Il est urgent de repenser l'enseignement de la preuve

Michèle GANDIT
IUFM, Université Joseph Fourier , GRENOBLE, France
michele.gandit@ujf-grenoble.fr

Résumé
Nous montrons la nécessité de repenser l'enseignement-apprentissage de la preuve qui a glissé, depuis plusieurs années, vers celui d'un algorithme d'écriture de preuve. Au travers de deux problèmes de géométrie plane est ensuite abordé le lien entre expérimentation, modélisation, validation et construction d'une pensée rationnelle, passant notamment par l'acte de définition. En formation des enseignants, ces problèmes interrogent des objets de la géométrie élémentaire, mais plus généralement, la preuve en mathématiques et son enseignement.

Introduction

Nous présentons des résultats de notre recherche (ERTé *maths à modeler* de l'Institut Fourier, Grenoble, http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/) sur l'enseignement de la preuve en mathématiques et la formation des enseignants de mathématiques du second degré (Gandit 2008). Nous avons élaboré une ingénierie de formation, dont nous présentons deux situations de géométrie plane, cadre dans lequel est abordée actuellement la preuve dès le début de l'enseignement secondaire en France. Ce texte décrit d'abord le contrat didactique usuel en vigueur dans la majorité des classes de collège par rapport à l'enseignement de la démonstration. L'analyse de productions d'élèves conformes à ce contrat, tout à fait représentatives de l'état de compréhension d'un bon nombre d'élèves par rapport à la démonstration, montre l'urgence de repenser l'enseignement actuel de la preuve. Nous montrons comment nous utilisons ces deux problèmes en formation, pour amorcer une réflexion sur ces pratiques. Dans toute la suite, nous considérons que *preuve* et *démonstration* sont synonymes.

1. La preuve est difficile à enseigner

La preuve en mathématiques est à la fois l'outil pour construire les mathématiques et le moyen de communiquer. C'est aussi un processus et un produit. La preuve vise à lever le doute, à valider, à établir la vérité, à convaincre, mais aussi à expliquer, ces différentes fonctions du processus ayant pour cadre une rationalité propre aux mathématiques. La preuve, en tant que produit pour communiquer, est l'aboutissement d'un travail d'écriture, qui accompagne le processus tout au long de son déroulement. Sous ces deux aspects de processus et de produit, elle se construit lentement au cours d'une longue période expérimentale, dans la recherche d'un problème, dans une *lente maturation* (Poincaré 1908).
Du fait de sa nature de processus qui évolue d'une question de départ vers une réponse qui doit être irréfutable, la preuve est difficile à enseigner. Les enseignants rencontrent des difficultés sur ce plan. En attestent les questions posées en formation et les copies qu'ils apportent — dans la suite, nous en analysons deux —, devant lesquelles ils se sentent démunis. On peut distinguer quatre sources différentes à cette difficulté d'enseignement. La première est l'importance du saut conceptuel qu'il est nécessaire de faire faire aux élèves pour qu'ils puissent entrer dans le processus : ils doivent d'abord comprendre qu'il faut passer d'un point de vue pragmatique à un point de vue plus théorique (Balacheff 1987), ensuite que ce

processus s'inscrit dans une logique spécifique, qui diffère de celle qui régit la vie de tous les jours, puis comprendre le caractère de nécessité des énoncés mathématiques (Gandit & Massé-Demongeot 1996). Ces trois éléments essentiels ne suffisent d'ailleurs pas à eux seuls à décrire cet écart conceptuel. La seconde difficulté pour les enseignants est de présenter le produit fini, la preuve (ou démonstration), aboutissement d'un travail d'écriture. En effet, certains arguments ne figurent pas dans le produit fini, alors qu'ils sont utiles au raisonnement : ce sont les *trous*, utiles pour augmenter l'intelligibilité d'une preuve. D'autres arguments sont absolument indispensables, leur absence rendant la preuve non valide. A cause de cette nécessaire disparité des arguments, la présentation du produit fini ne peut permettre à elle seule de faire comprendre aux élèves comment il est constitué. Une troisième source de difficulté pour les enseignants réside dans le manque de visibilité du travail d'écriture qui accompagne le processus jusqu'au produit fini : on ne voit en général que ce dernier, qui est un aboutissement, plus formalisé, dans lequel n'apparaît plus nécessairement la démarche. Enfin une quatrième difficulté tient à l'évaluation d'une preuve : par exemple, il est difficile pour le professeur de repérer, dans une production d'élève, si tel trou est légitimé par le souci de l'élève de se faire mieux comprendre ou s'il vient du fait que l'élève n'a pas compris.

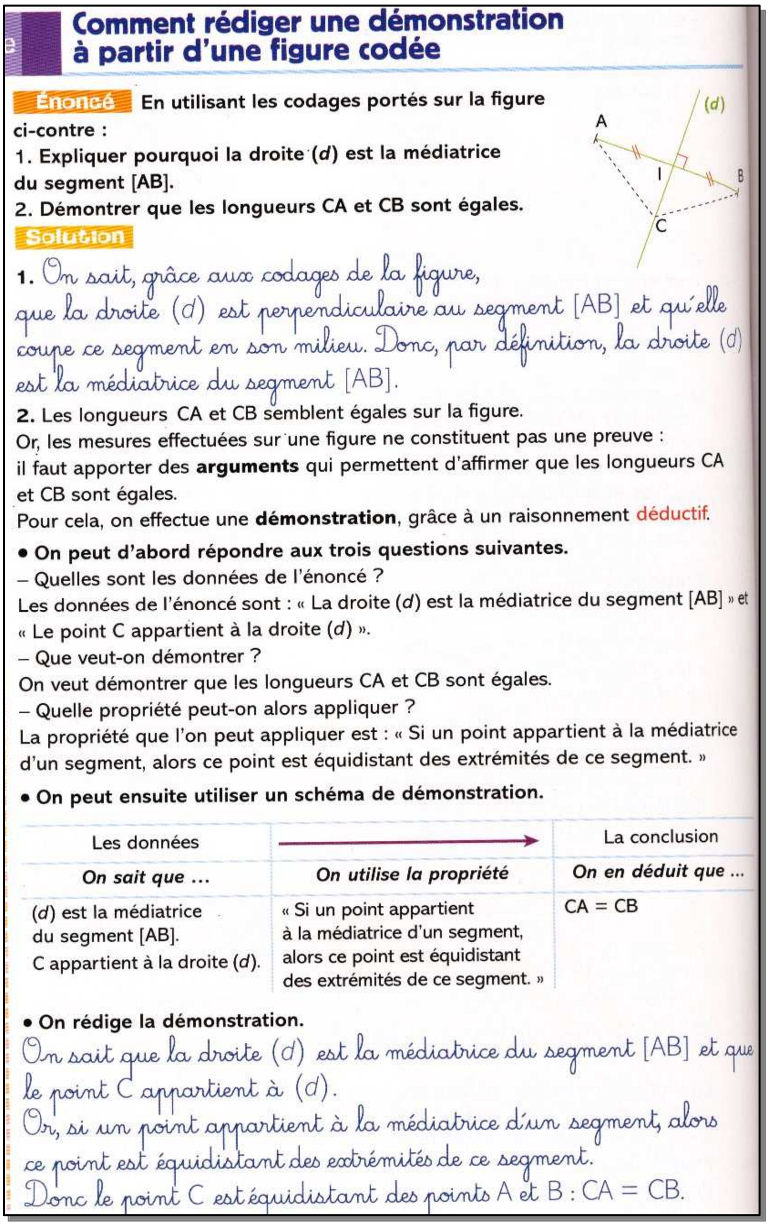
Le professeur étant tenu de faire réussir les élèves et l'objet à enseigner étant difficile d'accès, cette situation de conflit didactique se résout, dans l'enseignement actuel, depuis une quinzaine d'années, par un changement d'objet d'enseignement : on écarte l'enseignement du processus et on enseigne directement à écrire un certain type de produit fini. Or comment enseigner celui-ci en dehors du processus de preuve ? Le rôle de l'écriture, qui est d'accompagner le processus jusqu'au produit fini, de rendre compte de son avancement, n'est alors plus le même. Autrement dit, comment enseigner le *signifiant* sans le *signifié* (Vergnaud 1990) ? Cette nouvelle difficulté didactique se résout actuellement, comme souvent dans ce type de situation, par l'enseignement d'un *algorithme d'écriture de preuve*, ce qui

> […] *permet momentanément un partage clair des responsabilités. Le maître montre l'algorithme, l'élève l'apprend et « l'applique » correctement : sinon il doit s'exercer mais son incertitude est presque nulle.* (Brousseau 1998)

L'incertitude du professeur est presque nulle aussi : il peut montrer l'algorithme d'écriture et ce qu'il produit, qui est alors appelé une démonstration.

Cette transposition dénature le sens de la preuve. Ainsi le décalage est important entre la preuve en mathématiques et la preuve telle qu'elle vit dans les classes. Pour illustrer ce point, de multiples exemples peuvent être pris dans les manuels utilisés actuellement au collège en France ou dans les préparations de cours ou encore dans le déroulement réel des séances en classe (Gandit 2003, 2004).

Voici un exemple (page suivante) choisi dans un manuel de la classe de cinquième (collection Prisme, 2006, page 152) : la page proposée est tout à fait représentative de l'approche de la démonstration dans la majorité des classes de collège actuellement. On voit la démonstration réduite à un exercice formel de manipulation de propriétés vues en cours, suivant une structure codifiée, en trois phases, la première étant introduite par « on sait que » et la dernière par « donc », cette manipulation ayant lieu à partir d'une situation pauvre, où le résultat est évident. Ce formalisme est illustré de deux façons : un tableau en trois colonnes ou un texte très codifié, un texte-algorithme.



Comment rédiger une démonstration à partir d'une figure codée

Énoncé **En utilisant les codages portés sur la figure ci-contre :**
1. Expliquer pourquoi la droite (*d*) est la médiatrice du segment [AB].
2. Démontrer que les longueurs CA et CB sont égales.

Solution
1. On sait, grâce aux codages de la figure, que la droite (*d*) est perpendiculaire au segment [AB] et qu'elle coupe ce segment en son milieu. Donc, par définition, la droite (*d*) est la médiatrice du segment [AB].
2. Les longueurs CA et CB semblent égales sur la figure.
Or, les mesures effectuées sur une figure ne constituent pas une preuve : il faut apporter des **arguments** qui permettent d'affirmer que les longueurs CA et CB sont égales.
Pour cela, on effectue une **démonstration**, grâce à un raisonnement déductif.

• On peut d'abord répondre aux trois questions suivantes.
– Quelles sont les données de l'énoncé ?
Les données de l'énoncé sont : « La droite (*d*) est la médiatrice du segment [AB] » et « Le point C appartient à la droite (*d*) ».
– Que veut-on démontrer ?
On veut démontrer que les longueurs CA et CB sont égales.
– Quelle propriété peut-on alors appliquer ?
La propriété que l'on peut appliquer est : « Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment. »

• On peut ensuite utiliser un schéma de démonstration.

Les données	→	La conclusion
On sait que ...	***On utilise la propriété***	***On en déduit que ...***
(*d*) est la médiatrice du segment [AB]. C appartient à la droite (*d*).	« Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment. »	CA = CB

• On rédige la démonstration.
On sait que la droite (*d*) est la médiatrice du segment [AB] et que le point C appartient à (*d*).
Or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.
Donc le point C est équidistant des points A et B : CA = CB.

On remarque de plus que le questionnement destiné à éclairer le lecteur sur la démarche à suivre pour rédiger une démonstration propose en premier de s'interroger sur les données de l'énoncé : on ne se préoccupe pas d'abord du problème à résoudre, on doit seulement lire correctement les données codées, comme si le codage et la sélection des données étaient indépendants du projet de preuve[1] (Demongeot & Gandit 2003). Concernant ce dernier point, on remarquera que relever comme donnée utile (hypothèse pour le pas de démonstration) que *C* appartient à *d* est complètement lié au projet de conclure que *CA* = *CB*. Or ceci n'apparaît pas du tout dans la présentation chronologique du questionnement (d'abord les données, puis ce qu'on veut démontrer…). Et pourquoi ne pas sélectionner comme donnée que le triangle *CIB* est rectangle en *I* ? L'expert ne se pose pas cette question car, lui, il sélectionne les données au cours de la recherche de la « démonstration », ce qui n'est pas le cas de l'élève, qui ne sait pas encore ce que signifie démontrer (nous y revenons ci-dessous, avec la copie d'Yvan).

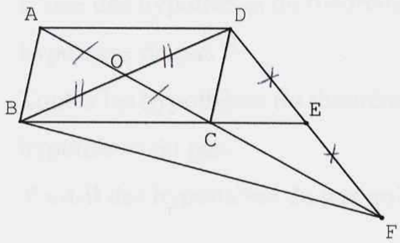
Comme l'atteste cette page de manuel, l'apprentissage de la preuve en tant que produit fini se réalise ainsi par un *contrat didactique d'ostension* (le professeur montre un modèle et l'élève le suit) (Brousseau 1998), où la forme l'emporte sur le fond. Celui-ci peut se décliner en une liste de règles, en vigueur actuellement au collège, mais qui commencent à s'étendre aussi au lycée. La page de manuel en illustre deux : la *règle du « on sait que-or-donc »* et la *règle du tableau en trois colonnes*. La première établit qu'une démonstration s'articule en différents pas ternaires, hypothèse-règle-conclusion, l'hypothèse étant introduite par « on sait que », la conclusion par « donc », la « règle » justifiant le passage de la première à la seconde étant éventuellement introduite par « or ». La seconde propose une présentation de la démonstration dans un tableau à double entrée : chaque ligne représente un pas, chacune des trois colonnes

[1] Nous explicitons ce point plus loin, avec la copie d'Yvan.

Michèle GANDIT IUFM, Université Joseph Fourier , GRENOBLE, France
michele.gandit@ujf-grenoble.fr

correspond respectivement à hypothèse, « règle » et conclusion du pas, celle-ci étant recyclée en hypothèse du pas suivant (Duval 1991).
Nous explicitons davantage ce contrat dans la suite, en nous plaçant du point de vue de l'élève, face à ces règles, qui lui sont le plus souvent imposées a priori. Tout d'abord la copie d'Angélique concernant un contrôle à l'issue d'un chapitre, souvent appelé « Triangles, milieux et parallèles ».

Exercice :
On considère la figure ci-dessous :



1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2) Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
3) Montrer que C est le milieu de $[AF]$.

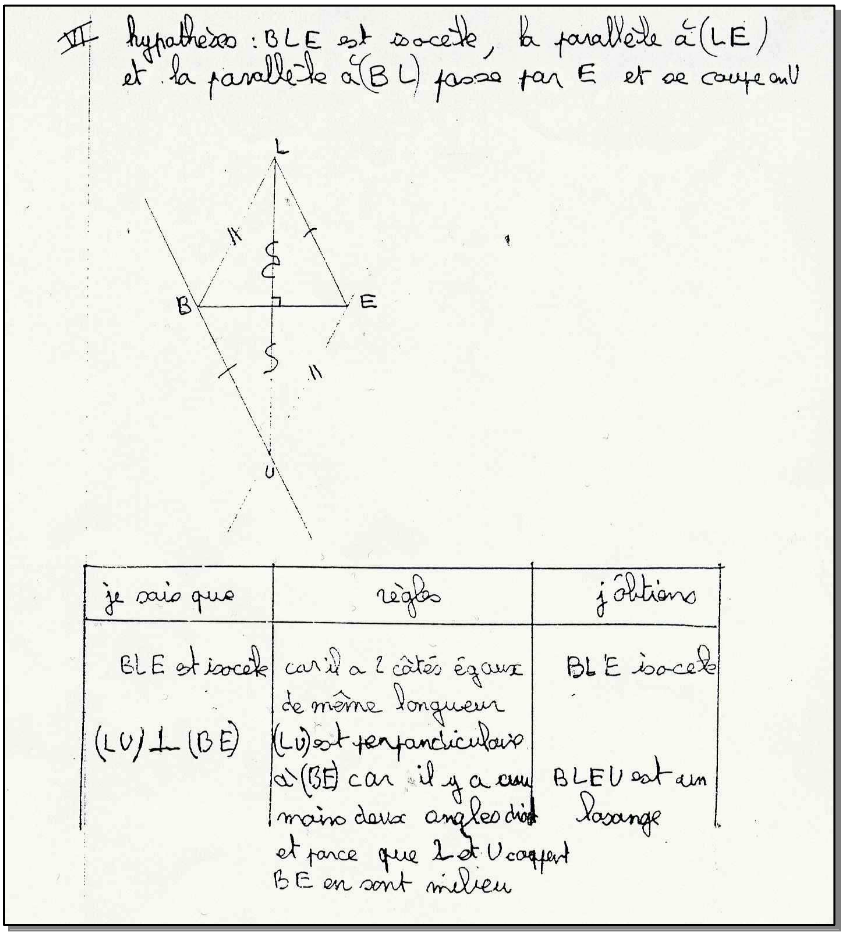
1) Je démontre que ABCD est un parallélogramme.
Je sais que O est le milieu de [AC] et que O est le milieu de [BD].
J'utilise le théorème 2 : si un segment joint les milieux des 2 côtés d'un triangle, alors sa longueur est égal à la moitié du 3èmecôté.
Donc ABCD est un parallélogramme.

2)Je démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
Je sais que O est le milieu de [AC] et aussi le milieu de [BD].
J'utilise le théorème 3 : si une droite passe par le milieu des deux côtés d'un triangle alors cette droite passe aussi par le 2ème et le 3ème côté de ce triangle.
Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

3) Je montre que C est le milieu de [AF].
Je sais que E est le milieu de [DF]
est que CD et CE sont parallèles.
J'utilise le théorème 1 : si une droite passe par le milieu d'un côté, alors cette droite est parallèle au 3ème côté.

Les réponses d'Angélique sont introduites par « je démontre que », elles correspondent aux questions posées et — sauf dans la troisième question, inachevée — aux conclusions introduites par « donc ». Cette élève respecte aussi, avec quelques variantes dans les expressions utilisées, la *règle du « on sait que-or-donc »*, en vigueur dans sa classe. L'hypothèse du pas, introduite ici par « je sais que », contient des informations correctes tirées du codage de la figure. Si, conformément au contrat, le deuxième temps du pas consiste bien en une « règle », annoncée par « j'utilise le théorème …», celle-ci ne sert cependant pas à justifier le passage de l'hypothèse à la conclusion, comme on peut le remarquer dans les réponses aux trois questions. Cependant les hypothèses de ces « règles » reprennent bien les éléments cités dans la première phase de ces pas. De plus, conformément à une autre règle de contrat selon laquelle les démonstrations sont des mises en œuvre des connaissances vues en cours, Angélique s'astreint à utiliser les trois théorèmes étudiés habituellement dans ce chapitre.
Une autre copie, celle d'Yvan, élève de quatrième lui aussi, permet de compléter la façon dont les élèves vivent ce contrat relatif à la démonstration. Le professeur a posé l'exercice suivant en contrôle : *BLE est un triangle isocèle de sommet L. La parallèle à (LE) passant par B et la*

parallèle à (LB) passant par E se coupent en U. Prouver que (BE) et (LU) sont perpendiculaires.


II hypothèses : BLE est isocèle, la parallèle à (LE) et la parallèle à (BL) passe par E et se coupe en U

je sais que	règles	j'obtiens
BLE est isocèle	car il a 2 côtés égaux de même longueur	BLE isocèle
(LU) ⊥ (BE)	(LU) est perpendiculaire à (BE) car il y a au moins deux angles droits et parce que L et U coupent BE en son milieu	BLEU est un losange

En premier, Yvan respecte une règle du contrat, selon laquelle, pour faire une démonstration en géométrie, on fait une figure qu'on accompagne des hypothèses et d'un codage. Or ces actions, écrire les hypothèses, faire une figure, la coder, l'expert les accomplit au service de la recherche et de l'écriture d'une démonstration :

Pour l'expert, ces tâches préalables n'ont rien de préalable : elles entretiennent des liens étroits entre elles et s'ancrent complètement dans la recherche et l'écriture de la démonstration. Pour la classe, le travail de démonstration a été découpé. Les tâches en question perdent leur sens et leur fonction, car le projet qui sous-tend le travail, l'intentionnalité ne se découpent pas. Et l'élève qui en reste au décryptage et à l'exécution de ces tâches explicites, qui ne reconstruit pas le projet implicite, peut-il comprendre ce qu'est le texte de démonstration visé ? (Demongeot & Gandit 2003).

Yvan a bien cherché à écrire les hypothèses : il a « copié » très approximativement l'énoncé. La deuxième phrase de ce dernier contient plusieurs propositions enchevêtrées, qu'on pourrait scinder en propositions recyclables dans une preuve (pour qui sait démontrer) en « *(BU) est parallèle à (LE)* » et « *(EU) est parallèle à (LB)* ». Or ce travail est difficile à réaliser s'il a lieu avant la construction d'une figure, ce qui semble le cas dans cette copie. De plus, pour casser ainsi la forme textuelle de l'énoncé, il faut avoir une idée précise de la démonstration. Ensuite, Yvan a bien réalisé la figure et l'a codée. Le codage est associé à des propriétés effectivement vraies, mais de statuts différents par rapport au problème posé : les trois égalités de longueurs codées ne sont pas toutes en lien avec la preuve, l'angle droit marqué relève de la conclusion. L'hypothèse que *BLE* est isocèle n'est pas traduite par l'égalité des longueurs (ce qui est utile ici, plutôt que l'égalité des angles). On peut remarquer que ces éléments de codage sont dissociés aussi bien de l'énoncé de l'exercice que du texte-tableau qui suit : par exemple, on lit dans le tableau que deux côtés sont de même longueur, ce qui n'est pas codé. Après ces tâches préalables, Yvan a entrepris une démonstration conforme à la *règle du tableau en trois colonnes*, déjà évoquée. Pour une analyse approfondie de ces copies, nous renvoyons à Demongeot & Gandit (2003) et à Gandit (2008). La simple remarque

qu'Yvan a écrit dans sa copie trois fois « *BLE* est isocèle », dont une fois, en hypothèse, et une fois, en conclusion du même pas de démonstration, montre combien cet élève est loin de l'idée d'écrire une preuve.
Ces deux copies, celle d'Angélique et celle d'Yvan, très représentatives des productions d'un grand nombre d'élèves, issus de classes diverses, depuis une petite quinzaine d'années, nous ont conduite à nous interroger sur les pratiques d'enseignement relatives à la preuve. Comment des élèves en arrivent-ils à écrire des textes aussi dépourvus de sens ? Comment faire changer ce contrat didactique relatif à la preuve en classe, de sorte que le sens de la preuve soit moins dénaturé ? Comment changer les pratiques d'enseignement pour que la preuve soit abordée en classe, de manière plus satisfaisante sur le plan épistémologique ? Les deux problèmes, que nous proposons dans le paragraphe suivant, permettent une réflexion sur l'enseignement de la preuve. Ils s'adressent à des enseignants, mais aussi à des élèves. Ils font partie d'une ingénierie de formation des enseignants (Gandit 2008), au cours de laquelle l'analyse conjointe de productions sur ces problèmes, venant d'enseignants et d'élèves, permet d'agir sur les pratiques qui aboutissent aux non-sens que nous venons de décrire (voir Yvan et Angélique). Le bilan de cette analyse peut amener à une modification d'une conception dominante des enseignants, à propos de la preuve et de son enseignement, conception qui peut se résumer ainsi : la preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours, elle s'apprend dans un contexte, où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité, on suit un « modèle de rédaction donné », qui montre l'enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse/règle/conclusion. Ces deux problèmes restaurent la preuve, en tant que processus pour valider et en tant que produit qui accompagne ce processus.

2. Présentation des problèmes

Voici les énoncés :

Le Centre de Secours
Dans une vaste région se trouvent quatre villages de même importance ; on veut construire un centre de secours muni d'un hélicoptère de façon à pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné. Où placer le centre de secours ?

Le Pentagone
Somme des angles d'un pentagone.

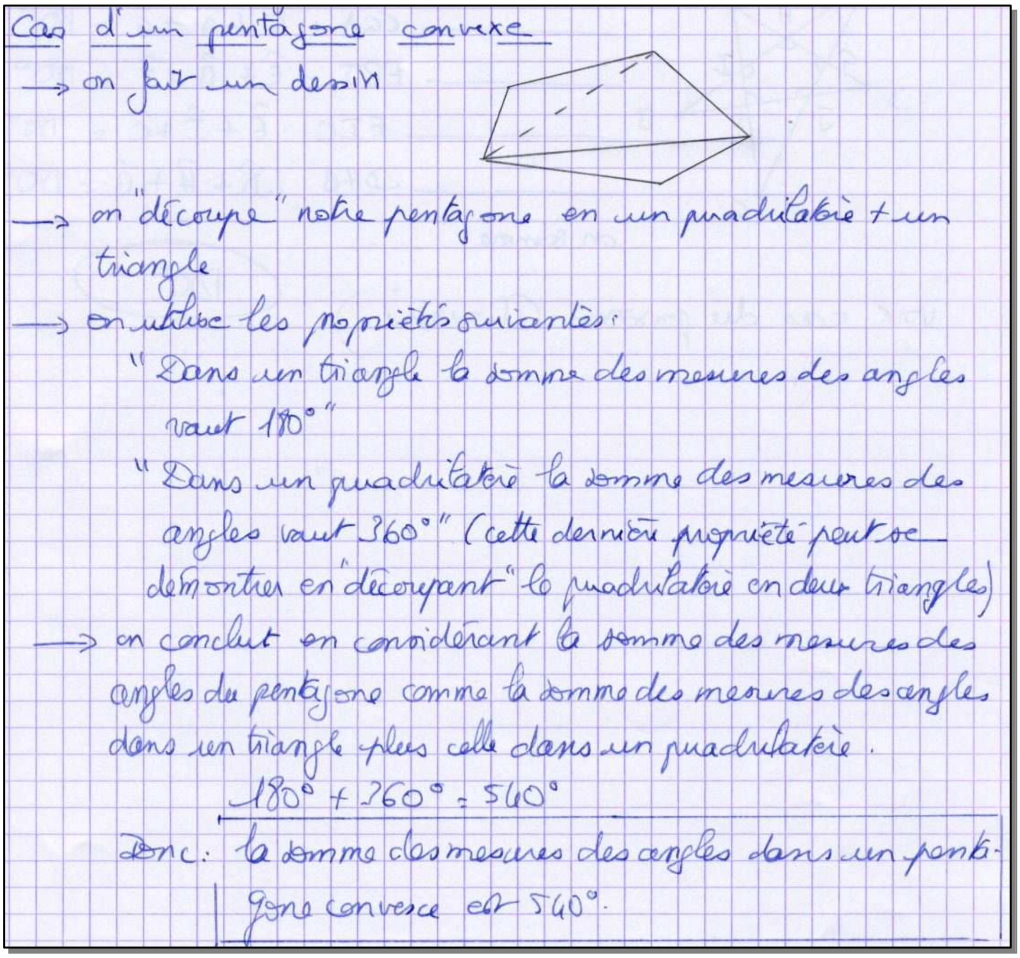
Nous avons expérimenté ces deux situations, à la fois en formation (initiale ou continue) d'enseignants du second degré (environ quatre-vingts personnes pour *le Centre de Secours* et cent cinquante pour *le Pentagone*) et en classe (collège ou seconde). Il est en effet possible de les proposer à des élèves de collège, en modifiant éventuellement le nombre de villages pour *le Centre de secours* (n'en considérer que trois au lieu de quatre). Les connaissances en jeu sont simples. Pour *le Pentagone*, il faut savoir ce qu'est un pentagone, un angle, mais surtout il faut prendre l'initiative de les définir. En ce qui concerne *le Centre de secours,* elles sont un peu plus complexes, mais relèvent tout de même de la géométrie du collège : notion de centre, disque, angle, cercle circonscrit à un triangle. Cependant les problèmes renferment un fort enjeu de vérité, la nécessité de lever le doute sur les conjectures émises est importante.
Leur résolution nécessite d'envisager toute une classe d'objets, de raisonner sur des cas particuliers. Aussi permettent-ils une réflexion sur le rôle des cas particuliers dans la recherche d'un problème. Ceci est à mettre en regard d'une règle du contrat didactique usuel relatif à la preuve en classe, qui consiste à demander systématiquement aux élèves de ne pas raisonner sur des cas particuliers. Ceux-ci sont ainsi bannis des classes de collège. Or par expérimentation sur des cas simples, on peut facilement produire des *résultats* sur ces

problèmes, ce qui permet aussi de réfléchir à ce qu'on appelle un résultat en mathématiques. Ils donnent lieu à des preuves qui sortent du cadre logique habituel, relevant du calcul sur les propositions. Ils nécessitent en effet la preuve de l'existence d'objets. Ceci s'oppose à la conception que la preuve est une suite de pas ternaires (Duval 1991), comme nous l'avons décrite. Cette centration quasi exclusive sur la preuve comme un calcul sur les propositions et les difficultés engendrées dans l'enseignement supérieur sont bien mises en évidence aussi par Durand-Guerrier & Arsac (2003).
Lors de nos expérimentations, ces problèmes donnent lieu à des conjectures fausses, dont certaines sont facilement réfutées. On redonne ainsi une place au faux dans l'enseignement des mathématiques, on montre alors l'importance d'enseigner à le reconnaître. Ceci passe par la dévolution à la classe d'une responsabilité scientifique (Legrand 1990 ; Gandit & Massé-Demongeot 1996). Concernant particulièrement *Le centre de secours*, ce n'est qu'après un temps assez long que les enseignants perçoivent la difficulté du problème ou n'entrent jamais, sans vraiment s'en apercevoir, dans la question posée ; ils en sont détournés par le recours à un catalogue de méthodes qui s'avèrent, en réalité, étrangères au problème, et empêchent de voir celui-ci. Il s'agit là d'un résultat didactique important obtenu sur ce problème.
Nous renvoyons à Gandit (2008) pour une analyse plus complète de ces problèmes, sur les plans mathématique et didactique. Nous ne développons ci-dessous que quelques éléments sur le problème du *Pentagone*.

Le Pentagone conduit à se questionner sur un objet mathématique et sur l'acte de définition

Au premier abord, *le Pentagone* apparaît beaucoup plus simple que le *Centre de* secours, même trop simple, pourrait-on dire. Certains enseignants en effet écrivent des démonstrations en suivant les règles du contrat usuel en vigueur dans leurs classes, en se plaçant dans le cas du pentagone convexe, voire régulier, avant de s'apercevoir éventuellement qu'il existe d'autres cas de pentagones. Voici une copie d'enseignant qui illustre ce point :

Michèle GANDIT IUFM, Université Joseph Fourier , GRENOBLE, France
michele.gandit@ujf-grenoble.fr



Cas d'un pentagone convexe

→ on fait un dessin

→ on "découpe" notre pentagone en un quadrilatère + un triangle

→ on utilise les propriétés suivantes :

"Dans un triangle la somme des mesures des angles vaut 180°"

"Dans un quadrilatère la somme des mesures des angles vaut 360°" (cette dernière propriété peut se démontrer en "découpant" le quadrilatère en deux triangles)

→ on conclut en considérant la somme des mesures des angles du pentagone comme la somme des mesures des angles dans un triangle plus celle dans un quadrilatère.

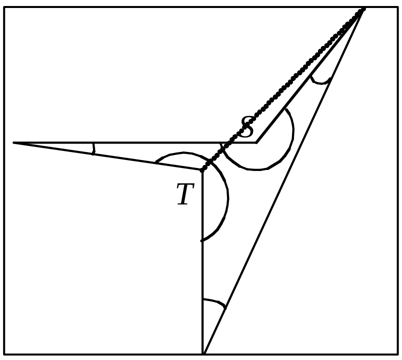
180° + 360° = 540°

Donc : la somme des mesures des angles dans un pentagone convexe est 540°.

Production d'enseignant 1

On voit apparaître les différentes étapes qui relèvent du modèle de démonstration habituellement proposé en classe : « on fait un dessin », « on utilise les propriétés suivantes », « on conclut ». Cette preuve est représentative d'environ un quart des productions d'enseignants étudiées sur ce problème, où il ressort un certain formalisme et une surabondance d'arguments par rapport à ce qui est simple. Cependant cette démonstration comporte un *trou* : rien n'est dit de la preuve de l'existence de la triangulation proposée ; on affirme seulement qu'« on découpe le pentagone… ». On raisonne sur des objets dont on oublie de prouver qu'ils existent. Plus des trois quarts des productions étudiées ne se questionnent pas sur l'existence d'un tel découpage. Or cette triangulation existe-t-elle dans tous les cas ? Peut-on choisir n'importe quel sommet au départ ? Autrement dit, les diagonales qui contiennent n'importe lequel des sommets du pentagone sont-elles toutes deux incluses dans l'*intérieur* du pentagone ?

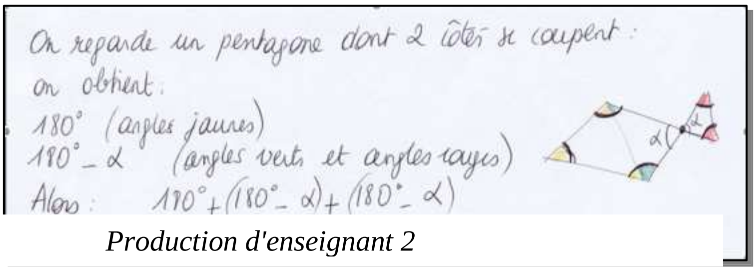
Il semble alors important d'évoquer la convexité du pentagone. Si le pentagone n'est pas convexe, le sommet à partir duquel on découpe le pentagone en trois triangles ne peut pas alors être n'importe lequel parmi les cinq sommets du pentagone. Celui de la figure ci-contre ne peut pas être triangulé, en partant du sommet T, puisqu'il existe au moins une diagonale issue de T qui ne reste pas à l'intérieur du pentagone.



Ce problème permet aussi d'aborder la preuve sous un autre point de vue que celui du calcul sur les propositions, celui du raisonnement sur des objets qu'on définit, des objets dont on prouve l'existence ou dont on montre qu'ils ne peuvent pas exister, des objets dont on étudie les propriétés. Et si l'on envisage que les côtés puissent se croiser ? Qu'est-ce alors que l'*intérieur* du pentagone ? Qu'est-ce qu'on considère comme un *angle* du pentagone ? Le point de vue naïf sur l'angle,

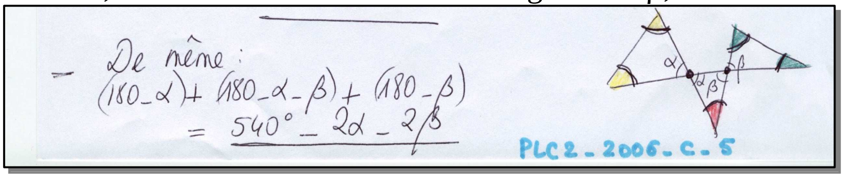
Michèle GANDIT IUFM, Université Joseph Fourier , GRENOBLE, France
michele.gandit@ujf-grenoble.fr

adopté pour traiter le cas des polygones non croisés ne fonctionne plus puisqu'il utilise la notion d'*intérieur* et que, pour un pentagone croisé, il n'y a pas d'intérieur. On doit ainsi prendre l'initiative de définir un objet (un *angle* d'un pentagone) pour poursuivre la preuve, l'absence de définition conduisant à une contradiction, comme le montrent les productions 2 et 3.



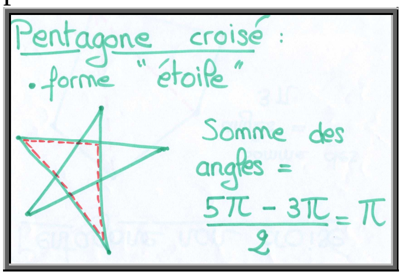
Production d'enseignant 2

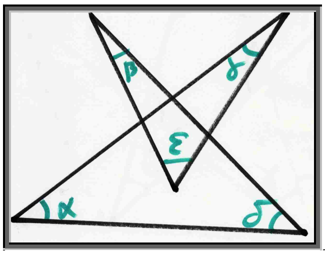
Celle-ci contient une définition implicite des angles d'un pentagone et aboutit au résultat que la somme des angles est une fonction d'un angle α : la somme des angles varierait donc suivant l'aplatissement du pentagone plus ou moins grand, obtenu en réduisant ou augmentant l'angle α. Et s'il n'y avait que deux points de croisement, il serait donc utile de considérer neuf angles pour conclure que la somme des angles est égale à ce qui est écrit, et varie donc en fonction des angles α et β, comme on le voit dans la copie suivante :



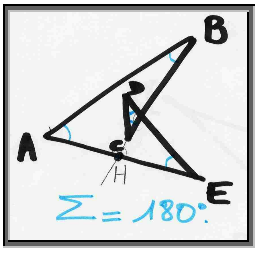
Production d'enseignant 3

des angles d'un pentagone demande à être interrogée, d'autant plus que ce type de formule apparaît souvent après l'étude d'un pentagone avec cinq, trois ou un seul point de croisement, où il est montré que la somme des angles est égale à 180°, sans qu'il ne soit question de considérer les angles au croisement des côtés, comme on le voit dans les productions suivantes :



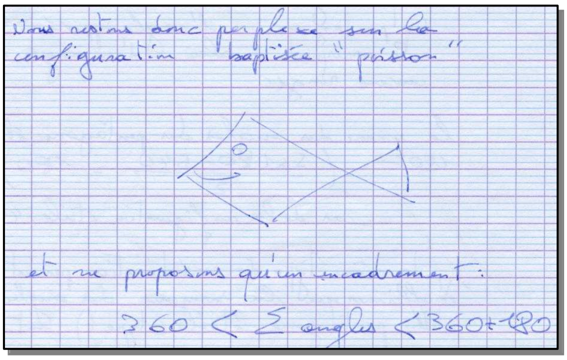


180°



Production d'enseignant 4 *Production d'enseignant 5* *Production d'enseignant 6*

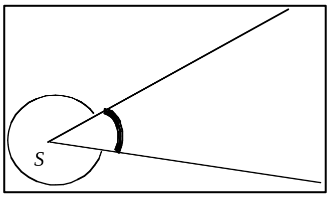
Tout ceci devrait conduire à se demander ce qu'est un angle du pentagone, et par suite ce qu'est un pentagone. Mais ce n'est pas le cas, en général. Certains enseignants concluent comme la production 7:



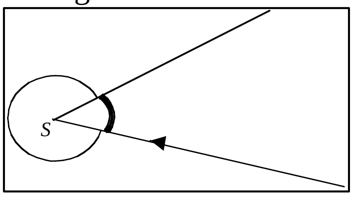
Production d'enseignant 7

Or le choix d'une définition d'un angle d'un pentagone permet de traiter le problème de manière cohérente. Nous donnons ci-dessous quelques éléments.

On désigne par *P* un pentagone, qu'on considère comme une ligne brisée fermée, constituée de segments de droite. On définit un *angle de P* comme un angle en un sommet de *P*.



Or, en un sommet *S* de *P*, on peut considérer deux angles. Dans le cas d'un pentagone non croisé, on peut considérer *un angle à l'intérieur* de *P* et *un angle à l'extérieur de P* (dans la figure ci-contre, on ne peut pas savoir quel est *l'angle à l'intérieur* et quel est *l'angle à l'extérieur*, en *S*). On peut choisir de définir *un angle en S* comme l'angle du plus petit cône affine issu de *S* qui contient l'intersection d'un voisinage arbitrairement petit de *S* avec l'intérieur de *P*. Cette définition ne convient plus pour les pentagones croisés puisque, dans ce cas, il n'y a plus ni intérieur, ni extérieur. Comment alors choisir entre les deux angles en *S* d'une autre manière (qu'en distinguant intérieur et extérieur) qui conviendrait aussi pour les croisés ?



On décrit la ligne fermée qui constitue *P* après avoir choisi un des deux sens de parcours, cette idée de *parcours orienté* du polygone permettant ainsi d'envisager, en un sommet *S*, un *angle à droite* et un *angle à gauche*. On peut ainsi considérer que *l'angle*, marqué ci-contre par un double trait est *l'angle à droite en S*, dans le sens de parcours choisi. Ce serait l'*angle à gauche en S* si l'on choisissait l'autre sens de parcours. Cette distinction entre angle à droite et angle à gauche revient à celle entre intérieur et extérieur qui convient aux polygones non croisés. Autrement dit, cette nouvelle définition d'un angle en un sommet de *P* (avec choix d'un sens de parcours de *P* et choix d'un marquage à droite ou d'un marquage à gauche) permet de mettre en relation le point de vue naïf abordé au départ avec l'angle de la rotation opérée en ce sommet quand on parcourt le polygone.

On démontre en fait (Gandit 2008) que la somme des cinq angles du pentagone s'exprime en fonction du nombre *p* de tours (*p* désigne un nombre entier qui prend les valeurs 0, 1 ou 2) effectués quand on parcourt le pentagone dans le sens choisi. Suivant le marquage choisi des angles (à droite ou à gauche), cette somme est égale à $(5 + 2\,p)\,\pi$ ou à $(5 - 2\,p)\,\pi$ radians. Pour le pentagone en forme de poisson, qui figure à la page précédente, $p = 0$; on obtient donc une somme des angles égale à $5\,\pi$ radians (ou 900 degrés), quel que soit le marquage des angles choisi. Pour le pentagone étoilé, par exemple, on fait 2 tours ($p = 2$), donc la somme des angles est égale à π radians ou $9\,\pi$ radians, suivant le marquage choisi des angles. Pour le cas des pentagones non croisés, le nombre de tours *p* est égal à 1 : la somme des angles est alors égale à $3\,\pi$ radians (540 degrés) ou $7\,\pi$ radians, selon les angles choisis, la valeur de $3\,\pi$ correspondant aux *angles à l'intérieur* du pentagone.

Conclusion

Chacun de ces problèmes donne lieu, en formation, à une institutionnalisation à deux niveaux, celui du problème lui-même, puis celui de l'enseignement de la preuve, à partir de trois types de productions d'enseignants judicieusement choisis.

Le premier type (qui correspond aux productions 2, 3, 7 ci-dessus) concerne une production qui comporte la « configuration poisson » et d'autres cas de pentagones. Il permet d'institutionnaliser, au niveau du problème, la nécessité de définir un objet mathématique, un angle d'un pentagone, en montrant que c'est cette absence de définition qui aboutit à des incohérences. Au niveau de l'enseignement de la preuve, ce type de production permet d'envisager la position de l'élève auquel on propose toujours des définitions a priori, sans qu'il en saisisse la nécessité. Il montre aussi que l'incohérence n'est pas le seul fait des élèves, elle naît souvent d'un malentendu sur les objets en jeu : elle vient dans ce problème du fait que les objets en jeu (les angles du pentagone) ne sont pas clairement perçus, c'est une position très courante chez la plupart des élèves.

Un deuxième type de production qu'on analyse en formation est celui d'une copie qui envisage différents cas de pentagones (convexes, non convexes non croisés, différents croisés), sans qu'apparaisse clairement une disjonction de cas. Au niveau du problème, il ressort d'une telle copie que c'est la considération de la généralité du problème qui donne lieu à une disjonction de cas. La question concerne *un* pentagone, mais il s'agit bien de répondre pour tous les cas. Et ces différents cas se reconnaissent dès qu'on s'interroge sur l'existence des objets. La progression dans la généralité du problème se fait par l'émergence de cas particuliers, qui s'avèrent des contre-exemples. Au niveau de la classe, ceci permet d'envisager la position de l'élève face à cette généralité : l'élève comprend-il le *un* générique utilisé notamment en géométrie, qui traduit l'universalité du propos mathématique ? Sinon comment le lui faire comprendre ? Ce deuxième type de production d'enseignant permet aussi d'établir que ce n'est pas dans le « cours », dans une liste de méthodes bien établie, qu'on peut trouver comment avancer dans la preuve de ce problème, mais bien plutôt dans la capacité à être critique par rapport à la démarche empruntée, être en permanence en recherche d'un éventuel contre-exemple qui pourrait contredire ce qu'on affirme. Ceci pourrait par suite donner lieu à une nouvelle règle de contrat à faire vivre en classe : dans l'écriture d'une preuve, adopter un regard critique sur ce qu'on écrit, en recherchant d'éventuels contre-exemples.

Une production d'un troisième type montre une preuve rédigée de façon très formelle et très détaillée, dans un cas simple (comme la production 1), qui ne comporte pas de question sur l'existence d'une triangulation du pentagone, qui est pauvre au niveau du nombre de cas étudiés. De l'analyse d'une telle copie, on peut dégager d'abord l'aspect contradictoire du texte qui propose le traitement d'un cas simple par une preuve formelle détaillée et qui comporte néanmoins des « trous » importants, au niveau de l'entrée dans le problème. On identifie par suite la conception sous-jacente de la preuve comme un calcul sur les énoncés, organisé en pas ternaires. On peut ainsi la mettre en regard de la *règle du « on sait que-or-donc »*. On amène les enseignants à considérer qu'on pourrait remplacer cette règle par la suivante : on ne rédige une preuve qu'après avoir cherché un problème, avec pour objectif de réduire le doute et de convaincre le lecteur, en dehors de tout cadre formel imposé. Une production de ce troisième type permet aussi de montrer que, malgré la « rigueur » apparente d'un tel texte, il omet des points importants. Une preuve ne peut pas « tout dire », il faut trier les arguments en fonction de leur pertinence. C'est la recherche du problème qui va guider dans les choix à faire au niveau de la rédaction. Ceci permet de remettre en cause l'obligation souvent faite à l'élève d'écrire « tous » les pas de démonstration, jusqu'aux plus petits. L'élève doit apprendre à trier les arguments à dire dans une preuve, il ne faut pas l'obliger à expliciter ces « petits pas » de démonstration sous prétexte que cela lui fait mieux comprendre une preuve. On fait aussi ressortir que la conception de la preuve comme un calcul sur les énoncés occulte la généralité du problème, empêche de s'interroger sur l'existence des objets en jeu.

Les spécificités du problème *du Centre de secours*, sur les plans didactique et épistémologique, sont, en partie, différentes de celles-ci : on est amené à réfléchir sur la façon dont on aborde un problème. Il apparaît, lors des diverses expérimentations réalisées, que le recours systématique à un catalogue de méthodes (« la boîte à outils ») occulte le problème lui-même, qu'on manipule des objets mathématiques sans avoir de problématique de recherche mathématique. Ceci questionne la présence largement ancrée des fiches-méthodes dans les manuels et le recours systématique à celles-ci en phase d'apprentissage de la preuve. Sur ce problème, nous proposons des modalités identiques à celles qui sont décrites ci-dessus à propos du *Pentagone* pour organiser l'institutionnalisation sur la preuve et son enseignement.

Bibliographie

BALACHEFF N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18, éd. D. Reidel Publishing Company, 147-176.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, éd. La Pensée Sauvage.

DEMONGEOT M.C. & GANDIT M. (2003), Faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que…, *Petit x*, n°63, éd. IREM de Grenoble, 30-50.

DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23/3, éd. La Pensée Sauvage, 295-342.

DUVAL R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics 22*, Netherlands, éd. Kluwer Academic Publishers, 233-261.

GANDIT M. & MASSE-DEMONGEOT M.C. (1996, reéd. 2001), *Le vrai et le faux au collège et au lycée*, éd. IREM de Grenoble.

GANDIT M. (2004), Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie, *Petit x*, n°65, éd. IREM de Grenoble, 36-49.

GANDIT M. (2004), Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : deuxième partie, *Petit x*, n°66, éd. IREM de Grenoble, 49-82.

GANDIT M. (2008), *Etude épistémologique te didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement ; une ingénierie de formation*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier Grenoble 1.

GRENIER D. & PAYAN C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.18/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 59-100.

LEGRAND M. (1990), Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 365-406.

POINCARÉ H. (1908), L'invention mathématique, *Bull. de l'Institut Général Psychologique*, 8è année, n°3.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 133-170.

Michèle GANDIT IUFM, Université Joseph Fourier , GRENOBLE, France
michele.gandit@ujf-grenoble.fr