L'OBJET EQUATIONS DIFFERENTIELLES EN MATHEMATIQUES ET EN PHYSIQUE : DE SA NAISSANCE A NOS JOURS

Ayse SAGLAM Laboratoire LIDSET Chimie Recherche ; Université Joseph-Fourier Ayse.Saglam@ujf-grenoble.fr	Hamid CHACHOUA Equipe Did@TIC Laboratoire LEIBNIZ - Institut IMAG Hamid.Chaachoua@imag.fr	Daniel LACROIX I.U.F.M. de Grenoble, Laboratoire LIDSET daniel.lacroix@grenoble.iufm.fr

Résumé : Cette étude a pour but à la fois de s'interroger sur les conditions provoquant la naissance de la théorie des équations différentielles, de se questionner sur les conditions de concordance entre son enseignement dans les deux disciplines : mathématiques et physique, et de comparer ces conditions et les situations didactiques dans lesquelles se déroule l'apprentissage. Notre analyse montre qu'au XVII$^{\text{ème}}$ c'est l'outil équation différentielle, qui a retenu l'attention des mathématiciens et des physiciens. En effet ils ont cherché avant tout à modéliser diverses situations de mécanique et de géométrie. L'analyse de l'enseignement actuel des mathématiques nous a révélé une présentation exclusivement théorique de l'objet équation différentielle du premier et du second ordre. Bien qu'à première vue, l'approche actuelle de l'enseignement de la physique ne diffère pas trop de l'approche historique, nous estimons qu'il y a une différence notable du point de vue de la modélisation réalisée par les deux approches : au XVII$^{\text{ème}}$ siècle les scientifiques utilisaient conjointement deux méthodes, le calcul différentiel et la géométrie, pour obtenir la courbe, solution du problème posé. Néanmoins dans l'enseignement actuel la modélisation est faite quasi-exclusivement à partir de loi paramétrée. En nous appuyant sur les deux analyses que nous avons menées et les travaux réalisés sur le sujet, nous avons essayé de mettre en évidence l'état actuel de l'enseignement des équations différentielles.

I. Introduction :

Les équations différentielles font partie des objets mathématiques le plus souvent utilisés pour modéliser les situations physiques. La question qui se pose ici porte sur le statut de ce concept dans les deux disciplines, mathématiques et physique, lors de son invention d'une part et de son fonctionnement dans l'enseignement actuel d'autre part. Nous présenterons dans le paragraphe II un aperçu historique sur la naissance de la théorie des équations différentielles. Ensuite, dans le paragraphe III nous analyserons l'enseignement des équations différentielles dans les deux institutions, mathématiques et physique à deux niveaux, en Terminale S et en première année de DEUG SMa. En effet, nous estimons que ces deux niveaux peuvent être considérés comme un ensemble pour étudier l'enseignement actuel des équations différentielles. Toutefois nous considérons qu'il n'y a pas de véritable rupture mais des changements dans l'enseignement du concept entre les deux niveaux : en DEUG contrairement au lycée on présente des algorithmes plus généraux pour résoudre algébriquement les deux types d'équations différentielles, du premier et du second ordre.

II. Analyse historique de la notion d'équations différentielles :

En 1638, il y a donc presque quatre siècles, Debeaune et Galilée proposent les premiers problèmes dont la solution sera effectuée à l'aide d'équations différentielles (Wanner, 1988). Par l'analyse de divers problèmes de mécanique et de géométrie, résolus au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, nous avons essayé d'identifier les caractéristiques des problèmes posés et des méthodes utilisées par les scientifiques pour les résoudre.

Il nous semble intéressant de donner tout d'abord une définition du calcul différentiel : « *le calcul différentiel est une relation entre les augmentations infinitésimales de deux (ou plus) quantités variables* » (Stewart, 1989). Ce calcul permet de mettre sous la forme d'une équation différentielle les problèmes posés, voici deux exemples représentatifs cités par Blay [1992]: « *Trouver une courbe y(x) sur laquelle un corps soumis à la pesanteur glisse avec une vitesse verticale constante* »[1], « *Trouver une courbe y(x) pour laquelle en chaque point P la section coupée par le normale PN et la tangente PT sur l'axe x soit toujours égale à une constante a* »[2]. Il est intéressant de remarquer que ces deux problèmes sont construits à l'aide d'une contrainte commune : une propriété locale, « *la sous-tangent d'une courbe est constante* » ou « *la vitesse verticale du système est constante* ». Cela permet de passer, à l'aide du calcul différentiel, à une figure générale, une courbe ou une famille de courbes. On passe ainsi d'une propriété locale de la courbe à sa structure globale, d'où la productivité de ce langage. La courbe dans son ensemble possède en tous ses points les propriétés locales et de ce fait l'équation différentielle assure la coordination entre la propriété locale et la propriété générale et elle les met en cohérence. Ce processus de modélisation se fait par étapes. Une fois que la courbe cherchée est représentée à l'aide d'une équation différentielle, cette dernière est résolue algébriquement ce qui permet de connaître la famille des solutions.

Pour mieux cerner le problème, il nous paraît nécessaire de rappeler l'une des méthodes appliquées, la résolution proposée par Jacques Bernoulli afin de résoudre le premier problème cité ci-dessus. Il a suivi une méthode « analytique » composée de deux parties bien distinctes (Blay,1992): une première a pour objectif de ramener le problème physique, concernant le mouvement du mobile, à une pure question de géométrie et une deuxième pour comprendre la résolution de cette pure question géométrique à l'aide des concepts du calcul différentiel. Une fois que l'équation différentielle du premier ordre représentant la courbe est obtenue, elle est résolue à l'aide du calcul intégral.

Cependant, cette étude met en évidence l'importance du rôle d'outil que les équations différentielles ont joué lors de leur découverte. A l'époque très peu de scientifiques les ont

[1] Problème proposé par Leibniz en 1687
[2] Problème proposé par Debeaune en 1638

étudiées comme un objet mathématique, Newton est d'ailleurs le premier à proposer directement une équation différentielle, dans son traité sur le calcul différentiel, et à la résoudre par intégration et développement en séries.

III. Analyse des objets d'enseignement actuel :

i. Références théoriques utilisées pour cette recherche :

A la suite de l'analyse épistémologique, nous avons tenté de mettre en évidence les caractéristiques de l'enseignement actuel de ce concept en adoptant plusieurs points de vue :

- La structure générale du fonctionnement dans les deux institutions (physique et mathématiques): les types de tâches, les techniques proposées par chacune de deux institutions et des liens entre celles-ci.
- Les différents registres sémiotiques utilisés conjointement dans les deux disciplines lors de l'étude, de l'utilisation et de la résolution des équations différentielles
- La dialectique outil-objet.

ii. Méthodologie générale de la recherche :

Prenant en compte comme cadre théorique la théorie anthropologique développée par Chevallard (1999), nous avons fait le choix de caractériser les rapports institutionnels aux équations différentielles des étudiants dans chacune des deux institutions.

Sans entrer dans les détails, cette étude débute par une analyse d'exercices et de problèmes issus de manuels de Terminale S, fréquemment utilisés à l'échelle nationale. Nous avons pour but, d'une part, de cerner la première rencontre avec le concept d'équations différentielles et d'autre part de repérer les cohérences et les éventuels ruptures entre l'enseignement de deux disciplines. L'étude concerne également l'enseignement des mathématiques et d'électrocinétique en DEUG première année. En effet, à ce niveau, l'électrocinétique est le seul domaine de la physique où sont enseignées les équations différentielles. Notre analyse a été menée à travers l'analyse des polycopiés du cours, d'exercices issus de feuilles de travaux dirigés et de l'observation des classes - cours magistral (dix séances de mathématiques, cinq séances d'électrocinétique) et séances de TD pour trois groupes en mathématiques (trente séances) et quatre groupes en électrocinétique (vingt séances)-.

L'outil méthodologique utilisé pour dégager des résultats consiste en une grille d'analyse construite à partir de cadre théorique que nous avons présenté ci-dessus.

iii. Résultats de l'analyse des manuels de Terminale S :

Nous avons étudié trois manuels de mathématiques[1] édités avant le dernier changement de programme en 2001. Ceux-ci ont la même stratégie de présentation : une introduction très rapide en faisant appel à certains phénomènes de diverses disciplines et puis une phrase unique et définitive présentant sommairement une équation différentielle comme «*une relation entre une fonction et certaines de ses dérivées successives et qui est réalisée sur un intervalle* » (Terracher, 1998). L'étude essentielle est construite autour des méthodes algébriques utilisées pour résoudre certains types d'équations différentielles linéaires du premier et du second ordre et de la représentation graphique des solutions obtenues.

Quant aux manuels de physique[2], eux aussi, présentent de manière pratiquement identique la modélisation par les équations différentielles : les techniques sont identiques pour établir l'équation des mêmes types de situations et pour présenter les solutions de l'équation différentielle. Les choix semblent fortement marqués par la volonté d'intégrer cet objet mathématique aux sciences physiques. (La comparaison entre la situation de découverte par les lycéens et par les scientifiques présente des similitudes que l'on développera ultérieurement).

iv. Résultats provisoires de l'étude réalisée au niveau du DEUG première année :

Nous présenterons les premiers résultats de notre étude :

a) Niveau de décomposition des tâches :

En mathématiques; les tâches observées dans les travaux dirigées sont bien précises et internes aux mathématiques, et elles portent plutôt sur l'application d'une technique et/ou d'un théorème.

L'étude est essentiellement centrée sur l'utilisation d'algorithmes relatifs à la résolution algébrique. Il s'agit souvent de tâches telles que : « *intégrer une équation différentielle sur un intervalle I de $\Re$* ». Cette tâche est en fait réalisée par l'application d'une technique qui peut être scindée en divers sous-types de tâches : « résoudre *l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle sur I* », « *trouver une solution particulière* » et « *additionner ces deux solutions* ». Cette technique s'appuie sur les éléments de la technologie évoqués pendant le cours.

Nous avons aussi constaté d'autres types de tâches proposées aux étudiants :

Transcription graphique : il s'agit de tâches telles que « *tracer le graphique de la fonction solution trouvée* » ou « *trouver le champ des vecteurs tangents associé à l'équation différentielle* » .

[1] Breal, Nathan, Terracher

Bien souvent un changement de registres sémiotiques constitue l'une des tâches proposées dans l'exercice, voici un exemple : *« chacune de deux figures suivantes représente le champ des vecteurs tangents d'une équation différentielle du premier ordre du type y'(x)=f(x,y(x)) . A chaque équation rendez sa figure. »* Pour accomplir ce type de tâche l'enseignement propose une seule technique nécessitant de regarder le signe de la première dérivée de la fonction et savoir ce que signifie ce signe.

<u>Proposition d'application des équations différentielles aux autres domaines</u>, les tâches proposées se rapportent à l'étude d'un problème qui fait appel à une équation différentielle du premier ordre fournie au début de l'exercice. Ceci dit, les étudiants connaissent, dès le début, le type d'équation différentielle à laquelle ils feront face. Ainsi, cette tâche se réduit à remplacer les valeurs du problème dans l'équation différentielle.

Contrairement à ce qui s'est passé dans l'histoire, on abandonne les tâches de modélisation et on se focalise sur des algorithmes de résolution souvent algébriques.

En électrocinétique ; on étudie habituellement quelques types de circuits, RL, RC, RLC. Quatre tâches sont toujours présentes : « *établir l'équation différentielle qui représente l'évolution d'un circuit* », « *trouver la solution générale de cette équation différentielle* », « *étudier les fonctions solutions de l'équation*» et « *s'intéresser à l'évolution d'un circuit particulier en tenant compte des conditions initiales* ». Il est patent que la manière dont les problèmes sont proposés ressemble à celle du XVII^{ème} siècle. Ainsi, l'étude débute toujours par la référence à un système réel et la prise en compte de contraintes locales permanentes tout au long de l'évolution du système, une loi paramétrée traduit ces contraintes : par exemple la loi d'Ohm, relation entre la tension aux bornes de la résistance et l'intensité qui la traverse. Néanmoins, pour ce qui est des démarches utilisées en vue de modéliser les systèmes étudiés il existe une différence importante avec le XVII^{ème} siècle : la modélisation réalisée par l'enseignement actuel d'électrocinétique porte toujours sur une loi théorique, à savoir exclusivement la loi des mailles qui permet de passer à une équation différentielle reliant la charge et ses dérivées, alors que les scientifiques du XVII^{ème} siècle faisaient appel à la géométrie et au calcul différentiel pour modéliser les problèmes posés. Notre hypothèse est que la réduction de la démarche à une seule loi amène les étudiants à développer des automatismes.

[2] Didier, Nathan, Hachette

Il est à noter que la deuxième tâche et les techniques appliquées pour l'accomplir, avec les notations dépendant de la discipline, témoignent d'un contrat fort liant les deux institutions. Ce contrat apparaît également lors de la représentation graphique de la solution obtenue.

Comme au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, pour les enseignants de physique, les équations différentielles assurent la cohérence interne du cadre théorique de l'électrocinétique ; il n'en est probablement pas de même pour les étudiants.

b) Statut outil / objet :

Au sein des exercices mathématiques, l'étude de l'objet « équation différentielle » est menée en général à travers le calcul des primitives et l'étude des fonctions usuelles afin de réaliser la résolution algébrique des équations envisagées. Cet objet joue occasionnellement le rôle d'outil dans le cours des mathématiques et ce uniquement pour illustrer la nouvelle notion apprise.

Le statut « outil » de la notion saute aux yeux dans le domaine de l'électrocinétique par son utilisation et son opérationnalité. L'intégration d'une relation locale et la mise en cohérence interne de diverses propriétés du système justifie l'utilisation des équations différentielles dans ce domaine et donnent également du sens à ce concept.

c) Formalisation et notation :

Le choix du formalisme est fonction des disciplines, le même type d'équation différentielle et ses solutions sont exprimés de manière différente :

$y'(x)=-2y$, $S_0=\{x \in I \to C.e^{-2x} \ / C \in \Re\}$ (1)

$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q(t)=0$, $q=q_0.e^{-\frac{1}{RC}t}$ (2)

L'écriture (1) est générique en mathématiques en effet x et y représentent différents paramètres et quantités. Leur utilisation fréquente dans le cours de mathématiques peut être source de difficulté chez les étudiants lorsqu'ils doivent donner du sens aux différents signes présents dans l'équation différentielle et dans sa solution en les associant aux caractéristiques du système. L'écriture (2) se présente plutôt en physique où on cherche explicitement à faire apparaître la nature de la quantité qui évolue et la nature de la variable.

IV. En guise de conclusion :

Les résultats démontrent, en Terminale et en première année de DEUG, une stabilité relative des tâches et techniques proposées. Cette stabilité est évidente dans les problèmes traités, le contenu enseigné, les modes de résolution algébrique des équations différentielles et les méthodes de modélisation des situations en électrocinétique. Ainsi, le savoir, manipulé en tant qu'objet par le biais de plusieurs exemples, n'est pas tout à fait opérationnel dans des situations physiques où cet objet mathématique est utilisé de manière procédurale sans la technologie justifiant son utilisation à bon escient en physique.

L'analyse montre une décroissance de référence au réel en comparaison à l'époque de la naissance des équations différentielles. En mathématiques et de ce fait en physique, on assiste à la même évolution de la Terminale à la première année d'université.

Dans nos travaux ultérieurs nous voulons déterminer les savoirs des étudiants concernant les caractéristiques des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre en tant qu'objets et les aptitudes des étudiants à les utiliser en tant qu'outils pour modéliser une situation expérimentale différente que celle réalisée pendant les cours.

BIBLIOGRAPHIE :

Blay M.(1992), *La naissance de la mécanique analytique*, Presses Universitaires de France.

Chevallard Y.(1989), Le concept de rapport au savoir : Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD2-IMAG, n°108, IMAG Grenoble.

Chevallard Y.(1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherche en didactiques des mathématiques*, Vol.19, n°2, 221-266.

Douady R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol.7, n°2, 5-31.

Duval R. (1993), Registres et représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Anales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 37-65.

Harier E., Norsett S. P., Wanner G., (1987). *Solving Ordinary differential equations I. Nonstiff problems.* Spinger Verlag.

Newton I. (1740), *La méthode des fluxions et des suites infinies*, traduit en français par Buffon, Paris.

Stewart I., 1989, *Les mathématiques,* Paris : Pour la science : diff. Belin.

Wanner G., (1988), Les équations différentielles ont 350 ans, *L'enseignement Mathématique*, t.34, 365-385.