5 PROBLEMES DE PROBABILITES A TRAVERS L'HISTOIRE

Par Omar Boutéglifine
bouteg@caramail.com
Centre de Recherche sur l'Enseignement de Mathématiques à Agadir (CREMA)

Résumé :
Une stratégie probabiliste consiste à structurer le problème posé en le plaçant dans un modèle mathématique convenable et qui conduit à une solution sans ambiguité.
On se propose de revenir à l'histoire pour déterminer l'origine de certaines stratégies en rendant hommage à ceux qui leur ont donné naissance. Pour cela, nous avons choisi cinq problèmes traitant chacun une situation différente avec des stratégies de l'époque où le problème est posé.

Problème 1 (les paris) :

Deux joueurs misent chacun 32 pistoles qu'ils décident de jouer en trois parties, avec cette convention que le premier à avoir gagné trois parties gardera la totalité des mises. Soit alors le cas où l'un des joueurs ayant gagné deux parties et l'autre une, tous deux décident d'arrêter le jeu. Comment faire le partage ?

Voici pour ce problème, deux stratégies différentes qui datent depuis l'époque de Pascal et Fermat :

1) Stratégie de Pascal :

Désignant par A le premier joueur et par B le second.
Il manque une partie à A et deux parties à B pour gagner la mise.
On emploie le symbolisme An et Bm pour indiquer que A gagne n parties et B m parties.
On peut schématiser cette situation comme suit :

A2B1 $\xrightarrow{\text{A gagne}}$ A3B1 $\boxed{\text{fin}}$, 32 pistoles sûres pour A

A2B1 $\xrightarrow{\text{B gagne}}$ A2B2 $\boxed{\text{égalité}}$, 16 pistoles pour A et 16 pour B.

Par conséquent, la somme à donner à A est 32+16=48.
La somme à donner à B est 32/2=16.

2) Stratégie de Fermat :

Il y a quatre possibilités : AA , AB, BA, BB.
Puisqu'il faut une partie pour A et deux pour B, toute combinaison contenant un A fait gagner A et l'autre fait gagner B.
Donc trois cas sont favorables à A et un à B.

A aura les trois-quarts des 64 pistoles c'est-à-dire 48 pistoles, et B aura le quart, soit 16 pistoles.[1]

<u>Problème 2 (probabilités géométriques)</u> :

On trace une corde au hasard dans un cercle : quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit ?

Joseph Bertrand (1822-1900) a cité ce problème comme exemple d'un énoncé incomplet, il le résout en employant trois stratégies différentes, ce qui mènent à trois résultats différents.

<u>Stratégie 1 :</u>

On peut, pour des raisons de symétrie, se donner la direction de la corde; le point d'intersection de cette corde avec le diamètre perpendiculaire à cette direction devra alors se trouver sur un segment égal à la moitié de la longueur de ce diamètre (car la distance au centre du côté du triangle équilatéral inscrit est égale à la moitié du rayon, figure 1), la probabilité est donc 1/2.

Figure 1 :

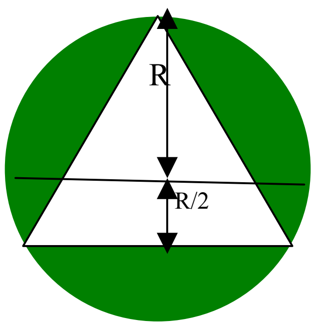
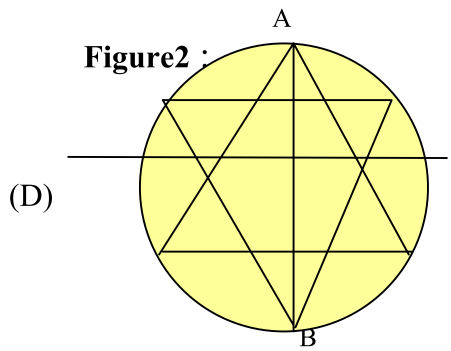


Figure2 :



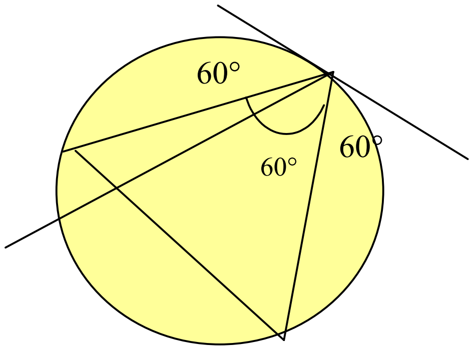
Ou encore (figure 2), la direction (D) étant choisie, il suffit de choisir un point sur le segment [P,Q] qui a pour longueur la moitié de la longueur de [A,B]. La probabilité est la valeur de PQ/AB qui est 1/2.

<u>Stratégie 2 :</u>

On peut, pour des raisons de symétrie, se donner une des extrémités de la corde sur le cercle ; la tangente en ce point et les deux côtés du triangle équilatéral inscrit ayant ce point pour sommet forment trois angles de 60° ; la direction de la corde doit être intérieure à l'un de ces trois angles à l'exclusion des deux autres ; la probabilité est donc 1/3.

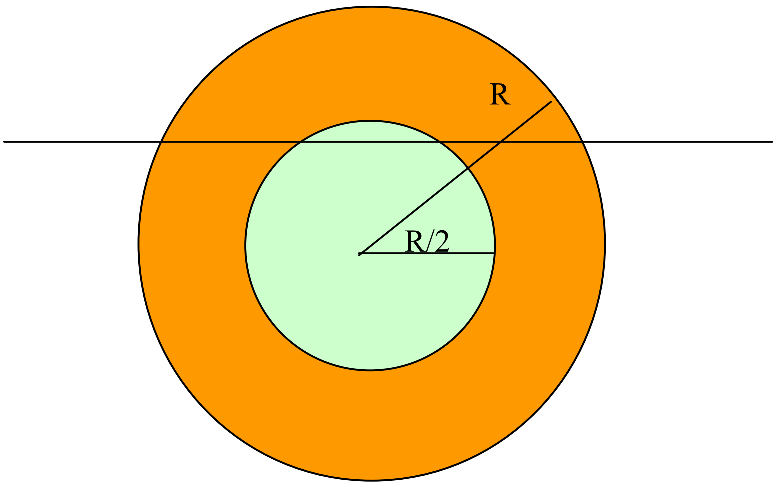
---

[1] Cette stratégie est calquée sur la méthode de Fermat décrite dans la lettre de Pascal à Fermat le 24 août 1654. La stratégie de Fermat dans cette lettre concerne plutôt le cas de quatre parties à gagner pour être vainqueur au moment où il manque à A deux parties seulement et à B trois, Ce dernier octroie à A 44 pistoles et à B 20. La stratégie de Pascal est récursive, celle de Fermat combinatoire.



Stratégie 3:

Pour fixer la position de la corde, il suffit de donner son milieu ; pour que la corde satisfasse à la condition de l'énoncé, il faut que son milieu soit intérieur à un cercle concentrique au cercle donné et de rayon moitié ; la surface de ce cercle est le quart de la surface donnée ; la probabilité est donc 1/4.



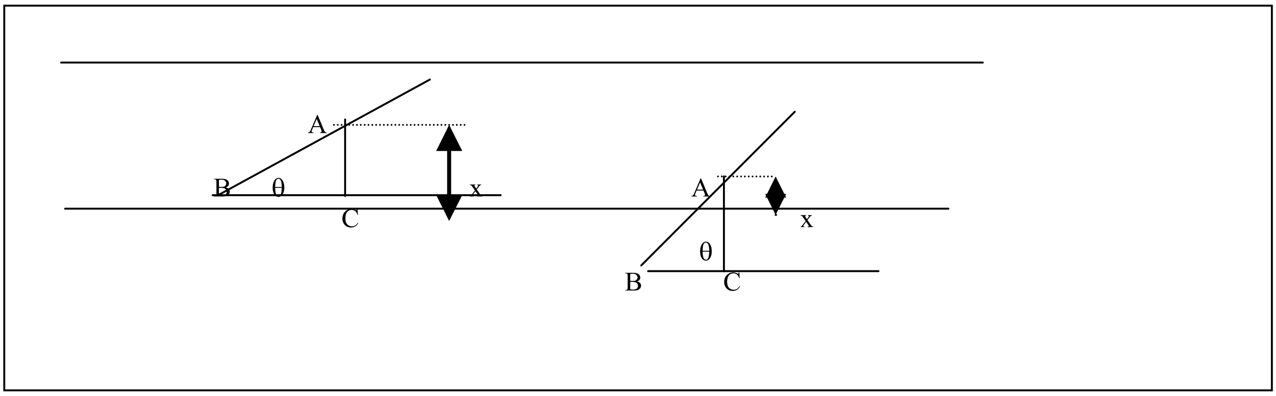
Commentaire des stratégies de Bertrand :

Doit-on penser que ces trois solutions sont également bonnes et, par la suite, également mauvaises ? L'énoncé est incomplet dans la mesure où il n'a pas décrit suffisamment l'expérience aléatoire dans laquelle on estime la probabilité, c'est à dire comment on s'y prendra pour tracer une corde au hasard dans un cercle. Les trois solutions sont correctes et décrivent trois manières de procéder, dans la pratique, pour choisir au hasard une corde d'un cercle. Elles correspondent à trois mesures de probabilité distinctes, chose qui n'est possible à affirmer qu'avec l'axiomatisation de Kolmogorov.

<u>Problème 3 (</u>Problème de l'aiguille de Buffon : probabilités géométriques)

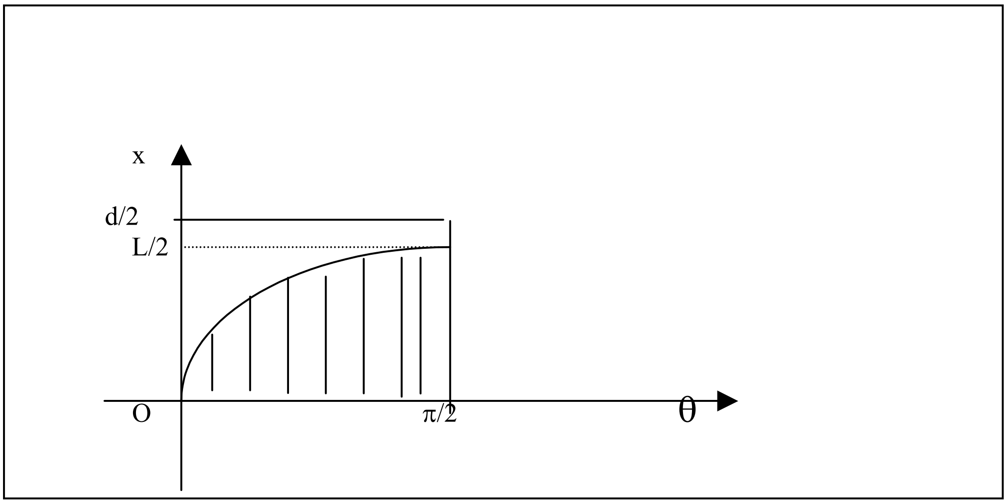
Un plan est réglé avec des lignes parallèles et équidistantes d'une longueur d.
Une aiguille de longueur L est lancée au hasard sur le plan. Quelle est alors la probabilité que celle-ci traverse une des lignes ?

<u>Solution du problème de Buffon.</u>
Déterminons la position de l 'aiguille dans le plan par :
1°) la distance x du milieu A de l'aiguille à la droite la plus proche ;
2°) l'angle θ que fait l'aiguille avec la direction des parallèles.
C étant la projection orthogonale de A sur le $2^{ième}$ côté de l'angle θ, l'aiguille coupe (D) si et seulement si : $AC \geq x \Leftrightarrow \frac{L}{2}\sin\theta \geq x$.



x décrit l'intervalle $[0, \frac{d}{2}]$ et θ décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Rapportons le plan à un repère orthonormé (O, θ, x); l'événement envisagé, qui correspond à la réalisation de l'inégalité $x \leq \frac{L}{2}\sin\theta$, se produira si et seulement si le point (θ, x) appartient au domaine hachuré ci-dessous limité par la courbe d'équation $x = \frac{L}{2}\sin\theta$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Ce domaine est d'aire I.



La probabilité cherchée est p =I/aire du rectangle,

$$\text{or } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{2} \sin\theta \; d\theta = \frac{L}{2} \; ; \; p = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\pi}{2} x \frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi \, d}$$

<u>Commentaire</u> :
George- Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788) a publié en 1777 son Essai d'arithmétique morale. Il distingue au début de cet Essai entre la certitude physique, fondée sur une longue suite ininterrompue de succès, et la certitude morale qui repose essentiellement sur un nombre restreint de cas similaires, puis il montre que la valeur arithmétique de l'argent est différente de sa valeur morale, laquelle dépend de l'état de la fortune de celui qui désire obtenir de l'argent. Il discute longuement du paradoxe de Saint- Pétersbourg qui lui fut proposé par Cramer en 1730 et il présente plusieurs raisons qui rendent ce paradoxe impossible.
Après avoir mentionné que seule l'arithmétique avait été utilisée pour estimer des probabilités, il entreprend de montrer par des exemples que la géométrie peut aussi servir d'instrument dans la théorie des probabilités. Il traite de probabilités simples, puis il procède à des exemples plus complexes qui requièrent l'usage du calcul intégral. Et présente ensuite le problème célèbre que nous venons de traiter en lui trouvant la réponse exacte qui est : $\frac{2l}{\pi \, d}$.

Problème 4 (Conceptions spontanées) :

Combien il y a à parier qu'on amène « croix »[2] en jouant deux ou trois coups consécutifs ?

Stratégie de D'Alembert :
Il y a quatre combinaisons :
Premier coup : Croix _ Pile _ Croix_ Pile
Deuxième coup : Croix _ Croix_ Pile _ Pile.
De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner, il y a donc trois contre un à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouverait huit combinaisons, dont une seule fait perdre et sept font gagner. Ainsi il y aurait sept contre un à parier. Pour ne prendre ici que le cas de deux coups, il faut réduire à une les deux combinaisons qui donnent «croix » au premier car dès qu'une fois «croix » est venue, le jeu est fini et le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons possibles :
« croix », premier coup,
« pile, croix », premier et second coup,
« pile, pile », premier et second coup.
Donc il n'y a que deux contre un à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera : «croix », « pile, croix », « pile, pile, croix », « pile, pile, pile ». Donc, il n'y a que trois contre un à parier. Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur le jeu du hasard.

Commentaire de la stratégie de D'Alembert:

Laplace dit que D'Alembert n'a pas compris comment les principes de calcul s'appliquent[3]. Mais D'Alembert doute même de l'efficacité des règles et remet en cause la sémantique et la syntaxe des règles unanimement conçues.
La conviction que l'idée de rassembler «Croix, Croix » et «Croix, Pile » en un seul cas équiprobable aux deux autres ne peut se faire que par le biais d'une expérimentation en répétant l'expérience suffisamment de fois pour voir la fréquence de l'événement se stabiliser.

Problème 5 (Stratégie itérative):

Quelle est la probabilité d'amener le chiffre 1 en lançant un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 dans les cas suivants:
le dé est lancé deux fois ?
le dé est lancé trois fois ?
le dé est lancé quatre fois ?

[2] "Croix" veut dire "face".
[3] Citation de Jean-Claude Thienard dans « A propos de la définition de la probabilité » commission inter-IREM juin 1997.

Stratégie de De Moivre :

Avoir un As est une réussite et le contraire est un échec.

La probabilité de réussir au premier lancer est 1/6 , et la probabilité d'échouer est 5/6. La probabilité de réussir au second lancer est encore 1/6. Par conséquent, la probabilité d'échouer au premier lancer et réussir au deuxième lancer vaut 5/6*1/6=5/36.

La probabilité demandée est donc 1/6+5/36=11/36.

Au premier lancer, la probabilité de réussir est 1/6, et celle d'échouer est 5/6. D'après 1), la probabilité de réussir dans les deux lancers restant est 11/36. Par suite, la probabilité d'échouer au premier lancer et réussir dans les deux suivants est 5/6*11/36=55/216.

La probabilité demandée est donc 1/6+55/216=91/216.

3) Au premier lancer, la probabilité de réussir est 1/6, et celle d'échouer est 5/6.

D'après 2), la probabilité de réussir dans les trois lancers restant est 91/216. Par suite, la probabilité d'échouer au premier lancer et réussir dans les trois suivants est 5/6*91/216=455/1296.

La probabilité demandée est donc 1/6+455/1296=671/1296.

Commentaire de la stratégie de De Moivre :

De Moivre utilise une stratégie itérative. A partir du 2) , le résultat d'un cas renvoie à celui du cas précédent. C'est une procédure mathématique qui ne fait pas intervenir les formules de dénombrement auxquels sont habitués les élèves du lycée.

Ces stratégies ont été collectées dans les démonstrations que De Moivre avait faites aux trois premiers cas proposés dans l'introduction de Doctrine of Chances[24].

Conclusion

Un problème de probabilité se crée à partir d'une réalité où se confrontent plusieurs paramètres intervenant dans cette réalité. La connaissance de ces paramètres est essentielle à la description du réel dans ce que nous appelons expérience aléatoire. Les expériences aléatoires que nous reproduisons pour simuler la réalité se basent sur l'identification des mécanismes qui régissent le réel dans la forme et le contenu, et dans ses étapes et ses relations avec l'entourage. Les paradoxes restent paradoxes jusqu'à une meilleure connaissance des phénomènes et donc une bonne description de l'expérience aléatoire. L'oubli d'un facteur ou d'un mécanisme peut fausser la simulation et aboutir à une modélisation erronée. Nous songeons au «paradoxe de Joseph Bertrand » qui n'a de paradoxe que la négligence des conditions dans lesquelles l'expérience a été réalisée et l'ignorance de la mesure de probabilité, ce qui signifie que dans toute stratégie probabiliste on doit d'abord identifier les éléments de la situation et vérifier s'ils correspondent aux composantes d'un modèle mathématique convenable.

BIBLIOGRAPHIE

1)	Boutéglifine O. « Stratégies probabilistes», Université de Mons-Hainaut Belgique.Oct.1999
2)	Colette Jean-Paul, « Histoire des mathématiques » Editions du renouveau pédagogique INC 1979 Ottawa.
3)	Commission inter- IREM Statistiques et probabilités « Enseigner les probabilités au lycée », Edition IREM de Reims Juin 1997.
4)	De Moivre A., Doctrine of Chance, 1718, The Third Edition 1756. Disponible à l'UMH.
5)	Boulevier Alain et George Michel, Dictionnaire de Mathématiques, sous la direction de Frnaçois Le Lionnais, PUF édition 4 ième Trimestre 1979 .
6)	Dupuis Claire .et collaborateurs, Enseigner les probabilités en classe de première(Programmes 1991) , 2ième édition, IREM de Strasbourg 1994.
7)	Dupuis Claire .et collaborateurs, Enseigner les probabilités en classe de Terminale(Programmes 1991) IREM de Strasbourg , Mars 1994.
8)	Renbenhersch Ph. L'univers mathématique, traduit et adapté par L ; Chambadal. Gauttier Villars, Ouvrage publié avec le concours du centre national des lettres Paris 1985 pour la traduction française.
9)	Emile Borel, Oeuvres tome IV, édition du centre national de la recherche scientifique, Paris 1972.