L'INFLUENCE DES GRANDEURS IMPLIQUEES SUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE MOYENNE

Claudine Mary
Université de Sherbrooke

Linda Gattuso
Université du Québec à Montréal

Divers moyens d'interventions peuvent être envisagés pour aider l'élève à comprendre une notion et la structure d'un problème. Des auteurs ont montré l'influence du contexte sur la compréhension des énoncés de problème et leur résolution (Stern & Lehmdorfer, 1992 ; Cerquetti-Aberkane, 1987 ; Bell, Fischbein, et Greer, 1984) et ont conseillé l'utilisation de contextes particulier pour faciliter l'introduction de certaines notions (Semadini, 1984). Dans le même sens, on pourrait être tenté d'utiliser le contexte du « calcul de **notes** » lorsqu'on parle de moyenne, ce contexte pouvant être jugé facilitant parce qu'il est associé au contexte scolaire donc au vécu de l'élève. Or, les résultats obtenus suite à une expérimentation réalisée auprès d'élèves de 2^e^, 3^e^ et 4^e^ secondaires, au Québec, laisse penser que le contexte des **Notes** est de loin le plus difficile comparativement à un contexte d'**Âges** ou un contexte de **Poids**, tout au moins pour le type de problèmes qui leur a été proposé. Pollatsek *et al* (1981) dans une étude où les contextes Poids et Notes étaient utilisés, avaient conclu: « A […] point that emerges is that the same type of problem may be approach in different ways if it is placed in different context » (p202).

Les résultats présentés ici sont issus d'une recherche plus large sur les stratégies de résolution utilisées par les élèves du secondaire (2e, 3e et 4e) pour résoudre des problèmes de moyenne pondérée. Pour l'ensemble de l'étude, un total de 24 problèmes ont été formulés et 638 élèves ont été interrogés. Chaque élève répondait à 5, 6 ou 7 questions selon son niveau académique, 2e, 3e ou 4e secondaire. respectivement.[1] Dans cet article, trois problèmes seront présentés ne variant que par les grandeurs impliquées : **Poids**, **Notes**, **Âges**. Ils ont été conçus pour tester spécifiquement l'influence de celles-ci sur la résolution.

[1] Pour plus de détails consulter Gattuso et Mary, 1998 et 2001.

Problèmes impliquant des moyennes partielles

Trois problèmes de <u>même structure</u> ont été soumis aux élèves. Il s'agit de trouver la moyenne globale d'un groupe composé de deux sous-groupes dont on connaît les moyennes respectives. Deux sous-questions sont posées ; la première (a) demande de trouver cette moyenne, la deuxième (b) demande de calculer un total limite. On demande en plus aux élèves d'écrire comment ils ont obtenu ce résultat :

Poids
Il y a dix personnes dans un ascenseur, huit adultes et deux enfants. Le **poids** moyen des adultes est 60 kg et le **poids** moyen des enfants est 20 kg.

a) Quelle est le **poids** moyen des dix personnes dans l'ascenseur?
b) Une affiche indique que la limite permise pour cet ascenseur est de 500 kg. Cette limite est-elle respectée?

Âges
Il y a dix personnes dans un autobus, deux adultes et huit enfants. L'**âges** moyen des adultes est de 60 ans et l'**âge** moyen des enfants est de 6 ans.

a) Quelle est l'**âge** moyen des dix personnes dans l'autobus?
b) Toutes ces personnes ensemble ont-elles plus que 100 ans?

Notes
Claude a passé dix tests de musique, huit avant Pâques et deux après Pâques. Elle a obtenu une moyenne de 80 pour les tests passés avant Pâques et une moyenne de 40 pour ceux passés après Pâques.

a) Quelle est la note moyenne de Claude en musique?
b) Claude veut être acceptée dans l'option musique en septembre. Pour y accéder il faut avoir accumulé au moins 700 points en musique. Peut-elle être acceptée?

Figure 1

Analyse des problèmes

Comme les données sont des moyennes partielles, pour calculer la nouvelle moyenne (a), il est important de reconstituer une distribution plausible ou le total des données de cette distribution.[2] Par exemple, lorsqu'on dit que le poids moyen des huit adultes est de 60 kg, on peut trouver la somme des poids en multipliant 60 par 8 ou on peut la calculer en additionnant des poids estimés pour chacun des individus qui respectent la moyenne de 60 kg ; les poids suivants pourraient être choisis : 60, 40, 80, 56, 64, 60. Les élèves de 2^{e} secondaire, peu initiés au type de problèmes proposé, pouvaient ainsi recourir à une liste de données pour résoudre le problème.

La question (b) relative au **Total** avait pour but de vérifier si les élèves prenaient conscience de la pondération de chacune des données lorsqu'ils avaient à calculer le total. Par exemple, pour calculer la somme des poids, il faut multiplier le poids moyen par enfants par le nombre d'enfants et le poids moyen par adulte par le nombre d'adultes. Si l'élève fait ce calcul, il tient compte de la pondération. Il se pourrait que l'élève puisse faire ce calcul et ne pas pouvoir trouver le poids moyen en (a). Toutefois, la production de cette solution suppose que l'élève donne une interprétation correcte au poids moyen des enfants et des adultes.

Notons que les formulations sont calquées les unes sur les autres et que les nombres ont été choisis de manière à simplifier les calculs puisque la calculatrice n'était pas permise. De plus, dans les trois versions deux données éloignées l'une de l'autre sont utilisés et, dans les trois cas, elles sont de pondération 2 et 8. Les données éloignées et les pondérations sont telles que les réponses sont très différentes selon qu'on tienne compte ou non de la pondération.

Trois raisons pouvaient nous permettre d'anticiper de meilleures résultats pour l'un ou l'autre des problèmes. Les **Notes** représentent un contexte familier pour les élèves. Les **Poids** se traduisent aisément par une image de grosseur et le total a un sens : « le poids total des personnes dans l'ascenseur est... ». Selon Pollatsek *et al* (1981) les liens entre somme et moyenne semblent plus transparents pour Poids que pour Notes. L'**Âge** est une mesure souvent considérée comme discrète (on arrondit habituellement l'âge à l'unité la plus près, parfois à la demie la plus près) mais a une apparence plus abstraite, le total n'a pas vraiment de sens.

[2] Les résultats à ces problèmes sont comparés à ceux de problèmes où on a accès à chacune des données et de problèmes où les fréquences sont exprimés en rapport ou en pourcentage, dans Gattuso et Mary (1998).

Résultats (a)

Le tableau 1 donne le nombre d'élèves qui ont répondu à ces problèmes selon le niveau académique.

	Sec. 2	Sec. 3	Sec. 4	Total
Poids	79	81	53	213
Âges	82	80	52	214
Notes	80	81	48	209
TOTAL	241	242	153	636

Tableau 1

Le tableau 2 donne le pourcentage de réussite pour chacun des trois problèmes.[3] On y voit que le problème des **Notes** est très faiblement réussi sauf en 4^{e} secondaire, alors que les deux autres sont réussis au moins à 50% à tous les niveaux. Le contexte du **Poids** pourrait être facilitant, bien que les résultats pour les versions **Âges** et **Poids** sont près. Il faut constater que les élèves plus âgés semblent moins influencés par les grandeurs utilisées ce qui pourrait faire croire qu'il y a meilleure compréhension du concept .

Niveau	Sec. 2	Sec. 3	Sec. 4	Total
Poids	42 53,2%	57 70,4%	32 60,4%	131 61,5%
Âges	46 56,1%	40 50,0%	30 57,7%	116 54,2%
Notes	18 22,5%	31 38,3%	30 62,5%	79 37,8%

Tableau 2

De plus, l'analyse des procédures utilisées par les élèves s'est révélée éclairante (tableau 3).

[3] Sont considérées comme justes, entre autres, les procédures avec erreurs de calculs, avec réponses arrondies, avec inversion dans l'attribution des fréquences aux données.

(a)	Poids	Âges	Notes
Procédure juste la plus fréquente	Formule	Formule	Formule
Sec. 2	50,6%	50,0%	18,8%
Sec. 3	66,7%	42,5%	28,0%
Sec. 4	58,5%	36,5%	41,7%
Total :	58,7%	43,9%	26,8%
Procédure fausse la plus fréquente	Total	Moyenne des données	Moyenne des données
Sec. 2	29,1%	30,5%	60,0%
Sec. 3	11,1%	30,0%	45,7%
Sec. 4	24,5%	17,3%	31,3%
Total :	21,1%	27,1%	47,8%

Tableau 3

La formule, $\Sigma x_i f_i / \Sigma f_i$ est la procédure la plus fréquemment utilisée ; elle semble expliquer une grande partie des résultats. À prime abord il ne faut pas s'en étonner car c'est la façon la plus simple de résoudre le problème, mais on doit noter que les élèves de 2^e secondaire n'ont pas traité la moyenne pondérée à l'école. Remarquons aussi que pour la version **Notes**, les élèves de 4^e secondaire transformant la pondération en fréquences relatives utilisent la formule $\Sigma x_i p_i$ (16,7% en 4e secondaire ; 3,7% en 3e secondaire et 0% en 2e secondaire) : 60 x 0,8 + 20 x 0,2. Cette procédure n'est pratiquement pas utilisées pour les **Âges** (moins de 6% en 4e secondaire, 0% aux autres niveaux.) et les **Poids** (0%).

Quant aux procédures fausses, celle qui est la plus utilisée pour la version **Âges** et tout particulièrement pour la version **Notes**, est la moyenne des données, c'est-à-dire $(x_1 + x_2) / 2$, procédure qui ne tient pas compte de la pondération. Pour la version **Poids**, seulement 8,5% des élèves l'utilisent. Pour cette version, la procédure fausse la plus souvent rencontrée est le **total** des données, c'est-à-dire $\Sigma x_i f_i$. Cette procédure tient compte de la pondération contrairement à la précédente.

C'est comme si dans la version **Poids**, les élèves pouvaient envisager que la moyenne partielle qui est donnée représente les différents poids de la distribution mais pas dans les versions **Âges** et **Notes**. Dans ces versions, les moyennes partielles données ne sont pas pondérées pour reconstituer les totaux partiels nécessaires pour le calcul de la moyenne finale. Si nous posions la question directement sur le total, les élèves pourraient-ils reconstituer le total des poids, âges ou notes ? C'est ce que nous voulions vérifier avec la question b.

Résultats (b)

En sous-question, les élèves devaient trouver un total, $\Sigma x_i f_i$, donc tenir compte de la pondération. Les résultats, rapportés dans le tableau 4, montrent un fort pourcentage de réussite pour les versions **Poids** et **Âges**. Toutefois, il est intéressant de remarquer ici que la version **Notes** est moins bien réussie. Le plus fréquemment, les réponses fausses consistent à dire qu'il manque des informations *(« on ne connaît pas les **notes** de chaque test »)*, qu'on ne sait pas *(« je ne sais pas »)* ou tout simplement à ne pas répondre (21,9% pour ces trois catégories de réponses). Le pourcentage de réponses de ce type tombe à 4,2 pour les **Âges** et à 0,9 pour les **Poids**. Ce résultat est étonnant puisque pour toutes les versions, les données ne sont pas connues.

Niveau	Sec. 2	Sec. 3	Sec. 4	Total
Poids	69 87,3%	78 96,3%	48 90,6%	195 91,5%
Âges	71 86,6%	69 86,3%	47 90,4%	187 87,4%
Notes	59 73,6%	53 65,4%	33 68,8%	145 69,4%

Tableau 4

Discussion

Les résultats obtenus pour la version **Notes** peuvent surprendre étant donné l'utilisation courante du calcul de notes pondérées à l'école. Toutefois, l'utilisation de la moyenne dans le calcul de notes à l'école pourrait aussi conduire à confondre moyenne et données. On dit souvent dans le langage familier : » j'ai une moyenne de 80 à l'examen. » Cet usage qui confond la moyenne et les données pourrait expliquer le grand nombre de procédures de type $(x_1 + x_2)/ 2$. Les contextes qu'on pense faciles portent parfois leur lot de conceptions inadéquates dont il faut se méfier.

Toutefois, les résultats à la sous-question (b) ne semblent pas corroborer cette hypothèse puisque très peu d'élèves considèrent la somme des données comme le total. Ils ne donnent pas « 80 +20 = 100 » comme total. Mais encore là, on doit constater que les élèves ont plus de difficultés à reconstituer le total pour la version **Notes** que pour les deux autres versions et on peut émettre l'hypothèse que ceci a influencé les résultats en (a). Il serait alors important de travailler avec les élèves la reconstitution du total dans des situations impliquant des grandeurs de nature différentes.

Poursuivant notre objectif, nous avons examiné si les élèves tenaient compte de la pondération. Pour la version **Poids**, il apparaît qu'elle favorise la prise en compte de la pondération et le calcul du total. Pour cette version, 84% des élèves utilisent une procédure, juste ou fausse, qui tient compte de la pondération, contre 58% pour la version **Âges** et 45% pour la version **Notes**. La procédure fausse la plus utilisée en (a), pour la version **Poids**, est le calcul du total alors que cette procédure est quasi inexistante pour les deux autres versions et pose des problèmes en (b) pour la version **Notes**. Si l'on peut accepter de faire la somme des notes comme le demande la question (b), il semble que le lien entre la moyenne des notes et leur somme n'aille pas de soi. Dans la vie courante, on additionne des poids mais pas des âges et on fait la moyenne des notes (en référence à 100 au Québec) mais on ne les cumule pas, on ne dit pas j'ai 230. La formulation de la question (b) est peut-être en jeu, il reste cependant que le résultat de (a) est beaucoup plus faible pour la version **Notes**. Il se pourrait aussi que le poids soit moins propice à la confusion entre une moyenne partielle et une donnée de la distribution ou entre le total et la somme des moyennes partielles. L'association au poids pour travailler la pondération est donc "justifiée". Un contexte de poids pourrait alors servir avantageusement d'analogie pour travailler la moyenne. C'est d'ailleurs le cas de plusieurs approches connues utilisant une balance ou le principe du bras de levier appliqué à une longue pièce de bois déposée sur un point.

Quant au contexte d'**Âges,** il ne se distingue pas vraiment ; il semble plus facile que celui des **Notes** mais pas plus que celui du **Poids**.

Conclusion

Si les versions différentes provoquent des comportements différents, pour une même structure de problèmes, il apparaît essentiel de soumettre les élèves à une grande variété de grandeurs et de contextes et la familiarité à une grandeur n'est pas le seul critère à retenir pour choisir les problèmes. D'un autre côté, il semble bien que les élèves de 2^{e} secondaire n'ayant pas étudié la moyenne pondérée tiennent compte de la pondération dans certaines situations (le poids par exemple). Il peut donc être pertinent de travailler à partir de ces situations pour développer certaines représentations utiles de la moyenne pondérée.

Bibliographie

BELL, A., FISCHBEIN, R. ET GREER, B. (1984). Choise of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, probleme structure and context. Educational studies in mathematics, 15, 129-147.

CERQUETTI-ABERKANE, F. (1987). Des erreurs et des maîtres. Les erreurs des élèves trouvent souvent leur source chez les enseignants... Prospectives, octobre page 120

GATTUSO, L., MARY, C. (1998) "Development of the Concept of Weighted Average among High-School Children". In *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. Singapour* : International Statistical Institute. 685-692.

GATTUSO L., MARY C. (2001) Pupils perception of the links between data and their arithmetic average. In Marja van den Heuvel-Panhizen (ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Utrech University, Netherlands. (2) 25-32

PENAFIEL, A.F., WHITE, ARTHUR L. (1989) SSMILES. "Exploration of the mean as a balance point". *School science and mathematics 89(3),* 251-258

POLLATSEK, A., LIMA, S., WELL, A.D. (1981) "Concept or computation: Students' understanding of the mean". *Educational Studies in Mathematics, 12,* 191-204.

SEMADINI, Z. (1984). A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. Educational studies in Mathematics, 15, 379-395.

STERN & LEHMDORFER (1992). The role of situational context in solving word problems. Cognitive Development, 7, 259-268.

WHITE, ARTHUR L., BERLIN, D. (1989) SSMILES. "Fulcrum and Mean: Concepts of Balance--High School/College". *School Science and Mathematics 89 (4)* 335-342