De nouveaux savoirs en géométrie pour les enseignants ?

Catherine HOUDEMENT
IUFM de Haute Normandie, Université de Rouen, France
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Résumé

L'enseignant doit maîtriser un certain nombre de savoirs pour optimiser son entrée dans le métier, mais ni la définition de ces savoirs, ni l'organisation de leur étude dans le cadre de la formation des enseignants ne sont simples. Ce texte présente l'émergence, à partir de questions de formation, d'un savoir récent qui vise à une (ré-) organisation de la géométrie enseignée dans la scolarité obligatoire ; il propose quelques éléments pour des dispositifs de formation visant son acquisition. Il fournit des arguments contre une vision séparatiste de la formation qui envisagerait notamment des savoirs académiques d'un coté, des savoirs didactiques de l'autre.

1. Introduction

Nous pouvons considérer que les savoirs en jeu dans la formation des futurs enseignants sont de trois types : savoirs relatifs à la discipline enseignée, comprenant des connaissances sur la discipline et sur la didactique de cette discipline : savoirs pédagogiques, transversaux aux disciplines (développement de l'enfant, de l'adolescent, techniques de classe, de gestion de groupes, culture sociale…) : enfin savoirs institutionnels, auxquels participe la connaissance des différentes organisations institutionnelles (école, collège, académie, ministère..) dont relève l'enseignant. Nous nous intéresserons dans ce texte aux savoirs mathématiques et didactiques relatifs à l'enseignement des mathématiques.

Personne ne contestera la nécessité de connaître des savoirs académiques pour enseigner les mathématiques, mais diverses recherches contemporaines, menées par des didacticiens (Briand 1995, Houdement 1995), mais aussi par des mathématiciens (Rogalski 2001, Perrin 2005), aussi bien pour le primaire que pour le secondaire, ont montré que les limites classiques des savoirs académiques ne contiennent pas tous les savoirs nécessaires à l'enseignement : les questions d'enseignement débusquent des savoirs complémentaires, qui nourrissent les *mathématiques pour l'enseignant* (Cirade 2007, 2009). L'existence de ces savoirs mathématiques, à la marge des savoirs mathématiques classiques, émergeant de questions didactiques, confirme la nécessité de ne pas séparer mathématiques et didactique ; les questions sur l'enseignement et nées de l'enseignement sont une nouvelle occasion de questionner les mathématiques, leur genèse et leur développement : le mathématique est partout dense dans le didactique.

Dans cet article, nous nous intéressons plus particulièrement à la question de la géométrie élémentaire, dans la formation des professeurs des écoles essentiellement.

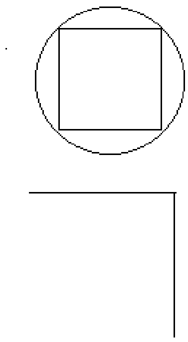
La formation des professeurs des écoles en France est depuis 1991 prise en charge par les IUFM[1]. Cette formation se décompose en deux temps. Une première année, possible en

[1] Instituts Universitaires de Formation, créés en 1991, chargés de la formation initiale (et en partie continue) des professeurs des écoles, collèges et lycées.

IUFM, arme pour le concours (CERPE, concours externe de recrutement pour les professeurs des écoles) les étudiants titulaires d'une licence. L'épreuve mathématique du concours (3 heures, note comptant pour 3/8 du total pour l'admissibilité, 3/14 du total pour l'admission) comporte deux parties écrites, l'une constituée d'exercices mathématiques, l'autre basée sur une analyse liée à l'enseignement. Si le candidat est reçu, il intègre l'IUFM, devient professeur des écoles stagiaire, perçoit un salaire ; la deuxième année alterne stages sur le terrain (où le stagiaire est successivement responsable de différentes classes) et cours divers à l'IUFM. Le faible horaire du cours de mathématiques[2] amène les formateurs à rivaliser d'invention pour préparer les étudiants, dès la première année, au concours, mais aussi à l'enseignement des mathématiques de l'école primaire (enfants de 3 à 11 ans) de toute une carrière.

2. Le dilemme des étudiants professeurs des écoles face à la géométrie

La tradition des exercices de géométrie du concours de professeurs des écoles amène les étudiants à se poser la question de la démonstration, donc d'une justification théorique de leurs affirmations souvent appuyées sur une analyse perceptive ou instrumentale d'un dessin associé au texte. Simultanément l'analyse de tâches géométriques et de réponses d'élèves du primaire offre un prétexte, dont les formateurs devraient absolument se saisir, pour leur faire prendre conscience de la distance entre ce dont ils se souviennent du contrat géométrique de leurs années de collège (de 11 à 15 ans) et celui qu'ils doivent instituer avec leurs élèves de primaire. Le lecteur peut être sensibilisé à cette différence de contrat (école, collège) par l'étude des deux exercices suivants.
Ces exercices ont été proposés lors d'évaluations nationales, proposées par le Ministère de l'Education Nationale (MEN 1997[3]) d'élèves de début de 6ème (11-12 ans, première année de collège), ils nous donnent des indicateurs de performances d'élèves sortant de primaire.



Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle.
Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.

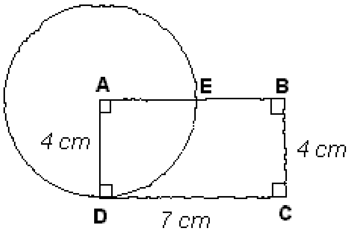
Résultats corrects (1997).
Pour le carré : 94,3%
Pour le cercle : 63,6%

Cet exercice de reproduction sollicite une construction graphique à partir de tracés déjà là. Le tracé du carré demande la mise en acte de la connaissance « côtés perpendiculaires deux à deux » grâce à l'instrument équerre ou la connaissance « quatre côtés de même longueur » grâce aux instruments compas et/ou règle graduée. Le tracé du cercle, instrumenté usuellement par le compas, demande que soit d'abord repéré son centre. Il est relativement courant que les élèves recherchent à tâtons le centre du cercle, posant la pointe du compas en zone centrale, contrôlant l'équidistance aux quatre sommets et rectifiant la position de la pointe si besoin. Pour trouver ce centre sans hésitation et avec plus de précision, il est nécessaire de marquer des tracés supplémentaires (diagonales du carré, médianes) : le raisonnement (même implicite) mené à cette occasion est plus complexe que celui qui débouche sur le tracé du carré, ce qui explique sans doute la différence de réussite.

[2] Par exemple, à l'IUFM de Haute Normandie (Rouen) : 80 h en première année (avant le concours) et 48 heures en seconde année.
[3] L'année n'est pas significative, ces deux exercices restent emblématiques.

On remarquera que pour ce premier exercice, le dessin, trace graphique, est objet d'expérimentation et de contrôle de la réponse (en effet un calque du modèle appliqué sur la production permet de la valider ou de l'invalider, bien sûr avec une marge de tolérance)

Considérons maintenant ce deuxième exercice issu de la même évaluation nationale.



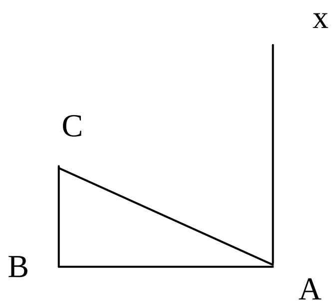
Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.

Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.
Trouve la longueur du segment [EB].
…………………………………….
Explique ta réponse :……………………
……………………………………….

Réponses obtenues	Résultats des élèves
3 ou 3 cm avec ou sans explication	10,3 %
1,9 ou 2 ou 2,1 cm (longueur mesurée sur le dessin fourni)	28 %
3,5 cm ou 4 cm -plus rare- (approche perceptive)	52 %

Cet exercice est d'une tout autre nature, il est d'ailleurs massivement échoué. Le dessin n'est plus que le support du raisonnement, il aide à organiser les informations et à trouver la chaîne déductive qui conduit à la longueur EB. Le dessin ne peut plus contrôler la réponse.
Notons que, dans le document ministériel, cet exercice était accompagné d'un commentaire le désignant comme relevant de compétences (dites remarquables) déclarées non installées en début de 6ème, contrairement au précédent exercice.

En formation, les étudiants postulant au professorat des écoles (étudiants niveau licence 1, appelés PE1) sont aussi entraînés à la résolution d'exercices géométriques en vue du concours, tel le suivant.



On donne le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm et BC = 2 cm. La demi-droite [Ax) est perpendiculaire à la droite (AB). M est un point de la demi-droite [Ax). Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.

<u>Question 5.b.</u> Existe-t-il un point M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

(extrait de l'épreuve de mathématiques CERPE Amiens 2000)

Un certain nombre de réponses de PE1 à de telles questions ressemblent à la suivante en ce qui concerne la relation au dessin. (Houdement & Kuzniak 2006)

> Pour savoir si le triangle ACM est équilatéral, on peut essayer de construire ce triangle sur la figure à l'aide du compas. On place la pointe du compas en A et on prend une ouverture équivalente à la valeur AC, on trace l'arc de cercle sur la demi-droite [Ax). On procède de la même manière en mettant la pointe du compas en C. On se rend compte que le sommet n'est pas sur [Ax) donc le triangle n'est pas équilatéral.

L'étudiant cité s'engage dans la tâche à la façon des élèves de primaire et grâce à une construction utilisant le compas, répond négativement à la question posée. Mais il n'en reste pas là : il éprouve le besoin de justifier cette première affirmation. Il développe alors un raisonnement déductif qui s'appuie sur la seule utilisation d'instruments de mesure, sans recours à la construction.

> Ceci peut s'expliquer par le fait que dans un triangle équilatéral, les angles sont égaux et leur somme vaut 180°. Chacun vaut 60°. Dans ce cas lorsqu'on mesure grâce à un rapporteur, on remarque que CÂM est supérieur à 60°, CÂM=64°.

Cette réponse, qui montre un certain souci de justification et des connaissances, ne satisfait pas le professeur de mathématiques qui attend un raisonnement, détaché au maximum[4] du dessin tel que, par exemple : l'angle BAC a pour tangente ½ ; il n'est donc pas égal à 30°; l'angle complémentaire CAx n'est donc pas égal à 60°.
Notre expérience nous a montré que la réponse en italique n'est pas éloignée, dans son rapport au dessin, de réponses d'élèves de collège.

Nous pointons ici un malentendu entre réponse de l'étudiant (ou de l'élève) et attendu du professeur : l'étudiant essaie de justifier sa réponse en « prenant de la hauteur » par rapport au dessin, le professeur considère la réponse insuffisamment théorique.
Il est à noter que les enseignants de primaire et de secondaire rencontrent tous deux ces décalages : le premier entre ce qu'il a à savoir pour le concours et ce qu'il aura à enseigner, le second entre ce qu'il a à enseigner et ce que lui revoient les élèves, issu de leurs expériences géométriques d'école.

Comment donc permettre aux futurs enseignants de comprendre et gérer ces décalages qui semblent exister entre traces de géométrie apprise en collège et révisées à l'IUFM et géométrie à enseigner à l'école, de construire des réponse adaptées aux diverses institutions qui les évaluent ? Cette question participe à la définition d'une géométrie élémentaire pour le professeur des écoles.

3. Un cadre théorique pour penser la géométrie élémentaire

L'expérience de formateur d'enseignants nourrit en questionnements et observables sur la vie des connaissances mathématiques dans les différents niveaux de scolarité, formation des enseignants incluse. Nous (Houdement & Kuzniak 1999, 2006, Houdement 2007a, 2007b)[5] faisons l'hypothèse que dans l'enseignement, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie et que cette « duplicité » rend compte de malentendus entre élèves et professeurs, de la « rupture » dans l'enseignement français entre école primaire et collège..
Les travaux de Gonseth (1945-1952) nous ont fourni une base essentielle pour la recherche d'une épistémologie sous-tendue par l'idée de paradigme : nous avons défini trois paradigmes géométriques, dont les deux premiers jouent un rôle essentiel dans la scolarité obligatoire, que nous avons nommés Géométrie I, Géométrie II, Géométrie III.

---

[4] Par contre, dans les exercices classiques, on peut rarement se détacher complètement du dessin : il est utile ici d'y lire de quelle demi-droite [Ax) il s'agit.
[5] Pour une meilleure compréhension des paradigmes et de l'ETG (Espace de Travail Géométrique), nous renvoyons aux articles cités, plus détaillés.

Nous n'en dirons pas plus sur le choix du mot paradigme, si ce n'est que, selon le sens que lui donne Kuhn (1962) dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques, cette expression associée à l'idée de rupture, concilie deux composantes de la formation d'enseignants : des croyances à des savoirs partagés par une communauté scientifique et une perspective d'enseignement du paradigme par référence aux pratiques qui en sont constitutives.

La Géométrie I ou « géométrie naturelle »

La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle » que nous lui avons attribué à la suite de Gonseth veut refléter l'existence d'une relation au réel, mais en aucun cas il ne comporte de référence à l'idée de nature opposée à celle de culture. La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas épurés (par exemple les figures simples, cercles, carrés...). L'intuition, l'expérience, mais aussi le raisonnement déductif (comme dans le premier exercice d'évaluation) s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage, l'utilisation d'instruments ou leur pendant virtuel. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas de la Géométrie I ; il s'agit plutôt de celle de la première partie du traité de Clairaut où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où l'esprit doit se libérer de la démonstration de choses évidentes. Cette Géométrie relève d'une technologie de l'espace.

La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle »

Dans cette Géométrie, la validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. La relation avec la réalité subsiste dans le choix des axiomes, cette géométrie s'est en effet constituée pour organiser (créer un ordre partiel sur) les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif de « naturelle ». La Géométrie II s'appuie sur une axiomatisation partielle, voire des îlots d'axiomatisation. Les objets de la Géométrie II sont idéels et aspirent au conceptuel (au sens de Bunge 1983)

La Géométrie III ou « géométrie axiomatique formelle »

Nous en dirons peu sur ce paradigme. Ses objets sont conceptuels (Bunge 1983) : ils ne sont définis que par la théorie dans laquelle ils s'insèrent. Le raisonnement hypothético-déductif est le moteur et la source des nouvelles connaissances. Au contraire de la Géométrie II, les axiomes de base ont coupé le cordon avec la réalité et l'axiomatisation vise à être complète. La Géométrie III a émergé avec la naissance des géométries non euclidiennes. Elle est culturellement peu convoquée, stricto sensu, dans les savoirs de l'école obligatoire.

Les différences entre Géométrie I et Géométrie II sont résumées dans le tableau suivant :

	Géométrie I	Géométrie II
Mesurage	Licite et producteur de connaissances	Illicite pour la production, licite pour l'heuristique
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil heuristique, support du raisonnement.
Preuve	Evidence, contrôle par instrument (dont la fonction « *drag*[6] » des logiciels dynamiques) ou construction effective avec raisonnement	Axiomatisation partielle. Propriétés, théorèmes et « îlots de démonstration »

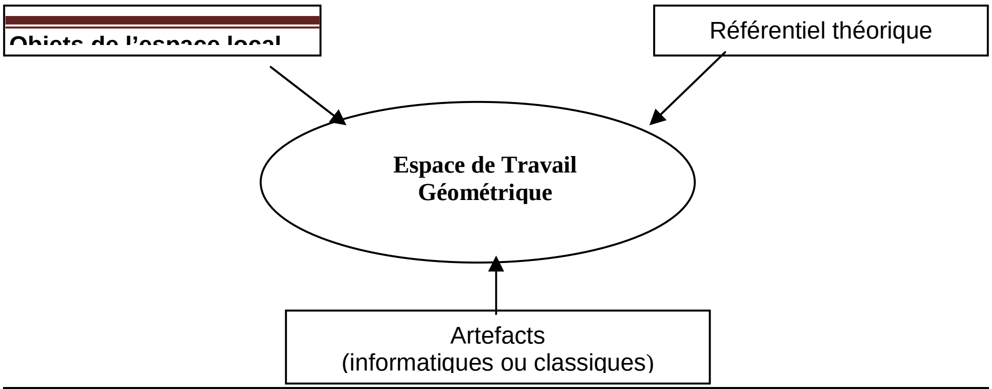
Le lecteur aura pointé que le premier exercice cité relève sans ambiguïté de la Géométrie I, alors que le second relève de la Géométrie II, notamment grâce à l'indication sur le statut du dessin fourni (à main levée). Le dernier exemple (extrait du CERPE) ne porte pas de trace explicite de Géométrie II : seule une certaine connaissance du contrat de l'institution dans laquelle cet exercice est proposé permet d'adapter la réponse à l'attendu de cette institution : si cet exercice est posé en tout début de collège (11-12 ans), la réponse citée en italique de l'étudiant offre maintes qualités ; s'il est proposé au-delà de la quatrième (13-14 ans), l'attendu est un texte de type « petite démonstration » relevant de Géométrie II et la réponse citée n'est plus appropriée. C'est d'ailleurs le cas de la plupart des exercices « classiques » de géométrie : le paradigme n'est jamais donné, il est à inférer des contextes d'étude, de contrats (souvent implicites, liés à certains expressions, par exemple calculer) lié au paradigme licite.

Chemin faisant, le lecteur aura compris que les paradigmes précités ne peuvent fournir qu'un « horizon de travail » géométrique : en effet le résolveur expert du dernier exercice peut tout à fait utiliser le rapporteur pour obtenir une idée du résultat _ là il travaille en Géométrie I_ mais produire un texte hypothético-déductif _ là c'est la Géométrie II qui pilote sa réponse. L'expert sait toujours de quel paradigme relève chaque étape du travail géométrique (expérimentation et déduction à partir du dessin ET construction de l'argumentation) et adapte sa réponse au paradigme choisi comme horizon par l'institution (ce que n'a pas réussi l'étudiant cité en italique). Ainsi les deux paradigmes nourrissent le travail géométrique, l'un ne disparaît pas au profit de l'autre : mais dans le contrat du collège comme dans celui de la géométrie du CERPE, c'est la Géométrie II qui pilote le travail géométrique.
C'est pour décrire ce « jeu de paradigmes » que nous (Houdement & Kuzniak 2006, Houdement 2007a, Houdement 2007b) avons introduit un autre concept, celui d'Espace de Travail Géométrique (ETG) qui prend en charge la recomposition des paradigmes avec les objets en jeu et les instruments (matériels, virtuels ou intellectuels).

L'Espace de Travail Géométrique

La notion d'espace est à prendre naïvement au sens d'espace de pensée : s'y insèrent des objets, des artefacts et un horizon pour le travail géométrique, le paradigme qui pilote *in fine* le travail. Le travail consiste en l'établissement d'un rapport entre objets empiriques et théoriques, il ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets.

[6] La fonction « drag », en donnant la possibilité de « tirer » sur certains points, de « dé-former » des dessins, teste le caractère général voire générique des propriétés visibles (ou déclarées par le logiciel) de la trace graphique obtenue sur l'écran..



Les objets sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent du modèle théorique qui les définit. En Géométrie II, ce sont les points, droites et plans et autres sous parties de l’espace (les configurations) ; leurs définitions s’appuient sur notre perception de l’espace environnant et nous permettent d’utiliser notre intuition perceptive pour les étudier. En Géométrie I, les objets d’étude sont les dessins ou les maquettes sur lesquelles s’exerce notamment la visualisation. L’espace est ici un espace de réalité (Malafosse 2002).

Les artefacts sont une composante déterminante de l’espace de travail : dans la géométrie enseignée, ils constituent pour les élèves la face la plus visible et la plus prégnante. Cohabitent deux sortes d’artefacts : les instruments géométriques usuels (règle graduée ou non, équerre, compas) ou moins usuels (calque, ficelle, gabarits….), mais aussi des instruments intellectuels, notamment les règles théoriques qui régissent le fonctionnement du système hypothético-déductif. Les seconds concourent à la preuve en Géométrie II, ce sont en effet les seuls instruments licites de la validation en Géométrie II. Les premiers concourent à la preuve en Géométrie I (ils aident à clore le problème), nourrissent l’heuristique en Géométrie II. Les mêmes artefacts peuvent avoir des fonctions différentes sur les mêmes traces graphiques. L’instrumentalisation (usages de l’artefact, Rabardel 1995) des instruments de la géométrie diffère selon le paradigme visé.

Le référentiel théorique précise la nature des objets et des artefacts grâce à des définitions et des relations entre ces objets. La Géométrie II a ainsi émergé d’une organisation théorique des relations entre des modélisations de différents objets spatiaux. Dans son usage élémentaire, la Géométrie I est détachée de tout modèle théorique.

L’ETG[7] est un concept qui aide à comparer la nature du travail géométrique des différents niveaux d’action (programmes, professeurs, élèves) dans une institution par rapport à celui d’un expert.

4. Des situations de formation

Nous faisons l’hypothèse qu’une connaissance de cette interprétation de la géométrie élémentaire en différents paradigmes cohérents, simultanés et non hiérarchisés (Houdement & Kuzniak 2006, Houdement 2007b) permettra aux futurs enseignants de comprendre l’adaptation de leur réponse à l’attendu d’un exercice géométrique (notamment pour le concours), de mettre rétrospectivement de la cohérence sur les différentes étapes de leur

[7] Pour une analyse plus fine de ce concept, voir Kuzniak (à paraître)

curriculum géométrique, d'assumer les horizons géométriques des différents cycles d'enseignement, de choisir l'ETG adapté aux contraintes portant sur la qualité de la réponse.
Se pose donc la question de la formation d'adultes à cette connaissance. Donnons l'exemple de deux dispositifs de formation, l'un pour les enseignants de primaire, l'autre pour ceux du secondaire.

L'objectif simultané de la formation géométrique des enseignants **de primaire** est de revoir et stabiliser des connaissances géométriques et de diffuser la vision paradigmatique de la géométrie élémentaire.
Le premier dispositif consiste à proposer aux adultes des exercices d'apparence classiques, mais suffisamment « provocateurs » pour amener à une réflexion nouvelle ; ce que nous (Houdement & Kuzniak 2002) avons appelés « Petites provocations didactiques » (PPD). Les PPD peuvent s'appuyer sur un problème mathématique ou une question d'enseignement : ils doivent poser question aux adultes dans la mesure : par exemple leur apparence usuelle peut faire croire que la réponse sera facile à trouver ou qu'il y aura consensus des pairs, ce qui n'est pas le cas. Le lecteur verra sans doute une analogie avec les situations de débat sur le savoir mathématique initialisées par Legrand (Legrand 1991), ce savoir étant ici *les mathématiques pour l'enseignant.*

Voici l'exemple d'un tel exercice, proposé à des étudiants postulant au professorat des écoles, de première année d'IUFM. Cet exercice est extrait de

Construire un trapèze convexe dont les côtés mesurent 8 cm 7 cm 5 cm et 2 cm
Combien y a t-il de solutions ? Justifiez

Faisons en l'analyse mathématique, appuyée sur un dessin à main levée. L'exercice comprend deux volets : constructibilité : existe il un tel trapèze ? Et construction effective : comment obtenir une trace graphique ? Il est nécessaire de convoquer des théorèmes de constructibilité, notamment celui du triangle. Il est alors commode de faire apparaître des triangles, technique de travail sur le dessin pointée par Duval (cf. approche opératoire de Duval 1994). Au moins deux approches opératoires sont possibles : un triangle sous-figure ou un triangle sur-figure du trapèze à obtenir. Le lecteur trouvera en annexe 3 la résolution complète.
Il y a **3 solutions** à une isométrie près (positive ou négative) qui correspondent aux couples de mesures des longueurs de côtés parallèles suivants (8,2) ; (7,2) et (5,2).

Reprenons l'étude en termes d'ETG. Le problème posé de produire des trapèzes sous contraintes peut être regardé, en l'absence de contexte, comme un problème de Géométrie I ou de Géométrie II. Dans la culture des PE, il se pose souvent en Géométrie I, il s'agit d'exhiber l'objet répondant aux contraintes, les artefacts sont les instruments géométriques usuels, le contrat du concours privilégiant in fine règle graduée et compas. Or rester en Géométrie I, comme le font les étudiants au début, souvent, ne suffit pas à le résoudre ou du moins pas de façon reproductible (en particulier quand les instruments de tracé sont imposés). Devant les limites des réponses directement instrumentales, l'utilisation d'un dessin à main levée permet au résolveur de mobiliser son regard, il peut questionner la constructibilité, donc évoquer des triangles, des quadrilatères particuliers. L'approche opératoire qui consiste à rechercher dans le dessin des figures constructibles relève de Géométrie I ; encore faut il que les longueurs des triangles et quadrilatères puissent se déduire, en Géométrie II, des longueurs données. Ce raisonnement se fait donc appuyé sur la trace graphique (donc Géométrie I), mais il est contrôlé en permanence par la Géométrie II, qui est le paradigme choisi comme horizon. L'objet dessin aide à produire le cheminement argumentatif, mais le

Catherine Houdement IUFM de Haute Normandie, Université de Rouen, France
catherine.houdement@univ-rouen.fr

texte de solution reposera sur les lois hypothético-déductives. Le dessin est objet d'étude pour le travail heuristique (Géométrie I), mais l'objet considéré dans la démonstration (Géométrie II), est la figure (toute nouvelle longueur introduite est déductible de celles données par le texte)… Le dessin « clignote » différemment selon le paradigme considéré dans l'étape de résolution.
L'Espace de Travail est un concept qui cherche à rendre compte de cette recomposition des divers éléments en jeu, plutôt des différents statuts des éléments en jeu tout au long du travail.
Les jeux de paradigmes nécessaires pour le travail géométrique permettent aussi peut-être d'expliquer la non disponibilité a priori du changement de cadre (géométrique versus numérique) qui fait passer de la constructibilité (pratique) à l'inégalité triangulaire.

Voici donc quelques éléments stables[8] du déroulement du travail des étudiants professeurs des écoles en première année (PE1)
Les étudiants visent délibérément la construction effective aux instruments. Le choix des mesures des longueurs amène un certain nombre de PE1 à ne pas réussir à obtenir un seul trapèze, quels que soient les instruments utilisés. Quelques-uns concluent avec certitude que certains trapèzes n'existent pas. Par exemple, ils tracent un premier segment, de longueur 8 cm, puis deux cercles dont les centres sont les extrémités de ce segment et les rayons les deux autres longueurs données (par exemple 5 cm et 2 cm) ; ils utilisent ensuite un gabarit du dernier segment (ici 7 cm) qu'ils font glisser parallèlement au premier segment et constatent qu'il ne « touche » jamais exactement les deux cercles. D'autres découvrent ainsi « par hasard » comme ils le disent eux mêmes, un trapèze solution.
Si nécessaire, le professeur relance alors le questionnement : pourquoi tel trapèze est possible et tel autre ne l'est pas ? Pourrait-on prévoir la faisabilité du trapèze pressenti ?

Le regard sur l'objet à construire change alors : l'objet doit être anticipé, il devient idéel.
La stratégie précédente, constructive, est calculable : il s'agit de déterminer quelle est la longueur maximale du dernier segment (côté parallèle) fermant le trapèze. Mais l'entrée dans ce calcul reste complexe. Nous préférons entraîner les étudiants vers une stratégie analytique.
Il est important alors de se figurer l'objet fini[9] : le « dessin à main levée » est introduit comme outil d'analyse, il oriente le questionnement sur les longueurs et l'inférence de connaissances de constructibilité. Quelles figures sait-on construire a priori ? Les PE1 pensent spontanément à un rectangle qu'ils tentent de plaquer sur le dessin à main levée, mais cette approche n'aboutit pas car les nouvelles longueurs ne sont pas déductibles des longueurs connues. Se construit alors la nécessité de faire apparaître des figures constructibles avec des longueurs déductibles des longueurs données.
Les deux procédures signalées en annexe apparaissent avec d'abord une prédominance d'un triangle comme sur-figure et une certaine difficulté à utiliser à bon escient le théorème de Thalès, puis une sorte de repli vers la procédure de découpage en parallélogramme et triangle. La recherche de la constructibilité du trapèze se poursuit, soit dans un cadre géométrique, en testant effectivement la construction des triangles obtenus, soit dans un cadre numérique grâce à l'inégalité triangulaire.

L'analyse des différentes positions nécessaires ou occupées au cours de la résolution de cet exercice permet au professeur de donner sens aux paradigmes géométriques Géométrie I et Géométrie II et de préciser leurs caractéristiques. Si l'exercice semble relever a priori de la Géométrie I, il est nécessaire de changer de paradigme pour avancer : la condition d'existence

[8] Cet exercice a été expérimenté plusieurs années dans plusieurs groupes de PE1.
[9] L'entrée dans une démarche analyse-synthèse est en général déclenchée par le formateur.

du triangle en fonction de ses longueurs est une connaissance de Géométrie II qui peut s'opérationnaliser en Géométrie I. Le travail géométrique à fournir pour résoudre cet exercice nécessite ainsi une synthèse entre des connaissances de Géométrie I (notamment l'approche opératoire du dessin) et des connaissances de Géométrie II. Il peut aussi donner corps à une connaissance de Géométrie II, l'inégalité triangulaire (au sens large) et son versant Géométrie I, la forme plus ou moins aplatie du triangle.
Sont donc en jeu dans cet exercice Géométrie I et Géométrie II, avec des spécificités qu'il est possible de pointer. Ici la Géométrie II joue le rôle de technologie (au sens de Chevallard) pour la Géométrie I, ce qui est une des raisons de son enseignement en formation. Ce n'est pas toujours le cas, notamment dans certaines pratiques professionnelles (métiers d'art ou du bâtiment).
C'est aussi l'occasion de définir le contrat implicite du concours : le candidat PE au concours est évalué en Géométrie II (validée par la référence à des propriétés arrêtées et textuelles dans un cadre axiomatique) bien que son rôle de professeur des écoles consiste à faire travailler les élèves essentiellement en Géométrie I (validée par le réel contingent et les instruments).
Il est cependant important de préciser, en formation, que les deux paradigmes participent au travail géométrique dans la géométrie enseignée (exercices de collège et au-delà) : l'expert sait à tout moment quel horizon il assigne à son travail, à l'étudiant PE de se forger une même attitude.

La provocation faite aux étudiants à l'occasion de cet exercice résulte dans l'apparence impossibilité à construire alors qu'une intuition contraire les pousse à croire à l'existence de tels trapèzes. Les étudiants sont alors amenés à convoquer tous les savoir-faire instrumentaux classiques, à développer d'autres pratiques, comme peuvent le faire des élèves de primaire (faire glisser une règle), puis à s'interroger sur le rôle des instruments (instruments matériels et intellectuels).

Le second dispositif, que nous allons décrire brièvement, concerne les professeurs du **secondaire.** Il a été mis au point par notre collègue J.C.Rauscher (Kuzniak & Rauscher 2004) de l'IUFM de Strasbourg. Il consiste dans une première phase à proposer un exercice à ETG ambigu[10], extrait d'un manuel scolaire, à une population d'élèves de collège, recueillir leurs réponses écrites, trier parmi les réponses quatre réponses à ETG différents ; dans une seconde phase de demander à des adultes futurs enseignants ou enseignants en formation continue, par écrit, de faire cet exercice, de soulever les difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves, puis d'évaluer les quatre réponses d'élèves, de choisir celle la plus proche de leur propre réponse et de soulever les questions que leur suggère cette demande. Ce dispositif permet d'une part de pointer les diverses facettes de la géométrie, stigmatisées en paradigmes Géométrie I / Géométrie II et sollicitées dans tout travail géométrique, de révéler les ETG personnels et de les positionner par rapport aux ETG institutionnels.

5. Conclusion

Les enseignants chercheurs en IUFM (France) ont une double fonction : d'une part didacticiens des mathématiques, ils contribuent à l'enrichissement des savoirs savants de la didactique dont les observables sont tous les faits d'enseignement. D'autre part formateurs d'enseignants, ils construisent des dispositifs transpositifs de ces savoirs savants, sur lesquels

[10] On parlera d'un exercice à ETG ambigu quand l'énoncé de l'exercice ne permet pas de décider quel est l'horizon paradigmatique.

ils peuvent aussi mener des recherches. Cet article montre différents aspects de cette articulation, concernant la géométrie élémentaire.

Nos recherches sur la formation des professeurs des écoles nous ont conduit à construire un cadre d'essence épistémologique pour analyser les ruptures entre géométrie du primaire et géométrie du secondaire. Ce cadre est une approche paradigmatique de la géométrie élémentaire enseignée, essentiellement en deux paradigmes, non hiérarchisés, tous deux cohérents et efficaces. Il est apparu que les paradigmes servaient aussi à décrire l'activité cognitive du sujet, fixant le référent théorique de son travail géométrique : l'espace de travail géométrique décrit cette recomposition ternaire (objets, instruments, référent théorique).
C'est une facette du travail de didacticien : prendre une certaine distance face à l'orthodoxie savante pour construire une nouvelle épistémologie plus apte à rendre cohérent l'enseignement. Ces savoirs, nouveaux par rapport à ceux du mathématicien, et pourtant mathématiques, font partie des *savoirs du professeur*.

En tant que formateur d'enseignants, nous avons construit des situations de formations dispensant ces nouveaux savoirs. Nous avons stabilisé un type d'approche que nous avons décrit sous le terme de PPD (Petite Provocation Didactique) ; situations relativement proches de la pratique ordinaire de l'enseignant suscitant un débat sur des *mathématiques pour l'enseignant*, qu'elles soient savoirs académiques revisités ou savoirs mathématiques nouveaux débusqués par la didactique. C'est la deuxième facette de notre travail d'enseignant chercheur.

Références bibliographiques

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19/1**. 41-76

BUNGE M. (1983) *Epistémologie*. Paris : Éditions Maloine. Collection Recherches Interdisciplinaires

CASTELA C., HOUDEMENT C., (2006) Se dépayser pour interroger les choix de l'enseignement français sur la géométrie. *Bulletin Vert* **465**. APMEP 577-582.

CIRADE G. (2007), Les professeurs en formation initiale face au casse-tête des nombres, contribution au II[nd] colloque sur la TAD, Uzès.

CIRADE G. (dans ce cédérom) Quels besoins mathématiques pour la formation des professeurs ? Le cas des systèmes de nombres. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone* 2009. Dakar.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM* **17**. 121-138.

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Éditions du Griffon.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* **40**. 283-312.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2002) Pretty (good) didactical provocation as a tool for teacher's training in geometry. In *Proceedings of the* 2[nd] ***C**onference of **E**uropean **R**esearch in **M**athematics **E**ducation.* Université Charles de Prague. 292-303

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives***11**.175-195.

HOUDEMENT C. (2007a) Rationalité en géométrie : une affaire de paradigme. In BEDNARZ, N., MARY, C. (dir.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006 (cédérom).Sherbrooke: Éditions du CRP 2007

HOUDEMENT C. (2007b) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères* **67**. 69-84

HOUDEMENT C., KUZNIAK A., RAUSCHER J.C. (2008 à paraître) L'Espace de Travail Géométrique des professeurs. *Actes de la 14ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (Ste Livrade août 2007).

KUHN T.S. (1962, 2nd édition 1970) *The Structure of Scientific Revolutions* Traduction *La structure des révolutions scientifiques* 1983. Paris : Flammarion

KUZNIAK A., RAUSCHER J.C. (2004) Formation des PE1 et anamnèse géométrique *Actes du XXXème colloque sur la formation des maîtres.* COPIRELEM Avignon. 231-248

KUZNIAK A., RAUSCHER J.C. (2006) Article. In BEDNARZ, N., MARY, C. (dir.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006 (cédérom).Sherbrooke: Éditions du CRP 2007

KUZNIAK A (2008 à paraître) Sur la nature du travail géométrique dans le cadre de la scolarité obligatoire. Actes de la 14ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques (Ste Livrade août 2007).

MALAFOSSE D. (2002) Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique, Recherches en Didactique des Mathématiques, **22.1.** 31-76.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (1997) Evaluation à l'entrée en sixième. Repères nationaux – septembre 1997. Direction de l'évaluation et de la prospective

PERRIN D. (2005) Mathématiques d'école. Nombres, mesures, géométrie. Paris : Cassini.

RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies. Paris : Armand Colin

ROGALSKI M. (2001) Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie. Ellipses.

Catherine HOUDEMENT IUFM de Haute Normandie, Université de Rouen, France
catherine.houdement@univ-rouen.fr