MICHELE ARTAUD
Maître de conférences à l'IUFM d'Aix-Marseille
m.artaud@aix-mrs.iufm.fr
adresse personnelle : 5 rue Bel Air, 13006 Marseille

MATHEMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES

SOUS-THEME : SAVOIRS, TECHNIQUES ET PRAXELOGIES

Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes

RESUME – Le discours noosphérien autour des mathématiques et de leur lien avec les autres disciplines prend le plus souvent appui sur une distinction entre le savoir mathématique et ses applications, soit des techniques mathématiques mises en œuvres dans différents domaines de réalité. Par contraste, nous montrerons en quoi il est nécessaire de considérer solidairement techniques et savoirs au moyen de la notion de praxéologie, et plus spécialement de praxéologies mathématiques mixtes dont il est crucial dès lors d'examiner l'écologie dans les systèmes d'enseignement.

MATHEMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES

SOUS-THEME : SAVOIRS, TECHNIQUES ET PRAXELOGIES

Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes

Le discours noosphérien autour des mathématiques et de leur lien avec les autres disciplines prend le plus souvent appui sur une distinction entre le savoir mathématique et ses applications, soit des techniques mathématiques mises en œuvres dans différents domaines de réalité. Ainsi, le programme de mathématiques du collège français, sous le titre « finalités et objectifs », affirme que « [l]es méthodes mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants. Elles ont cependant leur autonomie propre qui leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre, la technologie, la géographie, etc. L'enseignement tend à développer la prise de conscience de cette autonomie par les élèves et à montrer que l'éventail des utilisations est très largement ouvert ». Par contraste, nous montrerons en quoi il est nécessaire de considérer solidairement techniques et savoirs au moyen de la notion de praxéologie, et plus spécialement de praxéologies mathématiques mixtes dont il est crucial dès lors d'examiner l'écologie dans les systèmes d'enseignement.

1. La notion de savoir fondamental

Etant donné un savoir *S*, il existe ordinairement des savoirs *S'*, *S"*, etc., utilisés *de fait* pour produire ce savoir et/ou pour le mettre en œuvre (comme système de production de connaissances). Ainsi, « la biologie » pourra-t-elle entrer dans un tel rapport avec, par exemple, « la biochimie », « la biophysique », voire... « la biomathématique ». Nous dirons alors que, lorsqu'un savoir *S* entretient avec des savoirs *S'*, *S"*, etc., des relations du style évoqué plus haut, les savoirs *S'*, *S"*, etc. sont des *savoirs fondamentaux pour S*[1].

Notons ici que le caractère fondamental est un caractère fonctionnel, et non structurel, et qu'un savoir n'est pas *intrinsèquement* fondamental : il ne peut l'être que *par rapport* à un autre savoir. Enfin, et contrairement à ce que certaines connotations pourraient porter à penser, un savoir *S'* fondamental pour un savoir *S* ne saurait *à lui seul* manifester son efficacité dans la « vie » de *S* : il apparaît à cet égard comme un *outil* (de production ou d'utilisation de *S*), dont seul *S fournit le*

« mode d'emploi » pertinent – même si, comme il en va avec tout outil, *S' impose des contraintes spécifiques* à son utilisateur.

Le fait que les mathématiques sont un savoir fondamental, notamment pour l'économie et pour la physique, se concrétise dans l'existence de praxéologies qui mêlent mathématiques et une autre discipline d'une manière que nous examinerons ci-dessous à partir de deux exemples issus de l'économie et de la menuiserie du bâtiment.

2. Les mathématiques et l'économie

Nous considérerons la question « Comment et combien un producteur doit-il produire ? »[2], ce qui peut amener à examiner la question « Quelle quantité de bien doit produire un producteur dont la fonction de production est $q = f(x_1, x_2)$, connaissant le prix p_1 et p_2 des deux facteurs x_1 et x_2 et le budget B du producteur ? » en considérant une production qui ne dépend que de deux facteurs.

Le type de tâches à accomplir est ainsi « déterminer la quantité de bien q^* que doit produire un producteur dont la fonction de production est $q = f(x_1, x_2)$, connaissant le prix p_1 et p_2 des deux facteurs x_1 et x_2 et le budget B du producteur », et le modèle permet d'élaborer une technique de détermination de q^* qui peut se décrire ainsi :

1. Déterminer x_1^* et x_2^* tels que $q^* = f(x_1^*, x_2^*)$;

1.1. écrire que, au point (x_1^*, x_2^*), le rapport des productivités marginales est égal au rapport p_1/p_2, ce qui permet d'obtenir une relation entre x_1^* et x_2^*, R_1 ;

1.2. résoudre le système formé de R_1 et la contrainte de budget R_2 : $B = x_1^*p_1 + x_2^*p_2$;[3]

2. Calculer q^*.

La justification essentielle de cette technique repose sur la convexité des isoquantes (soit des courbes $f(x_1, x_2)$ = cte) et le théorème : la quantité à produire est obtenue par une combinaison de facteurs telle que le rapport des productivités marginales soit égal au rapport des prix des facteurs. Ce théorème peut être produit de la façon suivante :

– on écrit $f(x_1, x_2)$ en fonction de x_1 en tenant compte de la contrainte de budget : $B = x_1p_1 + x_2p_2$;

– on calcule la dérivée de cette fonction par rapport à x_1 ;

---

[1] Sur la notion de savoir fondamental voir Artaud 1993.

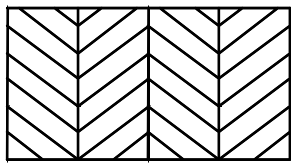
[2] Pour une étude développée de cette question, voir Artaud 2001.

[3]On notera ici l'intérêt de la fonction de Cobb-Douglas, $f(x_1, x_2) = kx_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ avec $\alpha + \beta = 1$, qui donne une relation R_1 linéaire.

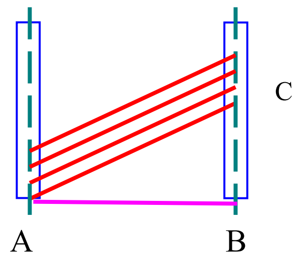
– on écrit qu'il faut que cette dérivée soit nulle pour avoir un maximum, ce qui permet d'obtenir la relation cherchée : $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

La réponse apportée par la science économique à la question considérée se présente ainsi comme une *organisation mathématico-économique*, dans laquelle mathématiques et économie sont étroitement mêlées, et où les mathématiques apparaissent essentielles dans la strate de justification – c'est par exemple ici le théorème « une fonction numérique f continue et deux fois dérivable sur un intervalle I admet un maximum en x_0 appartenant à I si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ » qui est l'ingrédient principal de la production de la condition de convexité des isoquantes et du théorème des productivités marginales –, sans cependant que l'on puisse les isoler des objets économiques – l'hypothèse de divisibilité des facteurs, ou celle d'utilisation optimale des facteurs, la notion de productivité marginale etc. sont également des éléments justificatifs primordiaux.

3. Les mathématiques et la menuiserie du bâtiment



En menuiserie du bâtiment, on pose les lames d'un parquet à point de Hongrie sur des lambourdes[4] avec un angle de 45° ou de 60° (voir figures ci-contre). Il s'agit connaissant la longueur des lames de déterminer l'écartement avec lequel on va poser les lambourdes. Cela nécessite ainsi de calculer la longueur du segment [AC] connaissant AB et l'angle en A : comme $\cos \angle A = AC/AB$, il vient $AC = AB\cos 45 = AB\sqrt{2}/2$ ou $AC = AB \cos 60 = AB/2$. Pour réaliser le schéma, ou la pose du parquet, on a donc *besoin* d'un élément de trigonométrie dans le triangle rectangle ajouté à du calcul numérique.



Un ouvrage de menuiserie du bâtiment traitant de la question évoquée précédemment ne mentionne pas le cosinus de l'angle et écrit ainsi[5] :

« Pour des lames disposées à 45° et de longueur connue, on trouve l'écartement des lambourdes correspondant et réciproquement en appliquant les formules suivantes (fig 13) :

L = longueur des lames ; E = écartement d'axe et axe.

[4] Une lambourde est une pièce de bois supportant les lames d'un parquet.

[5] C. Riollot. *Menuiserie du bâtiment. Technologie professionnelle pratique.* Paris : Dunod, 1980.

1. connaissant L : $E = L/\sqrt{2} = L/1{,}414$

2. connaissant E : $L = 1{,}414 \times E$. »

Les mathématiques, comme c'est très souvent le cas, sont *implicitement* présentes dans la pratique[6], dont on ne voit plus dès lors qu'elle est produite avec des mathématiques, et la mise en relation entre ces pratiques d'apparence non mathématique et les mathématiques qui ont permis de les produire a peu de chances de se réaliser.

On notera en outre que le cas de l'angle de 60° n'est pas évoqué, et que le lecteur de l'ouvrage, s'il ne peut restituer l'environnement technologique pertinent, devra alors fabriquer expérimentalement une technique, ce qui peut conduire à l'évitement de la pose d'un parquet « à 60° ».

4. Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes

Les programmes de mathématiques du secondaire demandent ainsi la mise en évidence du caractère fondamental des mathématiques pour d'autres disciplines, ce qui nécessite que vivent dans le système didactique des praxéologies mathématiques mixtes (PMM), soit des praxéologies qui mêlent mathématiques et une autre discipline.

Considérons un instant le programme de terminale S qui demande explicitement, lors de l'étude des équations différentielles du type $y' = ay + b$, de faire le lien avec la physique. Cette demande est relayée par le document d'accompagnement dans lequel les auteurs développent assez longuement, à propos de la chute d'un corps, « la problématique générale de l'utilisation des équations différentielles en physique ». Un examen de quelques ouvrages de mathématiques destinés aux classes de terminale S montre que la mise en œuvre des équations différentielles pour produire de la physique a une présence contrastée : la plupart de ces ouvrages sont presque muets sur le sujet, se limitant à mettre un petit nombre d'exercices, au mieux traitant partiellement de la question, au pire résolvant une équation différentielle modélisant un phénomène physique sans que la production de cette équation soit abordée ; aucun ne prend explicitement en charge la question évoquée.

Ce phénomène d'évitement des PMM, notamment du point de vue de leur institutionnalisation, est d'autant plus accentué que les programmes spécifient peu les situations extramathématiques qu'il s'agit de considérer, comme c'est le cas au collège notamment. On peut y voir sans doute d'abord

[6] Sur l'implicitation des mathématiques, voir Chevallard 1988.

l'effet de la difficulté du bon « réglage » des interrelations entre deux savoirs dont l'un est fondamental pour l'autre et, corrélativement, la possibilité que s'établissent des interrelations « pathologiques » ou, du moins, « pathogènes ».

A cet égard, la pathologie la plus systématiquement présente affecte la capacité de la communauté productrice du savoir *S* (l'économie par exemple) à reconnaître et à assumer le caractère fondamental du savoir *S'* (les mathématiques en l'espèce) dans la production et l'utilisation de *S* (autrement dit, les économistes ne vont pas assumer que la production d'économie nécessite des mathématiques).

Mais, en retour, une autre pathologie affecte la capacité de la communauté savante mathématique, et donc de sa noosphère, à assumer le caractère fondamental de ce savoir pour d'autres disciplines, les mathématiques se défendant d'être une « discipline de service » et manifestant ce que Yves Chevallard a nommé une « horreur instrumentale »[7]. Ainsi, dans la conférence « Mathématiques, quel avenir ? » qu'il a donnée au colloque EM 2000 à Grenoble, Jean-Pierre Kahane prenait-il des précautions pour parler de « l'utilité pratique » des mathématiques : « Les mathématiques sont belles et utiles, et leur utilité pour la formation de l'esprit passe avant même leur utilité pratique. (…) L'étude de la CIEM sur les mathématiques comme discipline de service n'est pas attentatoire à la dignité des mathématiques, au contraire. »

L'enseignement des mathématiques à l'université n'échappe bien entendu pas à cet évitement des praxéologies mathématiques mixtes : outre le manque de visibilité de la nécessité sociale des mathématiques, cela induit une formation initiale des professeurs de mathématiques inadéquate, d'autant qu'un nombre croissant de jeunes professeurs ont suivi un cursus universitaire dans lequel l'enseignement des sciences physiques était peu présent (cursus MIAS).

Il est pourtant crucial que la communauté mathématique prenne en charge la mise en évidence du caractère fondamental des mathématiques pour d'autres savoirs, comme l'économie ou la physique, pour que la société puisse voir que les mathématiques sont utiles, et donc ait des raisons de mettre des moyens, humains et financiers, dans la production de mathématiciens. L'étude des conditions de diffusion de praxéologies mathématiques mixtes à l'Ecole apparaît ainsi comme un champ de recherche *didactique* essentiel à développer.

---

[7] Voir Chevallard 2001.

REFERENCES

Artaud M. *La mathématisation en économie comme problème didactique*. Thèse pour l'obtention du grade de docteur en mathématiques de l'Université d'Aix-Marseille II. Marseille : IREM d'Aix-Marseille, 1993.

Artaud M. Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la neuvième Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Caen : ARDM&IUFM, 1998. pp. 101-139.

Artaud M. Conditions et contraintes de l'existence des mathématiques dans l'enseignement général : permanences et évolutions. *Petit x* **50**, 1999. 23-38.

Artaud M. A propos du rapport aux mathématiques en économie. In *Actes du séminaire mathématiques et sciences humaines.* Marseille : IREM, 2001.

Chevallard Y. (1988), *Implicit Mathematics : Its Impact on Societal Needs and Demands*, communication au groupe thématique 7, *The Mathematics Curriculum :Towards the Year 2000*, du sixième congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME 6, Budapest) in John Malone, Hugh Burkhards et Christine Keitel (eds), *The Mathematics Curriculum : Towards the Year 2000*, Curtin University of Technology, Perth (Australie), 1989.

Chevallard, Y. Les mathématiques et le monde : dépasser « l'horreur instrumentale ». *Quadrature* **41,** 2001, 25-40.

Kahane, J.P. Mathématiques quel avenir ?. Conférence à *EM 2000.* Disponible sur Internet : http://em2000.imag.fr/Actes/Conferences/KAHANE.pdf [ref : 20 septembre 2003].