

# LA PROJECTION ORTHOGONALE AU CŒUR D'UNE DEMARCHE PLURIDISCIPLINAIRE : une étape centrale dans la structuration de l'espace à l'école\*

A.L. Mesquita

IUF Nord-Pas-de-Calais / Equipe DIDIREM U. Paris 7\*\*

**Résumé :** La géométrie – science de l'espace mais aussi science de la représentation graphique – constitue un outil pour comprendre, décrire et agir sur l'espace environnant. Nous présentons ici les présupposés théoriques d'une étude longitudinale sur l'apprentissage de la géométrie, en lien étroit avec des disciplines connexes comme la géographie et l'éducation physique et sportive (EPS) ; dans cette approche, l'espace tridimensionnel a naturellement un rôle important. Un exemple d'un travail pluridisciplinaire réalisé avec des élèves de CE1 autour de la projection orthogonale est donné ici ; il se centre en particulier sur l'importance de la coordination des mécanismes perceptifs et kinesthésiques dans l'intuition des formes géométriques.

## Cadre théorique

En France comme dans beaucoup de pays, les manuels scolaires à l'école se centrent surtout sur la géométrie plane, laissant une toute petite place à la géométrie de l'espace. Les programmes de l'école, ainsi que les Instructions officielles, suggèrent de leur côté que l'espace tridimensionnel est à considérer – on parle de « structuration de l'espace » en cycle 1, et de « géométrie » dans les autres cycles – mais les contenus des programmes développent surtout la géométrie plane. Ils apparaissent ainsi comme une liste d'items et de propriétés géométriques, d'intérêt exclusivement mathématique, ne mettant pas en valeur l'aspect de problématisation, permettant de répondre à des questions pratiques.

La perspective que nous avons développée dans cette étude, menée pendant cinq années à

---

\* Projet IUFMNPdC n° R/RIU/98/79. Les autres participants dans ce projet sont : Anna Abbes, Francis Delboë, Barbara Derville, Judith François, Valérie Owsinski, Annick Plouviez, Annie Régner, Sabine Rossini, Jean Vandenbossche, Nathalie Vasseur, Patrice Venant.

\*\* IUFM Nord Pas-de-Calais, 58 rue de Londres, F-59 006 Lille cedex  
alobomesquita@free.fr

l'académie de Lille, de 1997 à 2002, essaie essentiellement de donner à l'espace tridimensionnel, d'une part, et à la problématisation, d'autre part, des rôles majeurs (ce qui nous semble être dans l'esprit des programmes, mais qui n'est ni dans les manuels, ni dans la pratique effective de beaucoup de classes). Dans ce sens, nous nous sommes basés sur le présupposé suivant : l'espace tridimensionnel est une entrée privilégiée dans l'apprentissage de la géométrie, et ceci en articulation étroite avec d'autres disciplines traitant également l'espace, la géographie et l'éducation physique et sportive (EPS), par l'intermédiaire d'activités de problématisation adéquates. Deux « composantes » de l'espace sont à privilégier, en début de scolarité : d'une part, l'espace en tant que « lieu où les corps peuvent se mouvoir librement » (que nous appellerons « espace physique », au sens de Boi, 1995, pp. XV-XVI); d'autre part, un « espace sensible », correspondant aux perceptions sensorielles. Dans ce sens, l'espace physique est d'abord vécu au travers de démarches relevant surtout de la géographie et de l'EPS.

Dans notre approche, l'action a un rôle essentiel<sup>1</sup>, soit liée au mouvement, soit en tant que manipulation<sup>2</sup> et construction d'objets « de la réalité ». Ce sont des actions qui vont permettre aux enfants de saisir des caractéristiques de l'espace, et de passer graduellement à des espaces plus abstraits, par des activités de problématisation appropriées.

Cette entrée par l'espace tridimensionnel est matérialisée à travers la manipulation et la construction d'objets familiers de l'espace physique<sup>3</sup> ; dans une première phase, on travaille la construction d'objets tridimensionnels et de maquettes ; par la suite, le passage de l'espace au plan – et du plan à l'espace - joue un rôle crucial. La structuration des activités spatiales, au sens de Berthelot et Salin (1998), exige une prise de conscience des actions liées au mouvement, soit dans le macro-espace (comme dans le cas de la géographie et de l'EPS), soit dans des espaces à « petite échelle ». Les gestes développés par les enfants sont à la base des concepts géométriques qui seront développés et étudiés plus tard, comme nous l'analyserons ci-dessous. Notons que ces études, développées dans une perspective d'ingénierie didactique, montrent aussi que les aspects de transition entre l'espace et le plan sont à la fois importants et négligés, du point de vue de l'enseignement de la géométrie à l'école.

---

<sup>1</sup> En effet, comme Berthoz (1997) l'exprime d'une façon claire, en reprenant une réflexion de Goethe sur une phrase célèbre, « au commencement », n'est pas « le verbe », mais l'action. C'est « l'action » qui permettra au « verbe » d'exister – chez l'être humain.

<sup>2</sup> Manipulation matérielle, directe, mais aussi symbolique, au sens de Caron-Pargue (1981), sur des « substituts d'objets ».

<sup>3</sup> À un autre niveau, l'étude de Rommevaux (1998), sur la géométrie tridimensionnelle, s'insérant dans une perspective analogue, montre l'importance de la manipulation dans l'apprentissage de la géométrie au lycée.

Dans notre étude, un premier travail, développé avec les enfants de CP (première année d'enseignement primaire), visait l'accomplissement d'actions que nous considérons essentielles. D'abord, à travers la construction d'objets, les enfants peuvent s'apercevoir de « l'existence » des trois dimensions<sup>4</sup>. Ensuite, il est possible d'utiliser différentes formes de représentation de ces objets tridimensionnels : soit des constructions d'objets tridimensionnels (comme des maquettes, par exemple) soit des représentations planes, graphiques, de ces mêmes objets. Dans le premier cas, il s'agit de « représentations 3D pour 3D » (en utilisant la terminologie de Rommevaux, 1998) dans le deuxième cas, il s'agit de représentations planes d'objets tridimensionnels ; nous avons utilisé essentiellement deux formes de représentation : une représentation parallèle (« 2D pour 3D », dans la même terminologie) et une représentation liée aux vues en projection orthogonale (« 2D pour 2D »). Notons que dans ces cas, la « troisième dimension » n'apparaît que par la coordination des représentations planes constituées par les différentes vues. Nous avons aussi privilégié la projection orthogonale dans la construction des maquettes, liée à la question de la « trace au sol » des bâtiments, démarche considérée essentielle en géographie (Cf. Considère et al. , 1997)<sup>5</sup>.

La construction d'objets permet encore de prendre compte des modifications de perspective qui accompagnent les changements de point de vue ; par ailleurs, la réalisation de gestes liés à la construction d'objets est un moyen indispensable à la compréhension future de notions géométriques, comme les relations topologiques, liées à la proximité des objets, d'une part, et les relations géométriques, d'autre part ; ces gestes permettent ainsi une première approche intuitive de notions géométriques (tels que plan, segment : la notion de surface plane apparaît associée à un certain type de découpe d'éléments, au geste réalisé pour effectuer la miniature de la jardinière de la cour de l'école, en coupant avec un couteau en bois, la pâte à modeler, par exemple). Une première notion de parallélisme apparaît à travers la construction de pavés, en « tassant » uniformément la pâte à modeler à l'aide d'une petite planche (un exemple concret de la mise en application du principe berthozien « *au début était l'action* » — et seulement après, le « verbe »<sup>6</sup> et la formalisation).

Ces premières notions géométriques intuitives vont pouvoir être renforcées par des actions de mouvements développés sur le macro-espace, en EPS : la matérialisation du « chemin le plus court », les notions topologiques,...

---

<sup>4</sup> Pendant l'exposé, nous nous centrerons également sur d'autres parties de l'étude

<sup>5</sup> A un autre moment de l'étude, les élèves ont construit des plans-reliefs à partir de plans cadastraux du quartier.

<sup>6</sup> Ce point issu des analyses de Berthoz (1997) sera développé pendant la présentation orale.

Ce travail « perceptivo-gestuel », pour utiliser la terminologie de Vergnaud (1994), est une condition essentielle à une effective coordination des points de vue<sup>7</sup>. Notons que cette coordination est loin d'être automatique ; ces actions « perceptivo-gestuelles » développées par les enfants y contribuent, d'une façon importante. La coordination des points de vue, jugée comme un facteur très important dans la maîtrise des rapports spatiaux, ne s'acquiert pas spontanément. Le changement de position des élèves pour saisir les différents points de vue devrait jouer, à notre avis, joué un rôle important dans cette coordination.

Un autre point important pour le développement de notre travail est la question de l'articulation de registres, au sens de Duval : la prise en compte, d'un point de vue de l'enseignement de l'articulation de registres permet de faire face à de vrais obstacles aux apprentissages, comme le montre Duval (1995, 1998). Nos études antérieures sur des problématiques associées (Mesquita et al. 1998, ainsi que Mesquita, 1992), suggèrent que l'utilisation de plusieurs formes de représentation de l'espace et l'articulation entre elles est un facteur déterminant pour pouvoir résoudre certains problèmes géométriques.

## **Méthodologie générale**

L'étude longitudinale a été réalisée avec une cohorte d'âge, pendant toute la durée de la scolarité élémentaire, du CP au CM2. Nous avons commencé avec tous les élèves entrant en CP dans les deux classes d'une école lilloise en 1997/98 ; par la suite, le groupe s'est réduit aux élèves restés dans cette école. Nous avons proposé des activités aux enfants, planifiées en fonction de nos hypothèses, pendant des séances dans la classe, (de quatre à huit séances par an, en fonction des situations traitées). Les séances ont été enregistrées et analysées par la suite, en essayant de dégager les démarches et les difficultés des élèves dans ces tâches (Cf. Mesquita et al., 1999, 2001, pour un développement de cette partie).

### **Un exemple : la projection orthogonale au cœur d'une activité pluridisciplinaire**

La présentation décrite ici se centre sur une phase de cette étude, avec des élèves de CE1 (deuxième année de l'école élémentaire), et concerne en particulier la transition entre l'espace et le plan ; l'importance de la coordination des mécanismes perceptifs et kinesthésiques dans l'intuition des formes géométriques y est centrale<sup>8</sup>. Nous analysons ici quelques aspects de ce

---

<sup>7</sup> Pour les psychologues, il s'agit d'une étape considérée cruciale dans la maîtrise des rapports spatiaux chez l'enfant (voir M.G. Pêcheux, 1990, par exemple).

<sup>8</sup> Pour plus de détails sur les hypothèses de l'étude longitudinale, cf. Mesquita et al., 2001).

moment, en revenant par la suite à l'étude globale.

L'utilisation « en situation » de la notion de projection orthogonale est un moment décisif de cette intervention. Les interventions ont été développées autour de : i) passage de l'espace au plan; ii) de l'objet physique à l'objet géométrique. Un travail autour de la manipulation et la construction de solides a été développé, associé aux différentes formes de représentation d'objets ; pour cela, nous avons retenu le système de vues en projection orthogonale et la perspective cavalière.

Ce travail a permis de : (a) prendre en compte le passage de l'espace au plan ; (b) contribuer, par le contrôle des gestes et du mouvement, à une effective coordination des points de vue ; (c) articuler l'objet (en l'occurrence, des solides *Structuro*) aux formes de représentation choisies, ainsi que celles-ci aux objets respectifs.

Par la suite, l'objectif était de construire un solide, à partir de vues données du même solide. Pour cela, nous avons utilisé le matériel pédagogique *Structuro*, constitué de cubes de même dimension, dont les faces parallèles sont colorées d'une même couleur (rouge, jaune, bleu, en l'occurrence, Cf. fig. 1) . Ce matériel permet une matérialisation des vues en projection orthogonale : on choisit le jaune, par exemple, pour les faces qu'on voit « par le dessus et par le dessous » et les faces bleues pour les faces vues de côté ; la vue de face, la vue du dessus, et la vue latérale sont ainsi facilement matérialisées et visualisées. Les déplacements des élèves autour des solides, le changement de position pour pouvoir s'approprier des différentes vues ainsi que la « matérialisation » des vues de face, du dessus, de côté, a permis aux élèves d'identifier ces représentations comme des vues différentes d'un même objet de l'espace ; cela a permis également de mettre en jeu des critères et des repères différents pour analyser des représentations, fixes ou relatifs, tels qu'ils sont utilisés en géographie ou en géométrie<sup>9</sup>.

Dans un deuxième moment, nous avons proposé aux élèves de construire des solides à partir de vues données (2D pour 2D) de ce même solide. Cette activité a suscité de nombreuses difficultés puisque les élèves avaient tendance à regarder ces vues d'une façon indépendante, ayant des difficultés à considérer qu'il s'agissait de différentes vues d'un *même* solide.

---

<sup>9</sup> Notons que la projection orthogonale est un outil essentiel pour les représentations géographiques, comme le montrent Considère et al. (1997) dans leur travail.

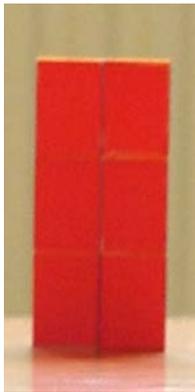
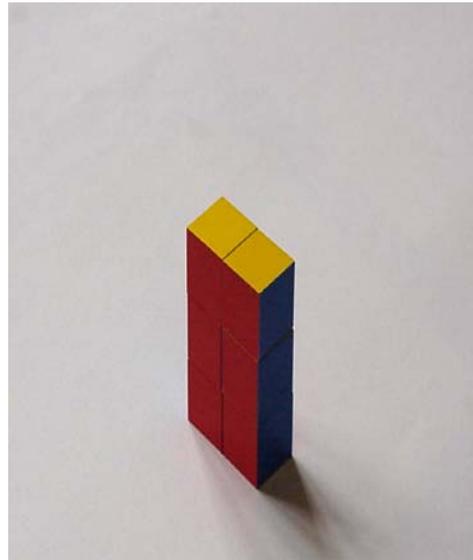


Figure 1: Solide Structuro : Perspective et vues

Pour faciliter la coordination de ces différentes représentations, nous avons également proposé un solide déjà construit et deux ensembles de vues de ce solide, dont une incorrecte (Cf. fig. 2), en demandant aux élèves de choisir la bonne représentation, et de justifier leur réponse en tenant compte du codage utilisé.

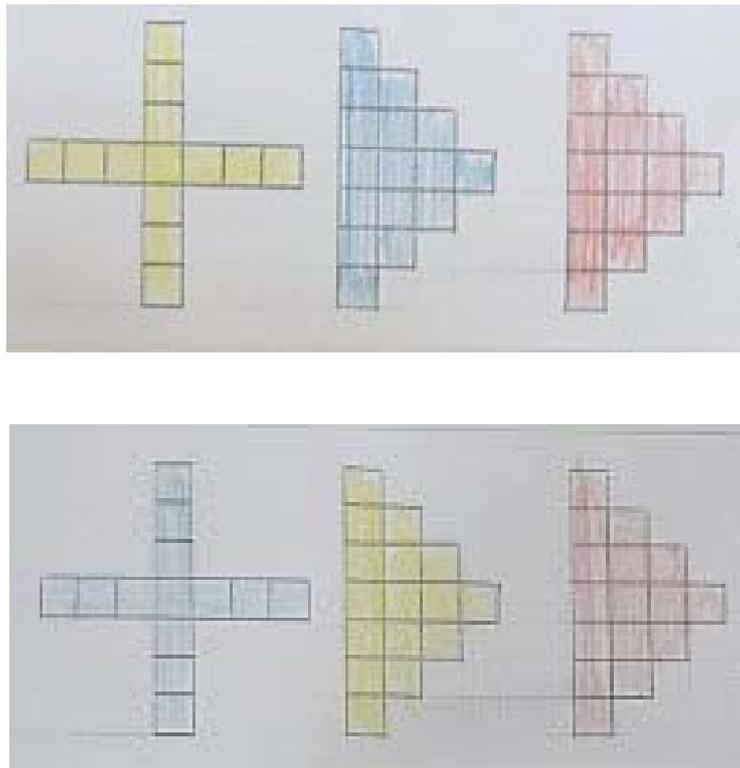


Figure 2 : Identification d'un système de vues

### **Analyse d'obstacles des élèves : en revenant sur les présupposés de l'étude ...**

La difficulté majeure des enfants est liée au fait qu'ils n'identifient pas les vues comme étant des vues (différentes) d'un même solide, mais comme des faces isolées de ce même solide<sup>10</sup>. D'où l'apparition de certaines constructions « à plat », c'est-à-dire, de trois « faces » isolées, construites avec des petits cubes, supposées représenter des solides. Par ailleurs, une confusion entre les vues se manifeste, laquelle n'est pas seulement due à un problème de codage, mais à un problème d'articulation entre les formes de représentation - 2D pour 2D et 2D pour 3D. Pour dépasser cet obstacle, un retour au solide s'est avéré nécessaire.

<sup>10</sup> Pour une analyse plus détaillée des difficultés des élèves voir Mesquita et al . (2001).

Cette « indépendance » des vues est liée à l'obstacle important qui existe pour pouvoir associer le solide aux représentations planes utilisées. L'identification d'un point sur le solide et du même point sur les vues, ainsi que son déplacement sur le solide et sa correspondance sur les représentations planes a déclenché chez beaucoup d'élèves l'association entre les différentes formes de représentation.

Ces obstacles suggèrent que la représentation des objets tridimensionnels pose des réelles difficultés aux élèves. L'absence de vocabulaire spécifique n'est qu'un indice de ces difficultés : les élèves ne disposent pas d'un vocabulaire approprié puisque que les notions spatiales (telles que volume, surface,...) ne sont pas innées, mais à acquérir ; ce type de travail semble contribuer à l'acquisition de ces notions. Les activités réalisées ont permis aux élèves d'associer à un même objet de l'espace tridimensionnel plusieurs vues planes de ce même objet, par l'intermédiaire d'actions basées sur le mouvement, mettant en œuvre la projection orthogonale, concept mathématique qui est un outil essentiel pour la représentation de l'espace géographique. Ceci a facilité la reconnaissance du fait qu'à un même objet pouvaient correspondre plusieurs vues (trois, en l'occurrence) associées entre elles.

En analysant ces résultats, malgré les progrès que nous avons pu observer, nous nous apercevons des difficultés réelles autour de la question du volume ; il nous semblait, au départ, que le caractère tridimensionnel de l'espace physique (trois dimensions, au regard des mathématiques, trois degrés de liberté, au regard de la physique) devrait être exploité d'abord, et par la suite seulement, seraient introduits les autres espaces géométriques de dimension inférieure : le plan (deux degrés de liberté), la droite (un degré de liberté). Oui mais ... cet espace tridimensionnel doit être bien articulé avec l'espace des géographes, en particulier, et l'espace physique, au sens de L. Boi, lequel est traité aussi par l'EPS. Et le volume, avec cette idée d'opposition intérieur-extérieur qui semble être à l'origine de beaucoup de difficultés (Cf. Mesquita et al, 1999) serait à traiter plus tard. Autrement dit, et pour revenir aux programmes scolaires : et si une « structuration de l'espace » pluridisciplinaire (géométrie, géographie, EPS) continuait au cycle 2 ?

## **Bibliographie**

- Berthelot R. & Salin M.H. (1998) The role of pupils'spatial knowledge in the elementary teaching of geometry, in C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century* (An ICMI study), pp. 71-78, Kluwer, Dordrecht.
- Berthoz A. (1997) *Le sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris.
- Boi L. (1995) *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Springer, Berlin.

- Caron-Pargue J. (1981) Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2.3, 5-35.
- Considère S., Griselin M. & Savoye F. (1997) *La classe paysage. Découverte de l'environnement proche en milieux urbain et rural*, Armand Colin, Paris.
- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Bern.
- Duval R. (1998) Geometry from a cognitive point of view, in C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century* (An ICMI study), pp. 37-52, Kluwer, Dordrecht.
- Duval R. (Ed., 1999) Conversion et articulation des représentations analogiques, *Séminaires de recherche*, 1, IUFM Nord—Pas-de-Calais.
- Mesquita A.L. (1992) Les types d'appréhension en géométrie spatiale: esquisse d'une recherche, *Actes du Colloque International sur la Représentation Spatiale: Représentation de l'espace et habiletés spatiales* (CIRADE, Université du Québec à Montréal, Canada, 28-30 Août 1991, *Topologie Structurale* ) *Structural Topology*, 18, 19-30.
- Mesquita A.L., Delbøe F., Régnier A., Rossini S. & Vandenbossche J. (1999) *Pour une valorisation de la géométrie à l'école*, Rapport d'un projet de recherche-innovation, IUFM Nord—Pas-de-Calais, Lille.
- Mesquita A. L., Régnier A. , Rossini S. & Vandenbossche J. (2001) *L'espace et la géométrie à l'école : Essai d'étude longitudinale (le cas du CE1 et du CE2)*, Rapport du projet de recherche R/RIU/98/079, IUFM Nord-Pas-de-Calais, Lille.
- Pêcheux M.G. (1990) *Le développement des rapports des enfants à l'espace*, Nathan, Paris.
- Rommevaux M.P. (1998) Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 27-65
- Vergnaud G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in M. Artigue et al. (Eds.) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble.