apprentissage ne sont pas facilement séparables[38].
Odysseus: Je te remercie de ces explications. Il y a encore une petite chose qui me tourmente: peux-tu me dire pourquoi, dans ce pays, la Compréhension dans les classes de mathématiques a besoin de tant d'avocats ?
Chapeau Rouge: C'est parce sans cela la Compréhension aurait probablement quitté notre pays. Elle y a un puissant ennemi, le Grand Méchant Béhaviorisme, qui tient en son pouvoir une bonne part de notre système d'éducation et beaucoup de nos enseignants. Même votre Dieu Algébricaôn est à ses services.
Odysseus: Malheur, il ne me fallait plus que le Grand Méchant Béhaviorisme! Je dois me sauver.

Chapeau Rouge, apprenant qu'Odysseus n'a pas les moyens de se payer le retour, l'aida à obtenir une subvention de recherche; avec ces fonds Odysseus construisit une nef solide sur une base orthonormée et revint dans son pays.

---

[37] Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., Vidakovic, D., 1999: One Theoretical Perspective in Undergraduate Mathematics Education Research. A Research Forum Presentation. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. July 25-30, Haifa, Israel,* pp. I-95-110.

[38] Dubinsky, E. 1991, Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. In L.P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. New York: Springer Verlag, pp. 160-202.

Retour au pays natal

De retour dans les plaines immenses de son pays natal, Odysseus alla rencontrer son ancien compagnon Mentôr et s'informa de ses nouvelles.

Mentôr: Oh, chez nous, cher ami, les choses vont de pire en pire. Comme avant, on se soucie peu du malheur humain en général, et des enfants qui ont des difficultés en mathématiques en particulier. Mais avant, au moins, on s'intéressait aux talents mathématiques, on avait des méthodes pour les identifier et puis on les aidait à continuer en mathématiques. En fait, on les traitait comme des petits princes.

Odysseus: C'est peut-être mieux comme cela. *Batiouchka* Tolstoï n'aurait pas approuvé de cette attitude discriminatoire; il avait tant à cœur l'éducation de tout le peuple du pays. Mais dis moi quand même, comment peut-on savoir que quelqu'un a un talent mathématique? Les gens qui s'occupaient de la sélection, en avaient-ils une définition?

Mentôr: Oui, il y avait bien une définition! Qu'est-ce que tu veux, ces scientifiques étaient capables de tout! Tous les gosses à l'école la connaissaient par cœur, tout comme *l'Internationale*. La définition disait que n'est doué en mathématiques que celui qui est capable de formaliser, généraliser, symboliser, visualiser, et de raisonner logiquement, économiquement, inversement aussi bien que directement, de façon flexible, et sans se laisser influencer par le sens usuel des mots et les habitudes du sens commun[39]. Tu vois bien que ce n'est pas facile.

Odysseus : Mais les spécialistes, comment s'y prenaient-ils pour diagnostiquer un talent mathématique?

Mentôr: Pour chaque caractéristique du talent mathématique ils avaient un ensemble de systèmes de problèmes pris dans différents domaines des mathématiques, par exemple, l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie. Un système était composé de 5 à 6 problèmes, et pour chacun de ces problèmes ils en avaient de 4 à 5 versions, identifiées de (a) à (d) ou (e). Je vais te donner un exemple. Supposons qu'on veut diagnostiquer l'habileté de *pensée abstraite* chez les élèves. Alors on essaie d'inventer des systèmes de problèmes. Dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre on prend une série de, mettons pour simplifier, trois problèmes. Les problèmes vont en ordre croissant de complexité, et leur versions, disons, (a), (b),

---

[39] Plus précisement, un talent mathématique est capable de (a) de formaliser le matériel mathématique, de distinguer sa forme de son contenu, de faire abstraction des relations numériques et spatiales concrètes et d'opérer avec la structure formelle des relations;
(b) de généraliser le matériel mathématique et de se rappeler de ces généralisations;
(c) d'opérer avec les représentations symboliques des nombres, relations et autres entités mathématiques;
(d) de raisonner logiquement;
(e) de prendre des raccourcis de raisonnement pendant la résolution des problèmes;
(f) de passer facilement d'un train de pensée direct à un train de pensée inverse; en particulier - de passer aisément d'une preuve directe à un raisonnement par l'absurde ou du théorème à sa réciproque;
(g) de passer facilement d'une opération mentale à une autre et de ne pas se laisser trop influencer par le sens usuel des mots et les habitudes du sens commun;
(h) de visualiser les relations spatiales (Krutetskii, V.A. 1976: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago & London: The University of Chicago Press, p. 84-88.

(c), (d) sont de plus en plus exigeantes vis à vis de la pensée abstraite. On commence l'entrevue avec un élève en lui donnant le premier problème en sa version (d) soit la plus exigeante vis à vis de la pensée abstraite. S'il la résout, on passe au problème suivant. S'il ne la résout pas, on lui donne la version (a) soit la moins exigeante vis à vis de cette habileté. On compte le nombre de versions dont il a besoin pour arriver à la version la plus exigeante. À la fin, on compte le nombre de problèmes que l'élève a résolus et la moyenne des nombres de versions dont il a eu besoin pour arriver à la version la plus abstraite[40]. Je vais te donner un exemple d'une telle série des problèmes, en t'incluant comme le dernier et le plus complexe, mais tu en seras la version la moins exigeante vis à vis de la pensée abstraite.

Problème 1.

Version a. Un menuisier et son apprenti préparent une planche de bois pour le toit d'une maison en 1 heure. L'apprenti travaille deux fois plus lentement que son maître. De combien de temps aurait besoin l'apprenti pour préparer la planche tout seul?

Version b. Un menuisier et son apprenti préparent une planche de bois pour le toit d'une maison en 1 heure. L'apprenti travaille trois fois plus lentement que son maître. De combien de temps aurait besoin l'apprenti pour préparer la planche tout seul?

Version c. Un menuisier et son apprenti préparent une planche de bois pour le toit d'une maison en 1 heure. L'apprenti travaille une fois et demi plus lentement que son maître. De combien de temps aurait besoin l'apprenti pour préparer la planche tout seul?

Version d. Un menuisier et son apprenti préparent une planche de bois pour le toit d'une maison en 1 heure. L'apprenti travaille a fois plus lentement que son maître. De combien de temps aurait besoin l'apprenti pour préparer la planche tout seul?

Problème 2.

Version a. Ivanouchka et Verotschka vont chercher de l'eau au ruisseau pour remplir une baignoire dans la basse-cour de leur ferme. Ils ont besoin de deux heures pour apporter 30 seaux d'eau qui remplissent 1/2 de la baignoire. Mais un jour Ivanouchka tomba et se cassa la tête et Verotschka dut faire tout ce travail toute seule. Elle mit 4 heures pour apporter 40 seaux d'eau. De combien de temps aurait besoin Ivanouchka pour remplir la baignoire si l'accident etait arrivé non pas à lui mais à Verotschka?

Version b. Ivanouchka et Verotschka vont chercher de l'eau au ruisseau pour remplir une baignoire dans la basse-cour de leur ferme. Ils ont besoin de deux heures pour apporter 30 seaux d'eau qui remplissent 2/3 de la baignoire. Mais un jour Ivanouchka tomba et se cassa la tête et Verotschka dut faire tout ce travail toute seule. Elle mit 5 heures pour remplir la baignoire. De combien de temps aurait besoin Ivanouchka pour remplir 1/3 de la baignoire?

Version c. Ivanouchka et Verotschka vont chercher de l'eau au ruisseau pour remplir une baignoire dans la basse-cour de leur ferme. Ils ont besoin de deux heures pour apporter a seaux d'eau qui remplissent la portion b de la baignoire. Mais un jour Ivanouchka tomba et se cassa la tête et Verotschka dut faire tout ce travail toute seule. Elle mit 5 heures pour remplir la baignoire. De combien de temps aurait besoin Ivanouchka pour remplir une portion c de la baignoire?

Version d. Ivanouchka et Verotschka vont chercher de l'eau au ruisseau pour remplir une baignoire dans la basse-cour de leur ferme. Ils ont besoin de d heures pour apporter a seaux d'eau qui remplissent la portion b de la baignoire. Mais un jour Ivanouchka tomba et se cassa la tête et Verotschka dut faire tout ce travail toute seule. Elle mit e heures pour remplir la baignoire. De combien de temps aurait besoin Ivanouchka pour remplir une portion c de la baignoire?

[40] ibid., p. 125.

Problème 3.

Version a. (Odysseus)

Version b. Une équipe de faucheurs avait pour tâche de faucher deux prés dont la surface de l'un était 4/5 de la surface de l'autre. Pendant un tiers de la journée l'équipe travailla sur le grand pré. Puis, l'équipe se sépara en deux groupes dont l'un était deux fois plus nombreux que l'autre. Le plus nombreux des groupes resta dans le grand pré et finit de le faucher vers le soir. Le plus petit groupe faucha le petit pré, mais, au soir, il restait encore une partie à faire. Cette partie a été fauchée le lendemain par deux faucheurs en une journée entière de travail. Combien d'hommes y avait-il dans l'équipe?

Version c. Une équipe des faucheurs avait pour tâche de faucher deux prés dont la surface de l'un était a/b de la surface de l'autre (a, b entiers positifs, $a < b$). Pendant un tiers de la journée l'équipe travailla sur le grand pré. Puis, l'équipe se sépara en deux groupes dont l'un était deux fois plus nombreux que l'autre. Le plus nombreux des groupes resta dans le grand pré et finit de le faucher vers le soir. Le plus petit groupe faucha le petit pré, mais, au soir, il restait encore une partie à faire. Cette partie a été fauchée le lendemain par deux faucheurs en une journée entière de travail. Combien d'hommes y avait-il dans l'équipe? Pour quelles valeurs de a et b le problème a-t-il un sens?

Version d. Une équipe des faucheurs avait pour tâche de faucher deux prés dont la surface du plus petit était a fois la surface du plus grand (a rationnel, $0 < a < 1$). Pendant une partie b de la journée (b rationnel, $0 < b < 1$) l'équipe travailla sur le grand pré. Puis, l'équipe se sépara en deux groupes dont l'un était c fois plus nombreux que l'autre (c entier, $c > 0$). Le plus nombreux des groupes resta dans le grand pré et finit de le faucher vers le soir. Le plus petit groupe faucha le petit pré, mais, au soir, il restait encore une partie à faire. Cette partie a été fauchée le lendemain par p faucheurs en une journée entière de travail. Combien d'hommes y avait-il dans l'équipe? Pour quelles valeurs des variables le problème a-t-il un sens?

Odysseus, après avoir écouté patiemment Mentôr, soupira: Oh Zeus, je vois que ton frère Algébricaôn ne relâche pas dans sa colère. Où que j'aille, je me retrouve toujours tordu en un problème d'algèbre. Il faut peut-être que je m'y résigne; il n'y a pas d'autre solution. *Vot, i zhizn' takaya!*

Mentôr : (*en continuant son exemple*) Supposons qu'on ait donné ces problèmes à trois élèves, Potapov, Nikolskiï et Faddeev, et que leurs résultats aient été codés: (1;4), (2;3) et (3;2) respectivement, sur un maximum de (3;1). Cela veut dire que Potapov n'a résolu qu'un des trois problèmes en version (d) et a eu besoin de passer par chacune des 4 versions pour en arriver à la plus exigeante du point de vue de l'abstraction. Nikolskiï a réussi 2 problèmes en version (d) et avait besoin, en moyenne, de passer par 3 versions avant d'en arriver à cette version. Faddeev a fait les trois problèmes en version (d) et n'avait besoin que de 2 versions, en moyenne, pour en arriver à la plus exigeante.

Odysseus essaya de s'établir dans son pays natal, mais fut vite découragé. Les gens ne s'intéressaient plus aux petits problèmes d'arithmétique. Il s'engagea dans une entreprise de commerce mais ses revenus ne pouvaient même pas couvrir le loyer de son magasin. Incapable de payer ses créanciers, il décida de se sauver en passant, clandestinement, la frontière ouest du pays. Il y réussit, caché sous les ventres d'un groupe de touristes équipées de balais[41].

Odysseus au Pays de la Solidarité Différentielle Partielle

Ainsi Odysseus se trouva dans un pays connu pour la solidarité de son peuple et de grandes différences d'opinion. C'était le plein d'une des nombreuses campagnes électorales. Dans la rue un groupe de partisans portait une bannière avec le nom de leur parti. Odysseus remarqua son orthographe quelque peu étrange: '$olidarnosc' (Figure 9).

Odysseus essaya de voyager incognito, mais il fut tout de suite reconnu et reçu des offres de travail de la part d'une multitude de maisons d'éditions de manuels scolaires, qui se battaient entre elles pour des problèmes intéressants. On lui offrait de bons salaires mais partout c'était la même condition: il devait changer d'habillage pour satisfaire au nouveau principe pédagogique disant que l'enseignement des mathématiques devait se faire désormais par la résolution des problèmes correspondant à la réalité entourant les élèves. Voilà le costume que lui a proposé un éditeur:

> Monsieur Lepski est un des fournisseur de lait pour Danone (Figure 10). Il a un troupeau de vaches et il a besoin de foin pour les nourrir. Mais il faut d'abord faucher le foin. Cela n'est pas facile, car les fermiers sont en ce moment occupés à négocier des subventions agricoles avec le gouvernement au moyen de barrage des routes (Figure 11 [42]). Mais il faut absolument que ses deux prés, dont l'un est deux fois plus grand que l'autre soient fauchés en au plus deux journées. Il se décide de négocier avec les fermiers le retour au travail de quelques uns d'entre eux. De combien d'hommes aura-t-il besoin? Supposons que pendant une demi-journée l'équipe va travailler sur le grand pré. Puis l'équipe va se séparer en deux groupes égaux. Un des groupes va rester dans le grand pré et va finir de le faucher vers le soir. Le deuxième groupe va faucher le petit pré mais, le soir, il restera probablement encore une partie à faire. Cette partie pourra être fauchée le lendemain par un seul faucheur en une journée de travail. Aide Monsieur Lepski a calculer le nombre minimal d'hommes qu'il lui faudra négocier.

Mais Odysseus se sentait très mal à l'aise dans ce costume rigide et en cravate. Il aimait trop le grand air. Il s'engagea donc sur un bateau avec une bande d'aventuriers et traversa l'Okéanos encore une fois pour arriver dans *La Belle Province* d'un pays dont on disait qu'il est le plus accueillant du monde.

---

[41] Référence au trafic des femmes de ménage.

[42] Dans la figure, les fermiers sont habillés en costumes des légionnaires paysans de Kosciuszko (fin du XVIIIe siècle) qui se sont battus pour l'indépendance de la Pologne contre l'armée de la Russie tsariste. Leur arme était la faux, mise en position verticale.

Odysseus au Pays des Variables Séparées

Quand Éôs aux doigts rosés, née au matin, apparut, Odysseus se trouva dans une tour remplie de gens parlant une multitude de langues (Figure 12). Il s'y tenait un congrès dont le but était de réconcilier deux communautés qui, loin de considérer le langage comme une propriété variable de la parole, s'obstinaient à le réduire à une seule valeur. Le problème était que cette valeur était différente pour les deux communautés, rendant la communication entre elles un peu difficile. Mais il y avait pas mal de bonne volonté de chaque côté ainsi que de la curiosité de se connaître les uns les autres. Dans les ateliers du congrès les négociations du sens allaient bon train.

Odysseus se mêla à un des groupes de travail. Il voulait rester tranquillement dans son coin et observer le spectacle, mais cela s'est avéré impossible dans la culture de ce milieu. Il fallait absolument qu'il participe, qu'il partage ses pensées et ses expériences, qu'il travaille sur des questions précises en petits groupes! Mais il était très difficile de travailler! Chacun semblait non seulement parler une autre langue, mais aussi penser d'autres pensées et chercher à résoudre un autre problème. On ne pouvait, finalement, que causer / *chat*. Le nom de " causette " / '*chat-room'* serait peut-être plus approprié que " groupe de travail " / '*working-group'*. Mais, petit à petit, il commença à s'y habituer, et même à y prendre plaisir. *C'était l'fun* de se voir compris de tant de manières; c'était comme vivre plusieurs vies à la fois!

Il se laissa aller au fil des conversations. Voilà qu'une didacticienne proposait de réfléchir sur la possibilité d'organiser un milieu didactique autour du problème des faucheurs afin d'ingénierier des changements structuraux dans les connaissances des élèves qui leur permettraient de faire le passage de l'arithmétique à l'algèbre[43]. Un autre éducateur s'indignait de ce " déterminisme épistémologique[44] " en disant qu'il n'est pas possible d'ingénierier une cognition prédéterminée tout comme on ne peut pas ingénierier une sélection naturelle prédéterminée: c'est une contradiction dans les termes! L'un comme l'autre des processus sont des processus biologiques - disait-il. La didacticienne s'écriait: 'Mais l'ingénierie didactique n'a rien à voir avec l'ingénierie cognitive! Vous ne comprenez pas ce que je veux dire!'. Reprenant la parole, l'éducateur riposta que l'ingénierie didactique ne peut mener qu'à la

---

[43] Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. 1992: L'Algèbre comme outil de résolution de problèmes: une réflexion sur les changements nécéssaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. Dans: *Recueil des Textes du Colloque du Programme de Recherche sur l'Émergence de l'Algèbre, C.I.R.A.D.E., UQAM, le 10 avril 1992*.

[44] Au sens de possibilité de prédire les actes cognitifs futurs. C'est une référence à Maturana & Varela (voir la note suivante) qui distinguent 'determinism' et 'predictability'.

déception, car le système didactique est un système autopoïetique[45]: tout ce que nous faisons pour, soi-disant, le changer, ne fait que produire les conditions pour vouloir le changer de nouveau. En fait, le renouvellement des réformes est exactement ce qui caractérise l'organisation du système didactique.

Cette constatation affola quelque peu les participants et participantes du groupe. Quelqu'un dit: 'Mais, écoutez!, c'est très intéressant ce que vous dites, mais la prise de conscience de ce phénomène risque de mener à la passivité voire même au défaitisme! Pourquoi faire quoi que ce soit si, de toutes façons, on ne réussit qu'à se produire soi-même?'

La discussion devenait de plus en plus échauffée et son feu finit par faire évaporer l'importance aussi bien du petit problème d'arithmétique, Odysseus, que de son persécuteur, le Dieu Algébricaôn. Ce malheur les réconcilia, et, quittant les espaces de leur Didactée, ils s'en allèrent, main en main, aux Champs Elysées, en évacuant tout le contenu mathématique de la discussion avec eux (Figure 13).

* * *

Voilà. C'est la fin de l'histoire.

Vous n'aimez pas la façon dont elle se termine? Mais cela ne dépend que de nous de l'écrire autrement! Il suffit de ne pas oublier les mathématiques dans nos discussions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

[45] Maturana, H.R., Varela, F.J. 1987: *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*. Boston & London: New Science Library, p. 43.