Un problème de la profession en classe de seconde : quelles connaissances du professeur pour construire les connaissances des élèves à propos du numérique ?

Mirène Larguier et Alain Bronner
IUFM de Montpellier, Equipe LIRDEF, Université Montpellier II (France)
mirene.larguier@montpellier.iufm.fr et alain.bronner@montpellier.iufm.fr

Résumé

Nous nous intéressons à la mise en place d'un *espace numérique* conforme aux demandes du curriculum officiel en classe de seconde[1]. Nous identifions un problème de la profession dont les symptômes sont les difficultés rencontrées par les professeurs pour construire les concepts relatifs aux objets de cet espace de nombres. Nous utilisons le *filtre du numérique* (Bronner, 2007) pour décrire et analyser ce qui peut être observé dans des classes ordinaires. A travers nos observations de classes, nous avons mis à jour des connaissances pour le professeur nécessaires pour que les connaissances des élèves sur le numérique puissent être solides.

1. Introduction

L'observation dans les classes de seconde des pratiques de l'enseignement du numérique, nous amène à identifier un *problème de la profession* (Cirade, 2006 ; Chevallard, 1999) : la difficulté de mettre en place des espaces numériques - au sens de Bronner (1997, 2007) - conformément aux injonctions du programme de seconde. Notre projet est de cerner ce problème et d'en connaître les conditions et les contraintes. Nous désirons les décrire pour pouvoir dans un deuxième temps mettre à jour les connaissances du professeur qui nous semblent nécessaires pour opérer les choix didactiques adéquats afin de développer les connaissances des élèves sur le numérique.

2. Cadre théorique et méthodologie

Pour étudier la question de la construction de l'espace numérique en seconde, nous utilisons essentiellement le cadre de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD en abrégé) développée depuis une vingtaine d'années par Chevallard (2007) et les développements concernant le numérique et l'algébrique des travaux de Bronner (1997, 2007). Un outil permettant l'étude d'un espace numérique est le *filtre du numérique* développé par Bronner (2007). La fonction de ce filtre est de «traquer» le numérique, que ce soit au niveau d'une pratique ou d'une institution. Ainsi différents éléments constitutifs d'un espace numérique peuvent être identifiés :

- les objets de base : les systèmes de nombres explicites ou non, l'ensemble des opérateurs (prendre la racine carrée d'un positif…) et des comparateurs ($<$, $>$, $\neq$, …) ;
- les types de pratiques (calcul exact, calcul approché, mixte) ainsi que les différents contrats institutionnels de calcul ;

[1] Première classe du lycée en France (élèves de 15 à 16 ans).

- les articulations et les dynamiques du domaine numérique avec les autres domaines ainsi que les contrats sous-jacents (y compris une dynamique numérico-numérique) ;
- les raisons d'être du numérique.

Ces éléments ainsi que les organisations mathématiques (OM) du numérique constituent un Espace Numérique noté EN. L'observation de l'espace numérique comprend également ce qui relève de l'organisation didactique (OD) dans ce qu'elle a de spécifiquement numérique.

Notre recherche[2] s'appuie sur l'observation de classes de seconde avec une méthodologie particulière. Elle se différencie des démarches d'ingénierie habituelles en didactique des mathématiques dans la mesure où l'observation dans les classes n'est pas conditionnée par les objectifs et des comportements attendus qui auraient été précisés par une analyse a priori en fonction du projet du chercheur. L'observation dans les classes est ici première, et c'est elle qui permet la découverte et l'accès aux connaissances enseignées sans aucune interaction entre l'enseignant et le chercheur. A partir des éléments révélés au chercheur dans la dynamique de l'enseignement, est élaborée une analyse a priori en prenant en compte les acquis antérieurs des élèves, la mémoire didactique de la classe et la conformité avec les programmes. Il est alors possible de faire des parallèles entre cette analyse a priori et l'analyse a posteriori.

3. Description de la réalité des pratiques enseignantes

Le recueil des données a été réalisé à partir de deux classes de seconde dont les enseignants ne sont ni des débutants, ni des experts, et dont les élèves ont des options qui les destinent a priori vers des bacs généraux, majoritairement un bac scientifique d'ailleurs. L'étude porte sur toute la durée de l'année scolaire, ce qui pose des questions particulières non abordées dans la majorité des recherches. En conséquence le grain d'analyse est très variable : de l'année à la minute ! Les deux professeurs enseignent dans un même lycée de la périphérie de Montpellier, ils ont été observés tout au long de l'année scolaire, Mathieu en 2006-2007 et Clotilde l'année suivante. Les deux classes sont qualifiées de « très bonnes » par les professeurs.

Les deux professeurs ont commencé le programme annuel par un chapitre contenant des révisions des domaines numérique et algébrique (abrégé en NA) où les notions travaillées le sont en tant qu'objets, et non pas en tant qu'outils (Douady, 1986) au service de la résolution de problèmes. Ce chapitre contient également les ensembles de nombres et leur dénomination. Cette nouveauté du programme de seconde semble être la porte d'entrée la plus commune vers les mathématiques du lycée[3]. Ce début de progression est vécu comme satisfaisant par les deux professeurs pour ce temps de la *reprise scolaire* (de la rentrée aux vacances de Toussaint) et ils justifient ce choix a posteriori. Ainsi Mathieu lors de l'interview du 6 décembre 2006 déclare : « *C'est une manière de raccrocher sur ce qu'ils ont fait,* ***c'est une manière pour moi de travailler tout ce qu'ils ne savent pas faire***». De même Clotilde explicite son choix dans l'interview du 6 décembre 2007 : *« …* ***je ne veux pas commencer par un chapitre trop difficile en début d'année*** *pour pouvoir les mettre en confianc*e … ».

Un élément technologique (au sens de Chevallard, 1997) dans le geste professionnel (Larguier & Bronner, 2004) d'organisation globale de l'enseignement de l'année de seconde est le souci de parvenir à construire des apprentissages solides concernant les bases du calcul numérique et algébrique pour les élèves qui vont aller principalement en première S mais également en

[2] Le cadre de la recherche est une thèse en cours intitulée : « Étude didactique des conditions d'enseignement et d'apprentissage du domaine numérique en classe de seconde » de Mirène Larguier sous la direction d'Alain Bronner.
[3] Une étude des manuels en vigueur ainsi que les visites dans les classes de seconde confortent cette impression

première ES[4]. Les enseignants de seconde qui ont également l'expérience de ces classes de première savent que des manques de maîtrise de techniques de base concernant le NA vont être des obstacles importants ; ils savent également qu'il existe une grande rupture entre la seconde et la première. C'est le cas pour Mathieu et Clotilde qui ont justifié le choix de leurs progressions par les arguments précédents lors d'entretiens menés avec eux.
Nous utilisons la notion de contrainte selon les différents niveaux de co-détermination didactique en suivant une hiérarchie établie par Chevallard (1999). Ce sont ses termes – discipline, domaine, secteur, thème, sujet d'étude - que nous reprenons ci-dessous pour analyser le programme de seconde sur le numérique. Ainsi une contrainte au **niveau de la discipline** provient peut être du découpage du programme et de l'ordre choisi pour son écriture.
Nous pouvons lire que le programme est subdivisé en trois domaines dans l'ordre suivant : *Statistique / Calculs et fonctions / Géométrie.* Le deuxième domaine « Calculs et fonctions » est subdivisé en trois secteurs qui n'apparaissent pas explicitement ainsi mais que nous repérons comme étant les suivants : *Nombres / Fonctions / Modèles et modélisation algébrique.* Le secteur qui nous intéresse plus spécifiquement dans cet article est le premier, c'est celui qui contient toutes les notions liées au numérique en classe de seconde. Il comprend 6 thèmes qui apparaissent dans la colonne intitulée « Contenus » et qui sont présentés en deux parties :

- la première partie contient les 4 thèmes suivants : *Nature et écriture des nombres / Notations N, Z, D, Q et R / Représentation des nombres dans une calculatrice / Nombres premiers* ;
- la deuxième partie correspond à deux autres thèmes : *Ordre des nombres / Valeur absolue d'un nombre.*

Les professeurs peuvent alors trouver « naturel » de suivre les contenus annoncés dans l'ordre donné, ce qui est peut être l'une des raisons qui viendraient conforter l'idée de la nécessité des révisions a priori avant d'aborder véritablement le programme. Par ailleurs ce programme décline les objectifs généraux de chaque domaine. Ainsi pour le domaine « Calculs et fonctions » le premier objectif du programme est le suivant : « ***Approfondir la connaissance des différents types de nombres*** ». Nous trouvons aussi dans le document d'accompagnement (juin 2000) le commentaire suivant en ce qui concerne le secteur « Nombres » et le thème « *nature et écriture des nombres* » : *« **On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés**[5]. »* Ainsi la reconnaissance de la nature des nombres est un type de tâches bien identifié dans les programmes. Nous le nommerons T et nous allons analyser sa place dans le curriculum réel et suivre son histoire au cours de l'année. Plus généralement nous allons chercher à repérer les contextes dans lesquels les différents types de nombres interviennent.

4. Une tâche emblématique et des objets problématiques du numérique

Nous allons développer nos observations concernant T : « *reconnaitre à quels ensembles appartiennent des nombres donnés* ». Ce type de tâches est emblématique du domaine numérique travaillé en début d'année lors de la reprise scolaire. Ainsi T peut apparaitre également emblématique

[4] Dans le lycée général en France, à partir de la classe de première (élèves de 16 à 17 ans), les élèves choisissent une orientation : scientifique (S), littéraire (L) ou économique et social (ES).
[5] C'est nous qui soulignons

de la liaison collège/lycée en permettant une reprise de connaissances anciennes tout en travaillant des connaissances complètement nouvelles (comme la désignation des ensembles).

Dans les classes de Clotilde et de Mathieu de nombreux spécimens de T sont travaillés dans le premier chapitre. Les justifications ne sont généralement pas demandées. Ainsi dans le cahier d'exercices des élèves de Clotilde nous trouvons les affirmations suivantes sans aucune justification : « $\sqrt{18}$ irrationnel ; $\frac{1}{3}$ rationnel ». La praxéologie construite dans la classe relative à ce type de tâches T est incomplète. Les éléments du bloc technologico-théorique sont absents, la réponse attendue par le professeur repose sur de nombreux implicites qui ne sont certainement pas partagés par tous les élèves. Pourtant les connaissances qui pourraient faire l'objet d'une reprise d'étude des apprentissages du collège sont en particulier :

- la définition d'un nombre décimal et sa reconnaissance à partir de son écriture décimale ;
- la reconnaissance d'un nombre idécimal (Bronner, 1997) à partir de son écriture décimale illimitée ;
- savoir qu'un nombre rationnel écrit sous la forme fractionnaire peut être un nombre idécimal, ou bien un nombre décimal pouvant être éventuellement un nombre entier.

Des connaissances nouvelles en seconde concernent les inclusions des ensembles de nombres et de manière plus générale la reconnaissance des types de nombres et de leurs écritures « canoniques », c'est-à-dire des formes usuelles qui facilitent le travail avec les nombres (calcul, comparaison…). Par ailleurs le professeur peut choisir des sujets d'étude parmi des thèmes donnés dans les programmes. Ainsi l'un d'entre eux concerne une nouvelle conception du décimal comme pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5 (éventuellement d'exposant nul).

Le travail de reprise dans le domaine du numérique en lien avec ce type de tâches emblématique est sous-estimé par les enseignants qui semblent ne pas avoir conscience des organisations mathématiques à développer en conformité avec la demande des programmes, et surtout en conformité avec la rationalité mathématique. Mais quelles sont les raisons d'être de ce type de tâches emblématique ? Quel problème mathématique essentiel pour la discipline motive la maîtrise des praxéologies en lien avec T ? En posant ces questions, nous nous référons à Yves Chevallard qui dénonce l'enseignement des mathématiques comme étant la visite d'un musée, ou encore l'enseignement de réponses toutes faites véhiculées par la tradition, alors même que les questions à l'origine de ces réponses ont été perdues (Chevallard, 2000). Nous voyons apparaître avec Chevallard une motivation des calculs sur les nombres afin de les exprimer sous certaines formes particulières et une légitimité de ce travail dans le domaine numérique :

« On rencontre […] un grand problème des mathématiques : comment reconnaître si deux objets mathématiques d'un certain type sont ou ne sont pas le même objet ? Comment savoir par exemple si $7\times 5-8 = 23$? Ou si $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$? Ou, encore, si $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^2$?

À ce grand problème, il existe une solution générique, universelle : pour répondre à la question posée, il suffit chaque fois de disposer d'un système d'écriture des objets du type considéré, dans lequel chacun de ces objets ait une écriture et une seule. Le calcul de l'écriture « canonique » des objets à comparer permet alors de répondre : ainsi a-t-on $7\times 5 - 8 = 35 - 8 = 27$, ce qui montre que $7\times 5-8 \neq 23$. De même, il vient d'une part $\frac{60}{84} = \frac{4\times 15}{4\times 21} = \frac{3\times 5}{3\times 7} = \frac{5}{7}$, d'autre part $\frac{380}{532} = \frac{190}{266} = \frac{5\times 19}{19\times 7} = \frac{5}{7}$, en sorte qu'on peut conclure, cette fois, positivement : on a bien l'égalité $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$. »

Ce n’est donc pas la connaissance de la nature du nombre en soi qui est importante, mais la connaissance pour un type de nombres donnés de son écriture canonique. Ainsi la détermination de la nature d’un nombre peut orienter le choix de son écriture relativement à un contexte donné. Ce fonctionnement est renforcé par une règle du *contrat institutionnel de calcul* (Bronner 2007) : le travail de démonstration en mathématiques sur le NA oblige le plus souvent à utiliser des valeurs exactes. Ces raisons expliquent alors pourquoi il est important de connaître les valeurs exactes des lignes trigonométriques de certains angles comme : $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pourquoi on garde cette écriture avec un radical. Nous développerons plus loin cet exemple, différents types de nombres apparaissant dans le cadre de la trigonométrie, une reprise du travail du début de l’année sur le numérique est alors possible.
Dans la réalité de ce que nous avons pu observer, les professeurs font rencontrer aux élèves en début d’année le type de tâche T sur un certain nombre de spécimens en conformité avec les programmes, sans motiver ce travail par un problème spécifique de la discipline, et sans utiliser ce travail ultérieurement pour motiver à son tour une poursuite de l’étude de la synthèse relative aux nombres. Pourtant nous allons voir qu’une reprise de T est possible dans la suite du programme de seconde - nous venons de citer le cas de la trigonométrie - mais les professeurs ne perçoivent pas ces nouvelles niches pour réactiver ce type de tâches et enrichir EN.

5. La tâche emblématique et la valeur absolue

Nous allons montrer comment les différents types de nombres sont mis au service de la valeur absolue. Les programmes inscrivent la notion de valeur absolue dans le cadre numérique (distance entre deux nombres) ; cette notion est un objet mathématique inscrit dans les contenus, mais les accompagnements minimisent cette place pour réduire la notion à une notation : « *Aucune étude particulière n'est demandée. Cette* ***notation*** *sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux nombres* ». Cette conception conforte l’idée que la valeur absolue apparait davantage comme un nouvel opérateur (au sens de Bronner, 2007) de l’espace numérique. Par ailleurs le travail algébrique (résolution d’équations, d’inéquations) en lien avec la valeur absolue n’est pas un objectif du programme.
A l’occasion des observations dans les classes de Mathieu et de Clotilde, les données recueillies dans la réalisation effective des séances ont permis de comparer les choix didactiques relatifs à l’enseignement de la valeur absolue et de décrire les organisations mathématiques choisies et de les comparer sur la durée de la séquence. Nous observons des choix communs sur les contenus abordés, mais avec des conceptions différentes sur les objets traités. Par exemple, les définitions données par les deux professeurs diffèrent. Pour Clotilde le cadre est numérique : « *La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres p-q et q-p qui est positif ou nul. Cette distance se note |p-q| et se lit « valeur absolue de p moins q ». Conséquence : la valeur absolue de x, notée |x|, est la distance de x à zéro.* » Pour Mathieu c’est l’articulation entre les cadres géométrique et numérique qui permet la définition : « *Soit x un nombre réel et M le point d’abscisse x sur la droite des réels, la valeur absolue de x notée |x| est la distance de O à M.* ».
En revanche les deux professeurs choisissent de faire travailler les techniques de résolution de certaines équations et inéquations utilisant des valeurs absolues dans le cadre algébrique en ne suivant pas les prescriptions du curriculum officiel. Des praxéologies différentes ont cependant été choisies pour un même type de tâches privilégié par les professeurs et pourtant pratiquement hors programme : « résoudre une équation du style |ax+b|=c ». Mathieu privilégie une technique

géométrique utilisant la droite graduée quand Clotilde privilégie une technique algébrique fondée sur le signe du binôme ax+b. Paradoxalement, les connaissances les plus élémentaires concernant l'objet valeur absolue ne sont pas maitrisées par les élèves. Ainsi des élèves de Mathieu, interrogés le 5 février 2007 lors d'un entretien en dehors de la classe, n'ont pas su répondre à des questions concernant le concept de valeur absolue comme : *« qu'est-ce que vous diriez à un élève qui sort de troisième pour expliquer ce que veut dire la valeur absolue d'un nombre ? »*. Voici un passage de l'interview :

« Charly explique : " je mets le nombre, je fais plus d'un côté et moins de l'autre et ça donne le nombre". Un exemple est demandé, Anissa prend la parole pour expliquer ce que signifie que la valeur absolue de x vaut 5 et elle fait un schéma en même temps d'une droite graduée où figurent 0 ; -5 et 5. Elle dit c'est 5 entre –5 et 5. Puis elle reprend et dit que x est entre –5 et 5. Il lui est demandé de prendre le nombre +1, alors elle dit que valeur absolue de x c'est 5 ou –5. À la question de savoir ce que vaut valeur absolue de 4 Maël répond : "c'est 4 ou –4". Anissa corrige : "c'est la distance de x à..."»

Cet entretien confirme l'interprétation sur le manque de sens que les élèves donnent aux techniques employées et aux objets manipulés. Il confirme également l'impact très grand de la technique géométrique de résolution des inéquations comportant une valeur absolue développée dans la classe de Mathieu. On note aussi la prégnance des types de tâches algébriques concernant le thème de la valeur absolue chez les élèves. Le concept lui-même ne semble pas construit, mais il évoque des situations où il apparaît, à partir d'un ostensif (Bosch et Chevallard, 1999) sonore "valeur absolue", ou à partir d'un ostensif visuel "les deux barres". A la question "qu'est-ce que c'est ?" ; des élèves apportent la réponse "voilà ce que nous faisons d'habitude avec".
Nous pouvons remarquer qu'aucun des élèves interrogés n'a réussi à construire un sens convenable pour ce nouvel objet numérique. Le même constat sera réalisé en interrogeant 3 élèves de Clotilde. Des techniques et des éléments technologiques présents dans les organisations mathématiques viennent envahir l'espace de compréhension des élèves. Il est possible que nous touchions là à un manque dans l'enseignement des mathématiques, voire des sciences en général, à savoir le manque de questionnement du type « qu'est-ce que c'est ? ». Pour ces professeurs, le problème de l'enseignement serait d'apprendre aux élèves à faire des choses avec un objet mathématique, et non pas apprendre à se représenter cet objet, à le réifier. Par ailleurs nous notons un manque dans les connaissances du professeur relatives au savoir à enseigner, eneffet une articulation serait possible, et même nécessaire, avec l'enseignement des nombres relatifs au collège. Dès la classe de 5^{e} du collège (élèves de 12 à 13 ans) une première rencontre implicite a lieu avec la valeur absolue pour introduire la somme des nombres relatifs, elle apparait généralement sous la dénomination de « distance à zéro » du nombre. Si cette articulation était prise en compte par les enseignants de seconde, elle participerait de la synthèse sur les nombres demandée par le programme.
Nous avons observé par ailleurs que les nombres irrationnels servent la cause de la valeur absolue dans des tâches du type : « Exprimer sans valeur absolue $\left|\sqrt{3}-1\right|+\left|\sqrt{2}-3\right|$ ». Ainsi des irrationnels « de service » sont actualisés à l'occasion du travail sur ce thème par les deux professeurs. Mais ils apparaissent sans motivation et sans être questionnés aux yeux des élèves. La raison d'être du choix de ces nombres irrationnels est vraisemblablement de nécessiter un travail sur la définition même de la valeur absolue. En effet les élèves sont ainsi amenés à se poser la question, qui est dans ce cas non triviale, du signe des expressions numériques en jeu.

Le travail d'analyse relatif à l'objet valeur absolue chez ces deux professeurs en utilisant le filtre du numérique nous permet de développer quelques constats. L'espace numérique en seconde est enrichi par rapport au collège grâce à l'apparition de nouveaux éléments :

- **des objets d'apprentissages nouveaux** par rapport au collège en conformité avec les programmes : les ensembles de nombres, les intervalles, la valeur absolue ;
- **un nouvel opérateur** : des types de tâches, comme « trouver la valeur absolue d'un nombre donné, d'une expression numérique ou d'une expression algébrique », font fonctionner la valeur absolue comme un opérateur de manière semblable à l'opérateur racine carrée introduit en quatrième ;
- **une dynamique numérico-algébrique** : le nouvel opérateur devient la motivation pour générer des types de tâches qui ne sont plus officiellement au programme, et qui sont « immotivés » ;
- **des règles du contrat institutionnel** : les tâches proposées relatives à des valeurs absolues consistent à supprimer la valeur absolue.
-

6. La tâche emblématique et la trigonométrie

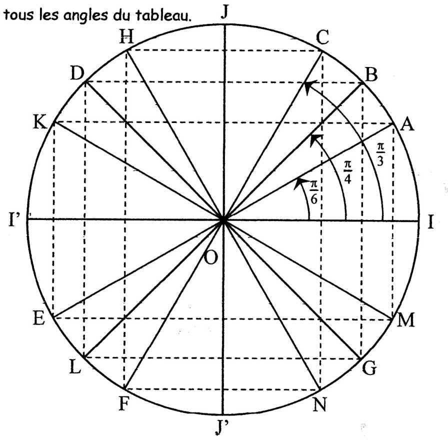
Nous avons vu comment les irrationnels sont des nombres mis au service du travail relatif à la valeur absolue. Nous allons rencontrer dans cette partie des nombres irrationnels « produits » (Bronner, 2007) dans le cadre de la trigonométrie, mais ni leur apparition ni leur nature ne sont questionnées. Dans les classes de Mathieu et de Clotilde, le chapitre sur la trigonométrie a été abordé en fin d'année, chez Mathieu à partir du 23 mai 2007 et chez Clotilde à partir du 30 avril 2008. En utilisant notre méthodologie, un travail d'analyse comparative analogue à celui concernant la valeur absolue a donc pu être mené. Pour mieux comprendre l'analyse du curriculum réel, nous présentons la place de la trigonométrie dans le curriculum officiel.
Au collège (d'après les programmes en vigueur en France jusqu'en 2006-2007 et les nouveaux programmes d'avril 2007), la trigonométrie est un secteur du domaine de la géométrie euclidienne et ne concerne que les angles aigus d'un triangle rectangle dont les mesures sont exprimées en degré. Au lycée en seconde (programme de mai 2002), à cette conception dans le cadre de la géométrie du triangle rectangle, s'en ajoute une autre dans le cadre des fonctions. En première une nouvelle conception intervient dans le cadre de l'analyse. Dans le programme de seconde la trigonométrie est située dans le domaine « Fonctions » et le secteur « fonctions de référence » en présentant la seule *capacité* suivante : *« Connaître la représentation graphique de $x \to \sin x$ et de $x \to \cos x$ »*. Les commentaires en regard des capacités précisent : *« La définition de sin x et cos x pour un réel x quelconque se fera en " enroulant **R** sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°. »* Dans le document d'accompagnement du programme de seconde on suggère de s'appuyer sur un logiciel de géométrie dynamique pour « montrer » cet enroulement et on insiste sur le calcul exact de ces valeurs particulières : *« Pour faire le lien avec les valeurs des sinus et des cosinus de 30°, 45° et 60°, on déterminera, sur le cercle trigonométrique, la longueur des arcs interceptés par ces angles remarquables et on établira les valeurs exactes des sinus et cosinus correspondants ».*
Nous repérons dans le curriculum officiel plusieurs ruptures dans le domaine de la trigonométrie entre les conceptions construites au collège et celles de la classe de seconde. En effet ces ruptures concernent : une nouvelle représentation graphique de la droite des réels qui « s'enroule » autour du cercle ; les angles qui peuvent être orientés et prendre toutes les valeurs réelles, et même des

valeurs négatives ; les objets cosinus et sinus deviennent des fonctions dans **R** et même des fonctions de référence pour lesquelles la variable ne réfère plus à un angle mais à un réel.
Pour faire comprendre l'enroulement de la droite des réels, Clotilde a choisi une activité du manuel de la classe qui utilise une comparaison avec l'enroulement du fil d'une bobine, elle n'utilise jamais de logiciels de géométrie dynamique dans la classe, bien que presque toutes les classes du lycée soient équipées en vidéoprojecteurs. Cette mise en scène étant installée, la suite du programme peut se « dérouler » pour faire le lien avec les valeurs remarquables *« des sinus et des cosinus de 30°, 45° et 60° »* lorsque ces angles sont exprimés en radians. Les questions « pourquoi ces angles doivent être remarqués ? Pourquoi les valeurs de ces sinus et de ces cosinus sont à connaître ? Pourquoi on change d'unité de mesure des angles ? » restent totalement dans l'ombre. Il est vraisemblable que le professeur ne se les pose même pas : c'est au programme. Cela renvoie à la question des connaissances du professeur, posée en début d'article.
Lors de la séance du 16 mai 2008, à la fin de la séquence, Clotilde donne un tableau que les élèves doivent compléter :

Exercice : On a donné les valeurs exactes du sinus et cosinus de quelques angles remarquables entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Point								I	A	B	C	J				
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos *x*								1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
sin *x*								0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				

a. Retrouver le point qui correspond à chaque angle.
b. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de tous les angles du tableau.



Ce document présente une extraordinaire vitrine de nombres qui émergent dans l'espace numérique de seconde avec des entiers relatifs, des décimaux, des irrationnels formés avec les exemples typiques que sont les nombres π , $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ Nous avons observé qu'il n'est pas de la responsabilité de l'élève de savoir pourquoi il est nécessaire de conserver des écritures complexes de ces nombres comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par exemple. Si le professeur avait renvoyé cette question dans le topos des élèves (Chevallard, 1999), il aurait alors pu réaliser une reprise du type de tâches emblématiques T pour justifier l'écriture canonique de ces nombres, mais la prise de conscience de la nature des nombres est absolument absente de toute cette séquence pourtant très riche au point de vue du travail possible sur le numérique. Les seules justifications données sont sous la

forme de règles conventionnelles non référées à des nécessités de la discipline. Ainsi Clotilde n'accepte pas la réponse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la transforme en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en argumentant : *« comme on a dit qu'on n'aimait pas les racines de 2 sous le trait de fraction on l'écrit comme ça »*. L'année précédente Mathieu dans le même contexte avait précisé aux élèves : *« si je veux enlever la racine au dénominateur qu'est-ce qu'on fait ? »* Des élèves avaient répondu : *« on multiplie »* ; le professeur avait demandé : *« on multiplie par quoi ? »* et les élèves avaient ajouté : *« par racine de 2 ».* Un moment avant pendant la recherche des élèves tout en circulant dans la classe pour regarder leur travail, il avait annoncé : « *travaillez avec des fractions, ne travaillez pas avec des nombres à virgule* ». Ainsi les professeurs habituent les élèves à des pratiques de calcul exact qui sont régies par des règles conventionnelles décidées par le professeur alors que des raisons épistémologiques les étayent. Le *contrat institutionnel de calcul* est dans ce contexte de la trigonométrie sous l'entière responsabilité du professeur, pourtant les questions sous-jacentes pourraient être dévolues à l'élève comme faisant partie des aspects du travail mathématique.
L'espace numérique élaboré en seconde est ainsi enrichi par de nouveaux éléments qui sont des opérateurs, à savoir les opérateurs cosinus et sinus, générateurs de tableaux de nombres réels contenant de nombreux irrationnels. Ces opérateurs permettent une production de nombres de façon procédurale. L'intérêt est centré sur la façon d'obtenir les valeurs numériques, et non pas sur la nature des objets numériques produits ni sur le changement de statut du nombre dont on cherche le cosinus et qui évolue vers un statut de variable de la fonction cosinus. La question « qu'est-ce que c'est ? » n'est pas actualisée, elle est masquée par la question « comment on fait ? ». L'accent étant mis sur les valeurs particulières des angles, le changement de statut précédent est difficile à faire percevoir aux élèves, même de façon intuitive. La proposition des programmes est de conjuguer les cadres numérique et géométrique pour commencer à travailler le concept de fonction trigonométrique, c'est ce que commence à mettre en place Clotilde mais l'importance donnée aux calculs des valeurs particulières de façon statique occulte la fonction, alors même que le but visé en seconde est de dévoiler cette fonction. Dans la classe de Mathieu, le changement de point de vue sur le cosinus a été abordé grâce à la calculatrice graphique, ainsi le passage du cadre numérique au cadre fonctionnel a été illustré par l'obtention d'une courbe, donnant un ostensif de la fonction sous-jacente et de sa continuité perceptible intuitivement.
La dynamique mise en œuvre par les deux professeurs est une dynamique numérico-géométrique. Ainsi des nombres de différentes natures sont engendrés par l'opérateur cosinus à partir du cercle trigonométrique et du triangle rectangle. Cependant une autre dynamique reste implicite, c'est une dynamique inter-numérique qui pourrait vivre grâce à la reprise du travail numérique du début de l'année en lien avec la tâche emblématique T et l'écriture canonique des nombres en fonction de leur nature. Mais il semblerait que cette tâche emblématique ne soit pas exportable en dehors du secteur « Nombres » du domaine « Calculs et fonctions ». Ce lieu de la trigonométrie en seconde permettrait de retravailler le numérique, puisque des irrationnels arrivent « naturellement ». Mais la prise de conscience de la nature et de l'écriture de ces nombres n'est pas de la responsabilité de l'élève. Pourtant il serait intéressant de poser la question de la valeur exacte de nombres comme par exemple cos17 ou $\sqrt{34}$ et de faire prendre conscience aux élèves que l'écriture de ces valeurs exactes ne peut correspondre ni à un entier, ni à un décimal, ni à un rationnel, ce qui exclut notamment une écriture décimale affichée par une machine. Ainsi en dehors du contexte d'un problème les écritures cos17 ou $\sqrt{34}$ sont a priori les meilleurs signifiants de ces nombres. Ces exemples pourraient enrichir les prototypes habituels utilisés

comme irrationnels. Il est intéressant de noter que sur 6 manuels de seconde édités en 2004 et 2005, un seul -Hyperbole (Nathan, 2004)- donne dans le résumé du cours un exemple d'irrationnel qui est un cosinus (cos23°). Pourtant en faisant la synthèse des nombres rencontrés dans le grand *fourre-tout* (dénomination citée par Bronner, 1997, et repérée dans un manuel) du collège, ce type de nombres a été fréquenté et peut être réinvesti dans un rôle d'exemple.
Une autre dynamique reste implicite, c'est la dynamique numérico-fonctionnelle. Nous avons souligné dans les ruptures entre collège et lycée, la conception nouvelle en seconde pour le cosinus et le sinus considérés comme des fonctions de **R** dans **R**. Or le travail proposé aux élèves reste dans le cadre numérique avec un tableau de valeurs et un dessin statique qui focalise l'intérêt pour des angles très particuliers. Pour que les élèves prennent conscience du changement de cadre il faudrait qu'ils résolvent des problèmes qui nécessitent ce changement de point de vue, mais ces problèmes sont absents de l'organisation mathématique. Ainsi la continuité de la fonction cosinus est assurée implicitement par le cercle trigonométrique mais il n'existe pas de tâche liée à cette dynamique. Dans le corpus des connaissances nécessaires pour le professeur nous notons également qu'il existe une catégorie qui correspond à des problèmes qui donneraient du sens aux concepts à enseigner et qui les motiveraient.

7. Identification d'un problème de la profession

Nous avons posé dans cet article la question de la construction de l'espace numérique en classe de seconde. Le problème qui est observé dans les classes est la difficulté de sa mise en place conformément au curriculum officiel. Nous pouvons résumer les demandes institutionnelles :

- ne pas faire de révisions systématiques ;
- faire des reprises du NA en lien avec les autres cadres en particulier le cadre fonctionnel ;
- travailler les notions en tant qu'outils dans des résolutions de problèmes.

Des contraintes pèsent sur les choix didactiques à différents niveaux de co-détermination didactique :

- au niveau de la discipline, l'écriture des programmes qui semble influencer les progressions suivies par les professeurs et par les auteurs des manuels ;
- au niveau de l'école, la place de la classe de seconde, comme charnière entre collège et lycée, et de plus passage obligé vers la classe de première S où les difficultés en mathématiques deviennent des handicaps pour les élèves et pour le professeur ;
- au niveau de la société, la réussite en mathématiques est très souvent la clé pour s'orienter vers des études supérieures. Ainsi la demande sociale pèse sur les professeurs de lycée, et en particulier sur les professeurs enseignant en première S et terminale S.

D'autre part les représentations des enseignants influencent leurs décisions didactiques. Elles peuvent concerner par exemple leur rapport personnel à l'activité mathématique, leur perception de l'élève de seconde, leur conception des processus d'apprentissage ou encore leur façon d'expliciter les difficultés des élèves (Larguier, 2005).
Dans les deux classes observées, l'activité proposée aux élèves se présente presque toujours sous la forme de notions travaillées en tant qu'objets et pratiquement jamais comme outils de résolution de problème (Douady, 1986). Dans le cadre numérique, les objets sont identifiés par des ostensifs, les tâches sont souvent réduites à des manipulations de ces ostensifs (« *tu mets les racines de trois ensembles* » ; « *tu remontes tout en haut* » ; « *tu enlèves les petites barres* » éléments technologiques entendus chez Clotilde). Ces mathématiques sont coupées de leurs raisons d'être, des tâches sont travaillées de façon immotivée. Nous constatons également que le langage naturel est totalement absent dans les productions écrites des élèves, alors que ce registre

(Duval, 1995) est essentiel dans les processus de conceptualisation. Le travail du numérique est réduit à un travail de manipulation de signes, le raisonnement semble absent de ce domaine.
En utilisant le filtre du numérique nous avons analysé les éléments de cet espace numérique de seconde. En particulier nous avons repéré ce type de tâches T emblématique du numérique qui est le repérage de la nature des nombres rencontrés dans l'activité mathématique. La raison d'être de T pourrait être de déterminer la forme d'écriture la plus adaptée par rapport au contexte dans lequel le nombre apparait. Nous avons recherché des lieux du programme de seconde où cette tâche emblématique pouvait être reprise. C'est ainsi que la valeur absolue et la trigonométrie ont été analysées comme étant des habitats possibles.
Ces constats nous amènent à poser des questions sur les connaissances que les professeurs devraient pouvoir mettre en œuvre pour ne pas passer à côté de nouvelles rencontres concernant le numérique. Nous identifions des connaissances épistémologiques spécifiques des mathématiques enseignées, ce que Chevallard appelle épistémologie scolaire (2004). Nous pourrions formuler cela également en disant que ce sont des connaissances liées à la prise de conscience du processus de transposition didactique entre le savoir de référence et le savoir à enseigner (Chevallard & Joshua, 1991).

Notre travail a permis de débusquer des connaissances nécessaires pour l'enseignement du numérique, domaine dont on peut penser qu'il est très familier au professeur. Voici quelques exemples de telles connaissances.
- La prise de conscience des cadres implicites travaillés à travers les différents points de vue d'une notion. Pour les thèmes de la valeur absolue et du cosinus, nous avons montré comment le flou du professeur sur les changements de cadres ne permet pas aux élèves de dépasser les obstacles inhérents aux notions étudiées. Cette identification entraîne alors une question didactique : comment faire prendre conscience aux élèves des changements de cadre, autrement dit à travers quels problèmes ? Les professeurs devraient connaitre des exemples de tels problèmes.
- Les raisons d'être mathématiques de certaines exigences ou traditions. Par exemple pourquoi s'intéresser à des valeurs particulières d'angles, pourquoi celles là, pourquoi pas 10° ou 100° ? Pourquoi vouloir des valeurs exactes pour exprimer leurs « lignes » trigonométriques ? Pourquoi chasser les radicaux des dénominateurs ? Quels sont les problèmes qui nécessitent ces apprentissages ? Ces raisons sont souvent perdues, elles doivent être recherchées pour motiver la nécessité de certains savoirs.
- La compréhension de l'organisation globale des programmes du collège au lycée. Nous mettons à jour également une difficulté du côté du professeur au niveau de la discipline, elle consiste à percevoir le programme comme un ensemble cohérent en lien avec les programmes des autres classes. La vision d'ensemble devrait permettre de mieux anticiper les reprises des connaissances antérieures pour les consolider et permettre les apprentissages sur le long terme.
- Des connaissances sur les processus de conceptualisation des notions enseignées. Les professeurs devraient savoir anticiper les conceptions qui vont se développer en lien avec les organisations mathématiques choisies. Nous avons vu par exemple comment le concept de valeur absolue n'est pas construit chez les élèves qui n'ont retenu que des bribes de praxéologies mises en place. Cela suppose que les professeurs connaissent également l'existence d'obstacles épistémologiques et didactiques qui ont été repérés dans les recherches. Un exemple concerne la valeur absolue, l'appropriation de ce concept par les élèves nécessite de dépasser au moins 4

obstacles (Brousseau, 1983 ; Duroux, 1983). Si les professeurs repèrent bien la difficulté d'apprentissage de la notion, ils n'ont en général pas pris conscience de la nature des difficultés.

Les difficultés sont perçues par les professeurs comme un problème du côté de l'élève et non pas comme signal d'un problème de la profession de professeur de mathématiques. Mais comment amener les professeurs à développer ces prises de conscience ? Un paradoxe a été mis à jour : les professeurs appliquent en conformité les contenus des programmes, mais ne savent pas évaluer les besoins mathématiques des élèves et en conséquence leurs propres besoins concernant leurs connaissances personnelles pour enseigner des mathématiques.
Mais comment leur faire acquérir ces connaissances produites par les recherches en didactique, sans une formation initiale et continue plus conséquentes ? Nous touchons là à des choix de société et à des choix politiques. Si la formation tout au long de la vie est affirmée comme principe, il faut constater la pauvreté de la formation continue et la briéveté de la formation en didactique dans la formation initiale actuelle. Cette contrainte pèse lourdement sur le déficit de connaissances didactiques du professeur alors même que le corpus de connaissances nécessaires au professeur pour enseigner est en train de se constituer grâce à l'implication de chercheurs dans ce domaine en pleine exploration.

Références

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques , 19/1*.

Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée.* Grenoble: Thèse de doctorat, Université J. Fourier.

Bronner, A. (2001). Les nombres réels dans la transition collège-lycée : rapports institutionnels et milieux pour l'apprentissage. *Actes du séminaire national de diactique.* IREM Paris 7.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en questions.* HDR, université UM2.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques* , pp. vol. 4.2, p. 164-198.

Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques , Vol. 11* (23).

Chevallard, Y., & Joshua, M.-A. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage (2e édition revue et augmentée).

Chevallard, Y. (1997). Familière et problèmatique la figure du professeur. *Recherche en didactique des mathématiques* , p. vol17/3.

Chevallard, Y. (1999). Organiser l'étude. Cours 3. Ecologie et régulation. *Actes de la Xème Ecole de didactique des mathématiques.* Corps: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2000). *Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale.* www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/textes/YC_2000_Maths_sans_fronti%E8res.doc.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Actes de la troisième université d'été Animath.* Saint Flour.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans *Sociedad, escuela y matematicas, Aportaciones de la Teoria Antropologica de lo Didactico (TAD).* Jaen: Publicaciones de la Universidad de Jaen.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM.* Thèse de doctorat, Université Aix-marseille 1.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques* , Vol.7/2.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x n°3* .

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang S. A.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1994). Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. Dans *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 343-348). La pensée sauvage.

Larguier, M., & Bronner, A. (2004). Symposium coordonné par Bucheton D. : Analyse didactique de la séance "carte de géographie". *actes du colloque international de l'AIRDF.* Québec

Larguier, M. (2005). *Les reprises des domaines numérique et 'algébrique en classe de seconde.* Mémoire de DEA, Université Montpellier II.