Géométrie expérimentale/Géométrie théorique à l'école de base en Tunisie, cas des quadrilatères

Samia Oueslati ; ISEFC Université de Tunis
pr_samia@yahoo.fr
Hikma Smid; Faculté des Sciences de Tunis ; Université Al Manar
hikma.smida@ipest.rnu.tn

Résumé

La géométrie euclidienne est d'une part un champ des mathématiques fondé sur une théorie déductive et d'autre part, une science fondée sur les propriétés de l'espace physique. Cette problématique du rapport entre l'espace physique et celui géométrique est à l'origine de différents bouleversements qui ont secoué l'histoire de l'enseignement de la géométrie en Tunisie[1], l'articulation entre les espaces physique et géométrique étant tantôt considérée comme un argument essentiel pour un apprentissage efficace, et tantôt comme un handicap à l'apprentissage de la géométrie théorique. Ces bouleversements ne relèvent pas uniquement des choix épistémologiques de l'institution, mais expriment aussi des difficultés d'ordre épistémologique, didactique et cognitif mises en évidence par plusieurs chercheurs (Duval (1994); Brousseau (1983, 2000) ; Berthelot et Salin (2001) ; Houdement et Kuzniak (2006) ; Parzysz (1988, 2006); etc.) qui ont tenté d'identifier les processus et les mécanismes permettant d'y faire face. Dans ce travail, nous étudions, avec en arrière fond la problématique du rapport entre les espaces physique et géométrique, le rapport institutionnel à l'objet quadrilatère en 5ème, 6ème et 7ème année de l'école de base tunisienne[2], ainsi que les rapports personnels développés par des élèves de 7ème année. Notre analyse s'appuiera sur trois cadres théoriques : la théorie anthropologique de la didactique de Chevallard (1992), la théorie des différentes appréhensions d'une figure de Duval (1994) et la théorie des paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006) . En nous basant, sur des considérations épistémologiques, didactiques et cognitives mises en évidence par les cadres théoriques que nous adoptons, nous confrontons les rapports personnels et institutionnels et en dégageons les points d'inadéquation.

1. Introduction et problématique

L'une des caractéristiques fondamentales de la géométrie euclidienne est sa dualité, dans la mesure où c'est une théorie déductive dont les axiomes sont fondés sur les propriétés de l'espace physique. Charles Méray (1835-1911) la définissait comme « *la science des faits spatiaux* » et Einstein disait d'elle qu'elle est *« la branche la plus ancienne de la physique »* (La géométrie et l'expérience, 1921). Cette spécificité de la géométrie est à l'origine des différents bouleversements qui ont secoué son enseignement depuis le début du 20ème siècle.
Dès 1900, de grands mathématiciens tels que Klein, Treutlein et Godfrey, ont recommandé, pour les enfants de 11 à 13 ans, un enseignement de la géométrie intégrant une dimension expérimentale liée au travail sur les objets de l'espace physique, sensible et une dimension théorique qui réfère à des concepts géométriques et aux relations entre ces concepts. Les approches proposées s'accordent sur le principe que l'enseignement de la géométrie ne doit pas, tout au moins au début, se réduire à une dimension théorique fondée sur l'axiomatique, le

[1] La Tunisie a obtenu son indépendance en 1956.

[2] L'école de base tunisienne comprend 9 ans, six ans pour le primaire et trois pour le collège.

formalisme et le développement de la pensée déductive, mais doit aussi offrir des opportunités aux élèves d'accomplir des tâches expérimentales telles que dessiner, mesurer, découper, manipuler des objets physiques, etc. Les motivations de ces mathématiciens se fondent sur

- des considérations épistémologiques et historiques liées aux spécificités de ce champ des mathématiques. En tant que théorie hypothético-déductive dont les axiomes sont fondés sur les propriétés de l'espace physique, la géométrie a plusieurs domaines d'intervention dont la physique et les sciences de l'ingénieur. Elle se nourrit des problèmes posés par ces disciplines et évolue grâce aux solutions qu'elle tente d'y apporter ;
- des considérations didactiques et cognitives liées aux difficultés d'apprentissage de ce champ des mathématiques. Il s'agit pour les élèves de comprendre les concepts géométriques et les preuves formelles, de produire des démonstrations, de développer des raisonnements, de développer des méthodes de résolution de problèmes géométriques et de problèmes de la vie courante, en lien avec leur environnement.

Bien que concordantes sur le principe d'intégrer les deux dimensions expérimentale et théorique dans l'enseignement de la géométrie pour les enfants âgés de 11 à 13 ans, les approches proposées comportent des différences de fond, quant à la nature, au rôle et à l'organisation du travail sur chacun des espaces physique et géométrique. Pour Klein, le travail sur l'espace physique vise à favoriser le développement d'une pensée fonctionnelle permettant de voir mathématiquement le monde réel (Fujita et al., 2004b). Pour Treutlein, le recours à l'espace physique vise essentiellement à développer ce qu'il appelle « *une imagination spatiale* », c'est-à-dire la capacité à représenter et manipuler mentalement des objets géométriques (Fujita et al., 2004b). Pour Godfrey, le recours à l'espace physique fait partie intégrante de l'activité géométrique et vise à développer ce qu'il appelle « *l'œil géométrique* », c'est-à-dire la capacité à voir les propriétés géométriques se détacher d'une figure (Fujita et al. 2003). Dans tous les cas ces mathématiciens, s'accordent à dire que la difficulté majeure pour l'enseignement de la géométrie consiste à concevoir des stratégies d'enseignement efficientes, assurant une articulation efficace entre les espaces physique et géométrique. Or, la nature des tâches expérimentales susceptibles d'assurer cette articulation n'est pas clairement identifiée, ce qui confronte les concepteurs de manuels, les enseignants et les élèves à une question difficile (Fujita et al, 2003).
Cette problématique du rapport entre l'espace physique et celui géométrique est à l'origine de différents bouleversements qui ont secoué l'histoire de l'enseignement de la géométrie, dans un grand nombre de pays. Parfois, l'articulation entre les espaces physique et géométrique est considérée comme un argument essentiel pour un apprentissage efficace, et parfois cette articulation est considérée comme un handicap à l'apprentissage de la géométrie théorique. L'enseignement de la géométrie en Tunisie n'a pas échappé, au cours de son évolution, à ces approches complètement opposées. Alors que les programmes de géométrie dans la réforme de 1958[3] s'inscrivent dans une logique d'articulation des espaces physique et géométrique et recommandent d'amener les élèves du primaire et du collège à « *utiliser les instruments de dessin et à expérimenter, cultiver la faculté d'intuition dans la recherche de solution, développer l'aptitude au raisonnement sans perdre de vue les réalités de la vie courante, à la fois comme source d'inspiration et cadre d'application* » (Smida, 2003), la réforme de 1968 dissocie, dans l'enseignement de la géométrie, l'expérimentation de la théorie. En effet, les programmes de 1968 stipulent d'amener les élèves du primaire à « *développer l'observation et l'action (recours à un dessin), la mémoire et la réflexion* » (Smida, 2003), et les élèves du collège à « *appliquer directement les définitions et théorèmes du cours, développer des*

[3] La première réforme après l'indépendance.

images mentales et abstraites, un formalisme précis et une démarche généralisante. » (Smida, 2003) La réforme de 1978 tente quant à elle de réguler entre le travail dans l'espace physique et celui géométrique en recommandant de permettre aux élèves du primaire et du collège de « *s'appuyer sur des images mentales liées au monde sensible pour développer des raisonnements, élaborer des démonstrations et approfondir leur compréhension des concepts.* » (Smida, 2003). Cette approche est reconduite de manière implicite dans la réforme de 1993 quand les concepteurs recommandent d'amener les élèves à « *manipuler les notions géométriques figurant au programme, utiliser une démarche inductive en justifiant cette démarche lorsque c'est possible, utiliser une démarche déductive, mathématiser certaines situations vécues, organiser les étapes de construction géométrique.* » (Smida, 2003) Il faudra attendre la réforme 2002 pour voir apparaître explicitement la volonté de favoriser un apprentissage de la géométrie tenant compte des deux dimensions expérimentale et théorique, puisqu'il s'agit d'amener les élèves du primaire « *à manipuler, à travers le sensible, les triangles et les quadrilatères particuliers, les tracer, les construire, connaître leurs propriétés (côtés, angles et/ou diagonales)* » (programme officiel, 2006) et les élèves du collège à « *chercher, expérimenter, faire des essais, conjecturer et démontrer en développant un raisonnement inductif, un raisonnement déductif ou un raisonnement par l'absurde.* » (programme officiel, 2006). Ces bouleversements ne relèvent pas uniquement des choix épistémologiques adoptés par l'institution, mais expriment aussi les difficultés d'ordre épistémologique, didactique et cognitif qui peuvent freiner l'implémentation d'un enseignement articulant les dimensions expérimentale et théorique. C'est ce qui explique la diversité des travaux[4] faits autour de ces questions (Duval (1994); Brousseau (1998); Berthelot et Salin (2001); Houdement et Kuzniak (2006); Parzysz (1988, 2006); etc.).

C'est avec en arrière fond la problématique du rôle, de la nature et de l'articulation du travail sur les deux espaces physique et géométrique que nous nous sommes intéressées à l'enseignement / apprentissage de la notion de quadrilatère dans les cursus de 5ème, 6ème et 7ème année de l'école de base tunisienne[5], les élèves étant âgés de 10 à 13 ans. Le choix de nous intéresser aux quadrilatères est sous-tendu par trois raisons essentielles :

- Une part importante de l'enseignement de la géométrie en 5ème et 6ème année est consacrée aux propriétés de parallélisme et orthogonalité, ainsi qu'aux propriétés géométriques des quadrilatères et à la mise en œuvre de ces propriétés pour résoudre des problèmes.
- Une attention particulière a été apportée par les concepteurs des programmes à la transition primaire-collège quant à l'enseignement des quadrilatères. En effet, la réforme 2002 stipule « *de consolider les connaissances des élèves acquises dans le primaire, de les structurer et les compléter.* » (programme officiel, 2006). En particulier, le carré, le rectangle et le losange sont étudiés de façon intrinsèque avant d'être étudiés comme des parallélogrammes particuliers.
- L'apprentissage de la démonstration débute en 7ème année. Il nous a semblé intéressant de prospecter le rapport des élèves à la démonstration lorsqu'ils travaillent sur les quadrilatères : Comment les élèves adhèrent-ils au contrat institutionnel qui exige qu'à ce niveau toute affirmation devra être démontrée, alors qu'au niveau du primaire l'exigence était qu'ils formulent une explication[6] ou une preuve[7].

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier :

---

[4] Nous développons dans le prochain paragraphe une revue de la littérature.
[5] L'école de base tunisienne comprend 9 ans, six ans pour le primaire et trois ans pour le collège.
[6] Discours qui vise à rendre intelligible à un autrui de la proposition déjà par le locuteur (Balacheff, 1988).
[7] Explication reconnue et acceptée (indépendamment du sujet locuteur) (Balacheff, 1988).

Samia Oueslati ; ISEFC Université de Tunis pr_samia@yahoo.fr
Hikma Smid; Faculté des Sciences de Tunis ; Université Al Manar hikma.smida@ipest.rnu.tn

- Le rapport institutionnel à la notion de quadrilatère en fin du primaire et au début du collège. Plus précisément, il s'agit d'une étude institutionnelle comparée des manuels officiels de 5ème, 6ème et 7ème année de l'école de base tunisienne. Ce choix est sous-tendu par une hypothèse de travail que nous adoptons, selon laquelle le rapport institutionnel à un objet peut être prospecté via toutes les praxéologies qui réfèrent à cet objet et qui sont développées dans les manuels officiels, en regard des exigences curriculaires.
- Le rapport personnel à l'objet quadrilatère 7ème année de l'école de base via l'analyse d'une expérimentation entreprise dans une classe de 7ème année de base. Nos motivations reposent sur le fait que la littérature (Chevallard, 2002) a établi que le rapport personnel d'un élève à un objet est remodelé par les différents assujettissements aux rapports institutionnels imposés par les institutions auxquelles a appartenu l'élève. D'autre part, plusieurs travaux (Duval (1994) ; Brousseau (1983) ; Chevallard (1991) ; Houdement et Kuzniak, (2006) ; Parzysz (2006)) ont mis en évidence des difficultés d'apprentissage au début de l'enseignement de la géométrie dues à certains malentendus didactiques. En effet, les élèves ont du mal à comprendre ce qu'il leur est demandé dans une activité géométrique: notamment en termes de raisonnement géométrique, de démonstration hypothético-déductive, d'appréhension mathématique d'une figure.

2. Espace physique versus espace géométrique dans la littérature

Dans ses travaux, Brousseau (1983,2000) s'est penché sur les relations qu'entretiennent l'espace physique et celui géométrique. Pour l'auteur, il existe deux types de connaissances : les connaissances spatiales qui relèvent de l'espace physique et qui permettent au sujet d'agir sur les objets de cet espace et les connaissances géométriques qui relèvent des objets géométriques, des énoncés, du raisonnement et d'un discours mathématique. Pour Brousseau (1983), ces connaissances spatiales qui s'acquièrent par le travail sur différents espaces -le macro-espace, le méso-espace et le micro-espace- visent à enrichir les conceptions sur les objets géométriques qui vont être enseignés. Partant de l'hypothèse qu'une grande partie des difficultés d'apprentissage semblent provenir d'une confusion entre les savoirs issus de l'espace physique et les savoirs géométriques, Brousseau recommande la nécessité de distinguer, dans l'enseignement, les connaissances spatiales de celles géométriques. Pour l'auteur, le passage des connaissances spatiales aux connaissances géométriques doit se faire via des situations fondamentales qui amèneront l'enseignant à convaincre les élèves que la géométrie ne consiste pas à décrire ce que l'on voit mais à établir ce qui doit être vu (Brousseau 2000).
Se situant dans la suite des travaux de Brousseau, Berthelot et Salin (2001) partent de l'hypothèse que la construction de l'espace géométrique s'appuie sur les connaissances spatiales issues des rapports pratiques à l'espace sensible mais doit les dépasser. Les auteurs ont dégagé trois problématiques : la problématique pratique où il s'agit des rapports qui se réfèrent au sens pratique, non enseignés et où la vérification du résultat obtenu se fait sous le mode de l'évidence, la problématique de modélisation où il s'agit des rapports qui se réfèrent à la résolution de situations de modélisation de l'espace, de mise au point ou d'exploitation de modèles, avec une validation qui peut être interne ou externe au modèle et enfin la problématique de la géométrie, où il s'agit des rapports à un espace conceptualisé qui comportent l'exigence de cohérence entre les déclarations sur cet espace. Pour ces chercheurs, repérer dans quelle problématique se situent élèves et enseignants au cours d'une situation d'enseignement/apprentissage permet de prévoir et d'expliquer un certain nombre de phénomènes didactiques d'enseignement / apprentissage de la géométrie et par suite de remédier aux difficultés des élèves.

Dans leur article intitulé « *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie* », Houdement et Kuzniak (2006) émettent l'hypothèse que « *dans l'enseignement de la géométrie, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie* » et remarquent que les paradigmes géométriques diffèrent selon les institutions. Ils identifient trois paradigmes géométriques : le paradigme GI (géométrie naturelle) dans lequel la démarche de résolution est pratique et la validation se fait au moyen de la perception et des instruments, le paradigme GII (géométrie naturelle axiomatique) dans lequel la démarche de résolution s'appuie sur des objets et des savoirs géométriques et la validation se fait sur la base de lois hypothético-déductives, dans un système axiomatique non formel où les axiomes et la syntaxe se fondent sur la réalité, le paradigme GIII (géométrie axiomatique et formelle) dans lequel la démarche de résolution et la validation s'appuient uniquement sur l'axiomatique et les savoirs géométriques, indépendamment de l'espace physique. Dans le même article, les auteurs définissent l'espace de travail géométrique (ETG) comme étant un environnement complexe, qui peut être constitué d'objets concrets perceptibles et palpables tels les dessins, d'outils matériels tels les instruments de dessin et/ou d'outils conceptuels tels les définitions ou les théorèmes. Ils soulignent que la nature des composantes d'un ETG dépend du paradigme de référence et que les individus opérant sur cet espace de travail y apportent des adaptations, selon leurs connaissances et leurs capacités cognitives. C'est ce qui les conduit à distinguer trois types d'espace de travail : l'ETG de référence qui est défini en fonction de seuls critères mathématiques. et dont l'utilisateur est un individu expert « *épistémique* » ; l'ETG idoine qui est conçu et défini par une institution, de sorte à être effectif et opérationnel pour les questions de la dite institution et qui est obtenu à partir de l'ETG de référence après un réaménagement et une réorganisation didactique de ses composantes, conformément aux contraintes et exigences institutionnelles ; l'ETG personnel qui dépend des connaissances mathématiques et des capacités cognitives de chaque individu et qui est construit par l'individu à partir de l'ETG idoine.

La place de la figure, la manière de la percevoir, ainsi que son rôle sont des éléments clés dans la problématique du rapport entre l'espace physique et celui géométrique. Dans son article, intitulé « *les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique* », Duval (1994) identifie deux types de difficultés rencontrées par les élèves : la résistance à se détacher des formes et des propriétés visuellement reconnues d'un premier coup d'œil et l'incapacité à voir dans une figure, c'est-à-dire à identifier des éléments susceptibles d'aider à la solution du problème posé. Ce fossé entre la vue d'une figure de manière perceptive ou de manière mathématique a amené Duval à interroger le fonctionnement cognitif d'une figure dans la démarche géométrique. Il a identifié quatre types d'appréhensions possibles d'une figure dans la démarche géométrique : perceptive, discursive, séquentielle et opératoire. L'appréhension perceptive est celle qui permet *« d'identifier ou de reconnaître immédiatement, une forme ou un objet soit dans un plan, soit dans l'espace* » (Duval, 1994, p. 123). Ce type d'appréhension perceptive a comme fonction épistémologique l'identification des objets de deux ou trois dimensions. L'appréhension discursive intervient selon Duval lorsqu'il s'agit de regarder une figure à partir de certaines propriétés explicitées dans un énoncé. La fonction épistémologique d'une appréhension discursive est la démonstration, le traitement cognitif correspondant étant le raisonnement déductif. L'appréhension séquentielle réfère à l'ordre de construction d'une figure, le fonction épistémologique de l'appréhension séquentielle d'une figure est celle de modèle.Le traitement cognitif étant commandé par les exigences de l'énoncé et les contraintes des instruments. Enfin, Duval définit l'appréhension opératoire comme étant « *l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures* » (Duval, 1994, p. 126). La fonction épistémologique de l'appréhension opératoire est l'exploration heuristique, qui permet de d'entrevoir l'idée de la solution à un problème ou d'une démonstration.Les traitements cognitifs reposent sur les différentes modifications de la figure : méréologiques, optiques ou positionnelles. Duval signale de plus que ces traitements peuvent être aussi bien réalisés matériellement qu'effectués mentalement.

3. Questions de recherche et méthodologie

A travers l'étude des rapports personnels et institutionnels à l'objet quadrilatère, nous tenterons de répondre aux questions de recherche suivante :

1. Quelles sont, du point de vue institutionnel, les praxéologies développées pour la notion de quadrilatère en 5ème, 6ème et 7ème année de l'école de base tunisienne ?
2. Dans quelle mesure ces praxéologies prennent-elles en charge, du point de vue didactique et cognitif, la problématique de l'articulation entre les espaces physique et géométrique ?
3. Quelles sont les stratégies développées par les élèves de 7ème année lorsqu'ils travaillent sur les quadrilatères?
4. A quel niveau l'inadéquation entre les rapports personnels et institutionnels à l'objet quadrilatère se manifeste-telle?

Afin d'entreprendre l'étude des questions citées plus haut, nous avons procédé à une catégorisation des tâches proposées dans les manuels des cursus étudiés, dans les parties cours et exercices, qui repose sur

- un point de vue anthropologique qui stipule que *"toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches"* (Chevallard, 1999, p.81)
- un point de vue épistémologique et cognitif qui stipule que les appréhensions des figures remplissent des fonctions épistémologiques différentes et font appel à des traitements cognitifs spécifiques (Duval, 1994).
- un point de vue didactique qui stipule l'existence de différents paradigmes géométriques impliquant différents espaces de travail.

Ces trois aspects nous ont amenées à distinguer 5 types de tâche dans l'activité mathématique sollicitée sur la notion de quadrilatère, en 5ème, 6ème et 7ème année de l'école de base tunisienne.

Type 1 : *Produire une figure*[8] *à partir d'un énoncé.*

Ce type de tâche s'inscrit dans une activité mathématique centrée sur la représentation d'objets géométriques et vise à familiariser les élèves avec les instruments et les formes. Il s'agit d'un énoncé du type GI au sens de Houdement et Kuzniak, dans la mesure où la démarche de résolution est pratique et la validation se fait au moyen de la perception et des instruments. Ce type de tâche nécessite une appréhension perceptive de la figure géométrique.

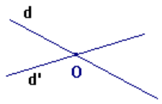
Exemple

Dessine deux droites perpendiculaires en M. Place sur l'une des droites deux points A et B tels que $AB = 5cm$ et M est le milieu de $[AB]$.Place sur la deuxième droite deux points C et D tels que $CD = 3cm$ et M est le milieu de $[CD]$. Dessine le rectangle EFGH tel que les droites (AB) et (CD) soient des axes de symétries pour le rectangle et chacun des points A, B, C et D appartiennent aux côtés du rectangle.(livre de 5ème année).

[8] Le mot figure est utilisé dans son sens générique, c'est-à-dire une représentation graphique d'un objet géométrique ou d'objets géométriques en relation.

L'élève est appelé à utiliser la règle et le compas et à avoir une appréhension perceptive de la figure en vue de dessiner un rectangle tel que les points A, B, C et D sont les milieux respectifs de ses côtés.

Type 2 : *Appliquer des théorèmes et/ou des propriétés géométriques pour reconnaître un quadrilatère.*
Ce type de tâches s'inscrit dans une activité mathématique nécessitant de l'élève d'appliquer des propriétés ou des théorèmes dans sa démarche de résolution qui peut être soit pratique et où la validation se fait à l'aide des instruments, soit fondée sur des savoirs géométriques. Ce type de tâches peut s'inscrire aussi bien dans une géométrie du type GI que dans une géométrie du type GII au sens de Houdement et Kuzniak, suivant le niveau du cursus.
Le but de ce type de tâches est de familiariser les élèves avec les propriétés des quadrilatères et nécessite les appréhensions perceptive et discursive de la figure géométrique.

Exemple 1	**Exemple 2**
Dans la figure ci-contre les droites d et d' se coupent en O. Trace le cercle (C) de centre O et de rayon 3cm.  Ce cercle coupe la droite d en A et C et la droite d' en B et D. Trace les quatre autres droites passant par ces points. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? (Livre de 6ème année).	Dessine un rectangle NOUR tel que $NO = 4$ et $NR = 3$. Marque les points I, J, K et L, milieux respectifs de $[NO]$, $[OU]$, $[UR]$ et $[NR]$. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL? (Livre de 7ème année).

Dans l'exemple 1, l'élève de 6ème année sera amené à identifier les segments $[AC]$ et $[BD]$ comme des diamètres du cercle (C), puis à en déduire que le quadrilatère ABCD est un rectangle parce que ses diagonales sont égales et se coupent en leur milieu. Son appréhension de la figure sera perceptive et discursive.
Dans l'exemple 2, l'élève de 7ème année est amené à utiliser que dans un rectangle, les médiatrices des côtés opposés sont des axes de symétrie, que la symétrie axiale conserve les distances et enfin qu'un quadrilatère convexe ayant quatre côtés égaux est un losange. Il devra en conclure que les quatre côtés de IJKL sont isométriques et par suite que IJKL est un losange. La démarche de résolution visée est fondée sur les propriétés des quadrilatères et nécessite une appréhension discursive de la figure.
Type 3 : *Découvrir et vérifier des faits géométriques.*
Ce type de tâche s'inscrit dans une activité géométrique visant à favoriser une approche intuitive via le développement de ce que Godfrey appelle « *L'œil géométrique* », c'est-à-dire « *la capacité à voir les propriétés géométriques se dégager de la figure* » (Fujita et al, 2004b). L'objectif est d'amener les élèves à utiliser la figure comme outil heuristique pour dégager de nouvelles propriétés géométriques. Ce qui fait appel à l'appréhension opératoire de la figure géométrique. Il peut s'agir d'un type de tâches ancré dans une géométrie du type GI ou GII au sens de Houdement et Kuzniak, suivant le niveau du cursus.
Exemple

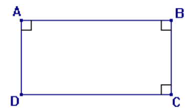
Dessine un rectangle ABCD et construit ses axes de symétries. On désigne par E, F, G et H les points d'intersection respectifs des axes de symétrie avec $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Dessine le quadrilatère EFGH. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH? Dégage tes constations.(Livre de 6ème année et livre du maître)

Dans l'énoncé précédent, l'élève est appelé à construire les médiatrices des côtés du rectangle, "voir" que pour des raisons de symétries $EF = FG = GH = HE$, conforter sa conjecture à l'aide du compas, puis conclure que le quadrilatère EFGH est un losange puisque ses quatre cotés sont isométriques. De plus, l'élève est amené à découvrir que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu et que ce sont des axes de symétrie.

Type 4 : *Créer et/ou produire des figures géométriques à partir d'autres figures.*

Ce type de tâches s'inscrit dans une activité mathématique visant à favoriser l'approche intuitive via l'imagination spatiale (Treutlein, 1905) et sollicite une appréhension opératoire induisant une modification pertinente de la figure (Duval, 1994). Il s'agit d'un type de tâches ancré dans une géométrie du type GI ou GII au sens de Houdement et Kuzniak.

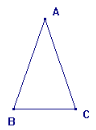
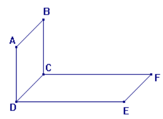
Exemple

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle. Dessine une droite d qui coupe deux côtés du rectangle pour obtenir deux trapèzes de même aire.Présente les solutions obtenues. (Livre de 6ème année et livre du maître) 

L'élève est appelé à choisir deux points M et N respectivement sur $[AB]$ et $[CD]$ tels que $AM = CN$, tracer la droite (MN),vérifier que $BM = DN$,conclure que les deux trapèzes ont même aire car ils ont des bases isométriques et même hauteur et présenter d'autres solutions.

Type 5 : *Elaborer une explication*[9]*, une preuve*[10] *ou une démonstration*[11]

Dans ce type de tâches, nous considérons aussi bien les tâches sollicitant de l'élève de fournir une explication ou une preuve que les tâches exigeant de l'élève de produire une démonstration fondée sur des chaînes hypothético-déductives.

Exemple 1	**Exemple 2**
Soit la figure ci-contre, où ABC est triangle isocèle de sommet principal A. Marque un point M sur [AB] et un point N sur [AC] tels que AM = AN. Quelle est la nature du quadrilatère BMNC ? Justifie ta réponse. (Livre de 6ème année et livre du maître). 	ABCD et EFCD sont deux parallélogrammes.Prouve que ABFE est un parallélogramme. (Livre de 7ème année) 

Dans l'exemple 1, l'élève est appelé à marquer les points M et N, vérifier à l'aide de la règle et l'équerre que (MN) est parallèle à (BC) et que (BM) et (CN) sont sécantes et à en déduire que BMNC est un trapèze car c'est un quadrilatère possédant deux côtés parallèles et deux cotés sécants.

Dans l'exemple 2, est amené à répondre en élaborant une démonstration fondée sur des chaînes hypothético-déductives.

4. Etude du rapport institutionnel à l'objet quadrilatère

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons la contribution de chaque type de tâche dans l'activité mathématique sollicitée dans chacun des manuels de 5ème année, 6ème année primaire et 7ème année de base sur la notion de quadrilatère.

[9] Discours qui vise à rendre intelligible à un autrui de la proposition déjà par le locuteur (Balacheff, 1988).
[10] Explication reconnue et acceptée (indépendamment du sujet locuteur) (Balacheff, 1988).
[11] Suite d'énoncés organisée suivant des régles de logique déterminées (Balacheff, 1988).

Samia Oueslati ; ISEFC Université de Tunis pr_samia@yahoo.fr
Hikma Smid; Faculté des Sciences de Tunis ; Université Al Manar hikma.smida@ipest.rnu.tn

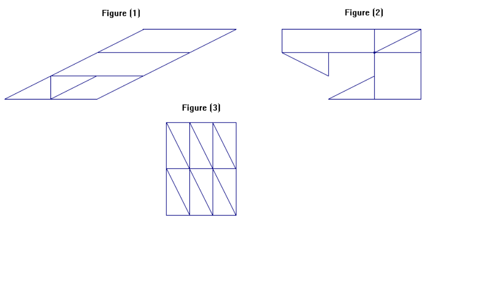
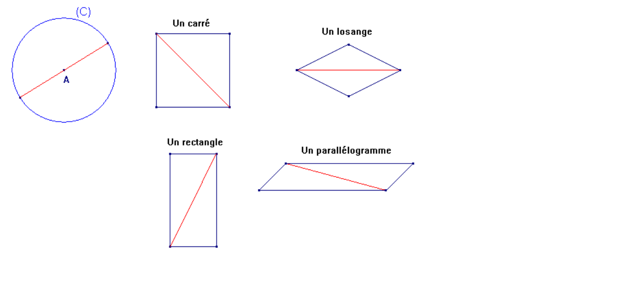
	Activité mathématique (AM)						Total
	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5arg	AM5dém	
5ème année	40,7%	14,8%	11,1%	18,5%	14,8%		100,0%
6ème année	23,4%	44,1%	6,9%	4,8%	20,7%		100,0%
7ème année	24,5%	34,0%	19,1%	5,3%		17,0%	100,0%

AM1: *Produire une figure géométrique à partir d'un énoncé.*
AM2: *Appliquer des théorèmes et/ou des propriétés sur des figures géométriques.*
AM3: *Découvrir et vérifier des faits géométriques.*
AM4: *Créer et produire de figures géométriques à partir d'autres figures.*
AM5arg: *Elaborer une explication ou une preuve.*
AM5dém: *Elaborer une démonstration (hypothético-déductive).*

La distribution précédente nous permet de déduire les conclusions ci-dessous.
En 5ème année primaire, le type de tâche *produire une figure géométrique à partir d'un énoncé* représente environ les 2/5 des tâches de l'activité mathématique. Les autres types de tâche se répartissent de façon quasiment équilibrée avec une légère hausse pour le type *créer et produire de figures géométriques à partir d'autres figures.* On peut en conclure qu'à ce niveau, l'enseignement des quadrilatères est ancré dans la géométrie naturelle GI. De plus, la distribution des types de tâche met en évidence la volonté institutionnelle de favoriser l'identification des formes géométriques et la démarche heuristique, via une activité cognitive instrumentale et de modification des figures.
En 6ème année de base**,** l'enseignement des quadrilatères est orienté vers une activité qui vise à favoriser, chez les élèves, des opportunités de travailler sur les faits géométriques via des inférences directes, d'expliquer ou de prouver tout en restant dans l'espace physique. On peut donc penser que quoique cet enseignement se situe encore dans la géométrie naturelle GI, il y a une volonté institutionnelle de l'orienter vers la géométrie axiomatique et naturelle GII, au sens de Houdement et Kuzniak. La distribution des types de tâche laisse supposer une volonté institutionnelle de favoriser les fonctions d'identification et de validation, via une activité cognitive instrumentale et de raisonnement, ainsi que de favoriser une appréhension discursive des figures, permettant de mettre en œuvre les propriétés géométriques des quadrilatères. En 7ème année de base**,** l'enseignement des quadrilatères s'inscrit dans la géométrie axiomatique et naturelle du type GII. La distribution exprime une volonté de l'institution de privilégier la fonction de validation fondée sur l'axiomatique et les savoirs géométriques, via une activité cognitive de raisonnement. De plus, la faible proportion du type de tâche *créer et produire de figures géométriques à partir d'autres figures* laisse supposer que l'institution hésite à prendre en charge la démarche heuristique dans l'enseignement de la géométrie.

5. Etude des rapports personnels à l'objet quadrilatère

Pour l'étude du rapport personnel nous avons procédé à une expérimentation dans une classe 7ème année de base, composée de 25 élèves. Nous avons présenté aux élèves deux situations.

<table>
<tr><td>Situation[12] A
Est-ce que les trois figures ci-dessous ont la même aire ?</td><td>Situation[13] B
Ci-dessous on considère un cercle (C), un carré, un losange, un rectangle et un parallélogramme. Indique parmi ces quadrilatères, quels sont ceux qui pourraient être inscrits dans le cercle (C).</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

A priori dans la situation A, l'élève devrait "voir" (au sens de Duval) qu'il existe dans les trois figures des triangles rectangles isométriques, tracer des segments de sorte à "paver" chacune des figures (1) et (2) à l'aide de triangles rectangles isométriques, vérifier à l'aide des instruments que les triangles rectangles pavant chacune des figures sont isométriques et conclure que les aires des trois figures sont égales.
Pour la situation B, l'élève devrait à priori reconnaître que aussi bien le carré que le rectangle sont inscriptibles dans un cercle, de centre le point d'intersection les diagonales et ayant pour diamètre une diagonale, puis conclure. L'élève devra aussi reconnaître que si le losange ou le parallélogramme sont inscriptibles dans un cercle alors nécessairement le centre de ce cercle est le milieu des diagonales, constater que les diagonales ne sont pas égales et conclure.

En analysant les productions des élèves, on a trouvé les résultats ci-dessous.

Situation A

- 14 élèves sur 25 ont eu recours à une démarche heuristique avec une appréhension opératoire de la figure. Parmi ces 14 élèves, neuf d'entre eux ont procédé à une modification de la figure qui leur a permis de "voir" que, quoique ayant des formes différentes, les trois figures proposées sont composées d'une même unité figurale. Quatre élèves ont procédé à un pavage des figures mais se sont uniquement fiés aux mesures qu'ils ont prises, sans tenir compte des imprécisions du tracé et un élève n'a pas réussi à paver correctement les figures.
- 9 élèves sont restés à un stade d'appréhension perceptive, dans une démarche d'identification des formes. Ils ont mobilisé des connaissances spatiales (au sens de Brousseau, 1983), ancrées dans les formes et sans lien apparent avec les objets géométriques. En d'autres termes, ces élèves se situent dans une logique du "vu" et non du "su" au sens de Parzysz.
- 3 élèves ont donné une réponse exacte, après avoir écrit 12; 12; 12.

Situation B

- 25 élèves ont reconnu que le carré et le rectangle sont inscriptibles dans un cercle de centre le milieu des diagonales. 19 d'entre eux ont conclu que le carré et le rectangle sont

[12] Les trois figures ont été présentées sur une même feuille.
[13] Les trois figures ont été présentées sur une même feuille.

inscriptibles dans le cercle proposé, à l'aide d'une validation graphique et un élève a validé sa réponse à l'aide d'une démonstration. Par ailleurs, un élève a validé par le graphique que le rectangle est inscriptible et le carré ne l'est pas et un élève a validé par le graphique le carré est inscriptible. Enfin, trois élèves n'ont pas répondu à la question.

- Pour ce qui est du losange et du parallélogramme, 20 élèves ont reconnu que si le losange est inscriptible dans un cercle alors nécessairement le centre de ce cercle est le milieu des diagonales et 18 ont fait le même raisonnement pour le parallélogramme. Parmi ces élèves, 13 ont conclut à l'aide d'une validation graphique que le parallélogramme n'est pas inscriptible et 16 ont procédé de la même manière pour le losange.

En conclusion, on est en mesure d'affirmer que plus de la moitié des élèves se situent dans un espace de travail superposant l'espace géométrique (recours à des référents théoriques liés aux propriétés des quadrilatères) et celui physique (recours à une appréhension perceptive des figures et à une validation dans la géométrie naturelle). De plus, la majorité des élèves de la classe continuent de penser qu'une validation graphique suffit et que le recours à une démonstration hypothético déductive ne se fait qu'à la demande. Ce qui met en évidence un malentendu didactique avec l'institution, qui n'accepte à ce niveau du cursus qu'une validation à l'aide d'une démonstration hypothético-déductive. Par ailleurs, plus du tiers des élèves se situent dans un espace de travail ancré dans l'espace physique. Ce qui met en évidence les difficultés de ces élèves à mobiliser des connaissances géométriques leur permettant de recourir à un espace de travail géométrique tel que défini par l'institution.

6. Conclusion

L'étude comparée des manuels officiels de fin du primaire et début du collège de l'école de base tunisienne et l'expérimentation entreprise dans une classe de 7ème année de base nous ont permis de prospecter les rapports institutionnel et personnel à la notion de quadrilatère, en fin du primaire et début du collège de l'école de base tunisienne. Il découle de notre analyse que en 5ème année de l'école de base tunisienne, l'enseignement des quadrilatères est ancré, du point de vue institutionnel, dans la géométrie naturelle du type GI au sens de Houdement et Kuzniak. De plus, la distribution des types de tâche met en évidence la volonté institutionnelle de favoriser l'identification des formes géométriques et la démarche heuristique, via une activité cognitive instrumentale et de modification des figures. En 6ème année, l'enseignement des quadrilatères est ancré, du point de vue institutionnel, dans la géométrie naturelle du type GI. Cependant, on assiste à un infléchissement de l'institution vers une activité géométrique axée sur l'application des propriétés et des théorèmes via des inférences directes, où la validation est requise dans l'espace physique. Ce qui situe l'enseignement des quadrilatères dans une phase de transition entre une géométrie naturelle de type GI et une géométrie axiomatique et naturelle de type GII. En 7ème année, on constate une volonté de l'institution de favoriser un enseignement des quadrilatères, ancrée dans une géométrie axiomatique et naturelle de type GII. Cependant, il est important de pointer que l'institution insiste sur l'apprentissage de la démonstration, la considérant comme l'unique source de validation, alors que du point de vue des rapports personnels, il ressort de l'expérimentation que la majorité des élèves expérimentés ont recours à un espace de travail personnel superposant l'espace physique et celui géométrique. Ce qui met en évidence une divergence entre les rapports institutionnel et personnels à l'objet quadrilatère en 7ème année de l'école de base tunisienne.

BIBLIOGRAPHIE

Balacheff N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse Université Grenoble 1. Grenoble.

Berthelot R. et Salin M-H. (2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n°56, pp. 5-34, Grenoble.

Bosch M. et Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/1, pp. 77-123, La pensée sauvage, Grenoble.

Brousseau G. (1983), Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, IMAG, LSD, Université Grenoble 1, année 82-83, n° 45, pp. 183-227.

Brousseau G. (1998), *La théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage, Grenoble.

Brousseau G. (2000), Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie. *Les Actes du Séminaire de DDM du Département des Sciences de l'Education de l'Université de Crète (Réthymon).*

Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique*. Grenoble : la pensée sauvage.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3/1, pp.73-112, la pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (2002), Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. In Actes des 3ème journées franco-québécoises « *Didactiques et rapports aux savoirs* », 17-18 juin 2002, pp. 182-197. Paris : Sorbonne.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères. Vol. 17, p. 121-138,* TOPIQUES éditions Pont à Mousson.

Fujita T. et Jones K. (2003), The place of experimental tasks in geometry teaching: Learning from the textbooks design of the early 20th Century. In Pope, S. and McNamara, O. (Ed.), *Research in Mathematics Education,* Vol. 5, pp. 47-62, British Society for Research into Learning Mathematics.

Fujita T., Jones K. et Yamamoto S. (2004b), The role of intuition in the learning and teaching of geometry. *Topic Study Group on the teaching of geometry, ICME 10*.

Houdement C. et Kuzniak A (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 11. pp. 175-193, IREM de Strasbourg.

Klein F. (1907), *Vortrage uber den mathematischen Unterricht an den hohoren Schulen. Teil 1*. Von den Organisation des mathematischen Unterrichts, B. G. Teubner.

Meray C. (1902), *Nouveaux éléments de géométrie*. Editions Galllica.

Parzysz B. (1988), Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 19(1), pp. 79-92.

Parzysz B. (2006), La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica,* vol 17, pp. 128-151.

Smida H. (2003), L'enseignement des mathématiques en Tunisie: génèse et destinée. *Actes du colloque EMF2003*, Edition CNP, Tunisie.

Treutlein P. (1911), *Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren hohen Schulen*. Leipzig und Berlin, B-G.

Samia Oueslati ; ISEFC Université de Tunis pr_samia@yahoo.fr

Hikma Smid; Faculté des Sciences de Tunis ; Université Al Manar hikma.smida@ipest.rnu.tn