La Notion d'infiniment petit en économie : historique et implications didactiques

Valérie HENRY

Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
Université de Liège
V.Henry@ulg.ac.be

Résumé : De Cournot à Samuelson en passant par Walras et Jevons, les économistes ont de tous temps utilisé des nombres qu'ils qualifiaient, selon les cas, d' « infiniment petits » ou d' « infinitésimaux ». Ces quantités, dont on aurait voulu qu'elles soient plus petites que tout réel positif mais non nulles, n'existent réellement que depuis 1961, leur existence ayant dû attendre les développements de la logique moderne pour être prouvée. Dans l'optique d'un enseignement des mathématiques à de futurs économistes, il nous a semblé intéressant d'étudier les perceptions de différents publics d'étudiants vis-à-vis de ces notions tant du point de vue de l'économie que des mathématiques.

Enseignant en candidatures[1] à de futurs économistes, nous menons depuis deux ans une expérience d'enseignement du calcul différentiel et intégral par l'Analyse Non Standard. Cette initiative est consécutive à plusieurs constatations notamment au niveau du vocabulaire employé par les économistes qui semblait présenter de nombreuses similitudes avec celui de l'Analyse Non Standard. Afin de vérifier ces hypothèses, nous avons mené plusieurs enquêtes auprès d'étudiants. Dans ce cadre, la question suivante a notamment été posée à un échantillon de 279 étudiants d'horizons différents :
« Un tas de sable pèse 50 kg. Combien pèsera-t-il, si on rajoute un grain de sable ? »
Parmi ces étudiants, on comptait des premières et des secondes candidatures en orientation économique, de futurs enseignants de Collège en mathématiques ainsi que des futurs enseignants de Lycée en mathématiques. L'échantillon a été scindé en trois groupes :

- les futurs économistes n'ayant aucune connaissance en « Analyse Non Standard » (1) (effectif : 211)
- les futurs mathématiciens n'ayant ni formation économiste ni formation en Analyse Non Standard (2) (effectif : 27)
- les futurs économistes ayant suivi un cours d'Analyse Non Standard en première candidature (3) (effectif : 41)

L'analyse des réponses à cette question simple montre que parmi les groupes (1) et (2) n'ayant jamais suivi un cours d'Analyse Non Standard, 36 mentionnent explicitement le vocable « infiniment petit » tandis que 59 utilisent des termes similaires tels que « négligeable » ou « infime » ou encore « infiniment proche ». Dans le groupe (3), la répartition est légèrement différente étant donné que ces étudiants ont déjà à leur disposition le vocabulaire de l'ANS : onze réponses contiennent les mots « infiniment petit » et 16 une terminologie similaire. Les résultats détaillés sont repris dans le tableau ci-dessous :

Contient « infiniment petit » ?	Groupe (1)	Groupe (2)	Groupe (3)	Total

[1] Premières années d'université en Belgique.

OUI	36	0	11	47
Similaire	54	5	16	75
NON	121	22	14	157
Total	211	27	41	279

A titre d'exemples, voici quelques réponses fournies par les étudiants :
Le poids d'un grain de sable étant infiniment petit, on ne peut le constater à l'œil nu.
Un grain de sable ne change pas le poids d'un tas de sable de 50 kg tellement il est « infiniment petit ».
Le tas pèsera très infiniment plus mais la différence de poids ne pourra être perçue à l'œil nu sur une balance.
Le poids d'un grain de sable est infinitésimal.

En examinant le tableau, on constate que parmi le groupe (2), personne ne mentionne la notion d' « infiniment petit » alors qu'elle est présente dans les deux autres groupes. Ce groupe se différencie des deux autres par la formation strictement mathématique (sans aucune notion d'économie) reçue par les étudiants. Cette constatation nous amène à une étude un peu plus poussée du vocabulaire utilisé par les économistes. La lecture de plusieurs ouvrages rédigés par ceux-ci montre comment les mots « infiniment petits » ou « infinitésimaux » sont employés régulièrement dans plusieurs situations sans être définis explicitement, le sens donné à ces notions étant supposé évident.

Une deuxième question posée lors de cette enquête nous permet de dégager l'idée que ces apprenants se font de la notion d' « infiniment petit » qui apparaît régulièrement dans leurs cours d'économie sans y être définie. A la question « Que signifie pour vous 'infiniment petit' ? », on enregistre les réponses suivantes :

- Dans le groupe (1), la réponse la plus fréquemment citée (45 mentions) utilise la notion de limite ou de convergence : un infiniment petit est une quantité qui tend vers 0 ou dont la limite vaut 0 ; 41 étudiants définissent un infiniment petit comme une quantité négligeable ; 33 expliquent qu'il s'agit de quelque chose qu'on ne peut voir ou se représenter à l'œil nu. Parmi les autres réponses, citons, par ordre décroissant du nombre d'apparitions :
  - ✓ Une quantité non-mesurable (26 mentions)
  - ✓ Quelque chose de très petit (23 mentions)
  - ✓ Notion relative à ce à quoi on le compare (20 mentions)
  - ✓ Presque égal à 0 ou presque rien (19 mentions),…
- Dans le groupe (2), 7 étudiants ne répondent pas à la question et passent directement à la suivante, les autres réponses sont les mêmes que celles du groupe (1) avec 2, 3 ou 4 mentions.
- Dans le groupe (3), 11 étudiants répondent qu'un infiniment petit est ce que l'on ne peut voir à l'œil nu ; 11 autres utilisent le vocabulaire de l'Analyse Non Standard pour donner la définition ; 9 invoquent une quantité négligeable ; 4 argumentent qu'il s'agit d'un élément qu'on ne peut voir qu'à l'aide d'un microscope ou d'une loupe très puissante ; les deux autres réponses sont
  - ✓ Quelque chose de plus petit que tout (4 mentions)
  - ✓ Quelque chose de très petit (4 mentions)

Le tableau suivant résume les observations précédentes :

Réponses	Groupe (1)	Groupe (2)	Groupe (3)	Total
Négligeable	41	4	9	54

Pas à l'œil nu	33	3	11	47
Limite	45	0	0	45
Très petit	23	4	4	31
Non-mesurable	26	2	0	28
Presque égal à 0	19	3	0	22
Relatif	20	0	0	20
Plus petit que tout	14	2	4	20
Vocabulaire ANS	2	0	11	13
Microscope	4	2	4	10
Indivisible	3	0	0	3
Sans réponse	4	7	1	12

Leur interprétation se rapproche finalement du sens que donnaient à cette notion les précurseurs du « Calculus » : Newton, Leibniz et leurs contemporains. Ces mathématiciens célèbres utilisaient abondamment la notion qui nous occupe sans pour autant être capables de la définir formellement ni de prouver l'existence d'un nombre infiniment petit. Préoccupé uniquement par le sens que cela conférait à leurs développements mathématiques, Leibniz définissait un « infiniment petit » comme suit :
« [C'est une quantité] *qui s'évanouit* [pour être] *plus petite que toute quantité donnée, puisqu'il est en notre pouvoir de diminuer l'incomparablement petit, que l'on peut toujours supposer aussi petit que l'on veut* » [Leibniz (1702), cité par Mawhin (1997), p. 37].
Malheureusement, les connaissances de l'époque en mathématiques ne lui permettaient pas de répondre aux critiques formulées par ses détracteurs :
« *Vous devez les imaginer, debout ensemble sur la scène de l'histoire, les mains jointes derrière le dos, les yeux perdus au loin, ces mathématiciens du XVIIe et du XVIIIe siècles, Leibniz et Newton, bien sûr, mais aussi les autres, d'Alembert, L'Hospital et Lagrange, portant dentelles et jabots, parfumés, emperruqués et poudrés. Ils ont construit le Calcul et ce qu'ils ont construit fonctionne brillamment. Seulement voilà : ils sont incapables d'expliquer ce qu'ils ont fait. Une voix s'élève dans le public (...) :*

- *Pouvez-vous décrire ces infinitésimaux, nous en dire un peu plus sur eux ?*
- *Ils se comportent comme des nombres mais naturellement, ils sont plus petits que tout autre nombre. Sinon ils ne seraient pas infinitésimaux.*
- *Absolument. Petits, très petits.*
- *Zéro, alors ?*
- *Non, pas tout à fait zéro, plus grands que ça.*
- *Mais pas tellement plus grands.*
- *Pourriez-vous être plus précis ?*

Et la chose remarquable, c'est qu'en réponse à cette dernière question, ces hommes brillants ne peuvent que fourrer leurs mains dans leurs poches, laisser le rouge leur monter aux joues et contempler le plafond d'un air sombre. » [Berlinski, La vie rêvée des maths (1995)].
Et pourtant, au XVIIIe siècle, de nombreux grands mathématiciens découvrirent des résultats qui sont encore aujourd'hui à la base du calcul différentiel et intégral tels que :

- Le lemme de Rolle
- La règle de L'Hospital
- Les formules de Taylor et Mac Laurin
- Les résultats des frères Bernoulli, d'Euler, de D'Alembert ou encore de Lagrange.

Tous ces résultats n'étaient alors prouvés que de manière peu rigoureuse, leur découverte étant basée sur la notion d'infiniment petit, dont l'existence, non seulement ne pouvait être

démontrée, mais engendrait des paradoxes tel celui invoqué par l'évêque Berkeley pour rejeter les infiniment petits : en effet, la somme de deux infiniment petits étant infiniment petite, pour un élément a infiniment petit et pour tout entier n, le produit na restera infiniment petit et ne pourra donc être rendu plus grand qu'un entier arbitraire, ce qui viole le principe archimédien selon lequel, pour deux nombres positifs a et b, on peut trouver un entier n tel que $na > b$. C'est à cette époque que les mathématiciens entreprirent d'exclure les infinitésimaux de leurs raisonnements et que se développa l'analyse telle qu'elle est enseignée actuellement. Le titre d'un des ouvrages de Lagrange est d'ailleurs révélateur puisqu'il s'intitule :
« Théorie analytique des fonctions – contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants » [Lagrange (1797), cité par Gaud – Guichard – Sicre – Chrétien (1988), p. 77].

Parallèlement, les économistes, eux, commencèrent à découvrir les mathématiques. Notamment, Antoine Augustin Cournot (1801-1877), philosophe et mathématicien, apparaît aujourd'hui comme le fondateur de l'économie moderne ; ses développements préfiguraient d'ailleurs déjà les raisonnements de l'Analyse Non Standard. Et bien que les mathématiciens aient poursuivi leur route loin du chemin des infiniment petits, les économistes continuaient à trouver cette notion très utile pour expliquer les concepts fondamentaux de leurs développements ; c'est ainsi que naquit notamment le marginalisme sous les impulsions simultanées mais séparées du français Léon Walras (1834-1910) et de l'austro-anglais William Stanley Jevons (1835-1882). Cette théorie, fondamentale en économie, développe l'importance de la dernière unité. L'introduction du calcul infinitésimal dans le marginalisme fut de la plus grande importance. Suivons le raisonnement de Walras :
« *Rien n'indique que les courbes ou équations partielles (...) soient continues, c'est-à-dire qu'une augmentation infiniment petite de* p_a *y produise une diminution infiniment petite de* d_a. *Au contraire, ces fonctions seront souvent discontinues. Pour ce qui concerne l'avoine, par exemple, il est certain que notre premier porteur de blé réduira sa demande non pas au fur et à mesure de l'élévation du prix, mais d'une façon en quelque sorte intermittente chaque fois qu'il se décidera à avoir un cheval de moins dans son écurie. Sa courbe de demande partielle aura donc en réalité la forme de la courbe en escalier passant au point a. Il en sera de même de tous les autres. Et cependant, la courbe totale (...) peut, en vertu de la loi dite des grands nombres, être considérée comme sensiblement continue. En effet, lorsqu'il se produira une augmentation très petite du prix, l'un au moins des porteurs de (B), sur le grand nombre, arrivant à la limite qui l'oblige à se priver d'un cheval, il se produira aussi une diminution très petite de la demande totale.* »
Ainsi, la dernière unité étant par définition une quantité concrète, il paraît absurde de rendre cette quantité infiniment petite. Néanmoins, si l'on envisage de considérer une production totale qui soit très grande, il semble naturel de voir la dernière unité comme négligeable par rapport à la production totale ; négligeable ne voulant pas dire inexistante, les économistes reprirent à leur compte les théories de Leibniz pour passer d'un contexte discret à un univers continu où le coût marginal défini comme étant *le coût additionnel engendré par la production d'une unité supplémentaire de produit lorsque la quantité de production initiale est x,* se trouve être finalement le nombre dérivé du coût total par rapport à la production.
Formellement, en discret, on écrit

$$Cm(Q) = C(Q+1)-C(Q).$$

Lorsque la production Q devient très grande, la quantité ajoutée devient, proportionnellement, très petite. En notant ∂Q cet accroissement très petit de la production, le taux de variation du coût de production est donné par

$$[C(Q+\partial Q)-C(Q)]/ \partial Q$$

dont la partie standard fournit, en Analyse Non Standard, pour ∂Q infiniment petit, la dérivée C'(Q).
La façon dont les économistes conçoivent le passage d'un modèle discret à un modèle continu correspondant peut varier selon les auteurs. Parfois embarrassés de devoir justifier un passage à la limite, certains l'acceptent et laissent aux mathématiciens le soin de s'interroger sur sa légitimité, comme en témoigne ce passage :
« (…) *Cette dérivée mesure la réaction moyenne de y à une variation 'très petite', 'infinitésimale' de x. Le mathématicien déplore le manque de rigueur d'une telle définition, mais l'économiste passe outre. Homme pratique, il avoue sans complexe confondre 'très petite variation' et 'variation égale à l'unité', cette dernière étant choisie la plus faible possible*. » [Dupont-Rys (1993), p.43]
D'autres, désireux de faire comprendre ce passage, se tournent vers cette notion d'infiniment petit, qui leur permet de traduire l'idée intuitive de leurs raisonnements.

La question persistante reste néanmoins bien présente : « Peut-on prouver l'existence d'(au moins) un nombre infiniment petit ? »
La réponse n'est positive que depuis peu de temps puisqu'il aura fallu attendre le développement de la logique moderne pour y répondre. Ce n'est qu'en 1961 que Abraham Robinson (1918-1974), se basant sur les progrès de la logique mathématique, put construire une extension particulière de l'ensemble des réels, extension qui contenait notamment un élément infiniment petit. Cette construction, basée sur la notion d'ultrafiltre et d'ultra puissance de **R**, restait dès lors assez rébarbative et inabordable pour des « débutants en analyse ». En 1977, Edward Nelson proposa une version axiomatique de l'Analyse Non Standard basée, intuitivement, sur la propriété pour un objet d'être *standard* ou non. Ainsi, en plus des réels « classiques » et au sein même de **R**, il postule qu'il existe des objets non standards ainsi que des axiomes qui régissent l'utilisation de ces objets. Depuis, plusieurs auteurs se sont attachés à proposer des versions de l'Analyse Non Standard que nous pourrions qualifier de « pédagogiques » , qui permettent à des « débutants » en analyse d'aborder ce sujet. Lors de l'exposé, nous commenterons brièvement l'expérience que nous menons actuellement en candidatures où nous proposons un semblable enseignement à de futurs économistes ou gestionnaires.

Références :

Berlinski D. (1995), *La vie rêvée des maths*, Editions Saint-Simon.
Dupont B. et Rys A. (1993), *Introduction à la microéconomie,* Editions Armand Colin, Paris.
Gaud D., Guichard J. , Sicre J.P. et Chretien C. (1998), *Des tangentes aux infiniment petits : réflexions & travaux pour la classe*, IREM de Poitiers.
Mawhin J. (1997), *Analyse : fondements – techniques – évolution*, $2^{ème}$ édition, De Boeck Université, Bruxelles, 1997.
Walras L. (1952), *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, Librairie générale de droit et de jurisprudence R.Pichon et R.Durand – Auzias, Paris.